凸　集　合

福　尾　洋　一

§0　序

本稿では，文献〔1〕〔4〕〔5〕〔6〕〔8〕等を参考にすることによって，非線形計画法の理論において基本的な役割を演じる凸集合の概念について整理する．

なお，以下において，説明なしに使用される記号は，すべて文献〔3〕で約束されたものである．新たに，$\boldsymbol{R}_{\oplus}$ は非負実数の全体，$\boldsymbol{R}_{+}$ は正実数の全体，$\boldsymbol{R}^n_{\oplus}$ はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の非負象限，$\boldsymbol{R}^n_{+}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の正象限，集合 $\boldsymbol{S}_1$，$\boldsymbol{S}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{S}_1\backslash\boldsymbol{S}_2\equiv\boldsymbol{S}_1\cap\boldsymbol{S}_2^c$ とする．また，n 次行列 $M=[\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n]$, $\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，そのノルム $\|M\|$ は，

$$\|M\|=(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\langle\boldsymbol{m}_i,\boldsymbol{m}_i\rangle)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{m}_i\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義されている．

§1　凸集合

定義1　凸1次結合・線分

$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^n, k\in\boldsymbol{N}$，に対して，形式

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i,\quad \alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,$$

を $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ の凸1次結合という．また，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，集合

$$\{\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\,|\,\alpha_1,\alpha_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\alpha_1+\alpha_2=1\}$$

を $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を結ぶ線分といい，しばしば，$[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2]$ と書く．

定義2　凸集合

集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ は，

凸集合

$$\forall x_1, x_2 \in C \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R_{\oplus}, \ \alpha_1+\alpha_2=1 : \alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2 \in C,$$

ならば，(R^n の)凸集合という．

注意 1　R^n，$R^n_{\oplus}$，R^n_{+}，線形部分空間 $L \subset R^n$，アフィン集合 $A \subset R^n$, $x_0 \in R^n$ のみからなる集合 $\{x_0\}$，空集合 $\emptyset \subset R^n$ は凸集合である．また，$x_0 \in R^n$, $x_0 \neq 0$, と $\alpha \in R$ に対して，

超平面 $H(x_0;\alpha) \equiv \{x \mid \langle x, x_0 \rangle = \alpha\} \subset R^n$,

非負半空間 $H_{\oplus}(x_0;\alpha) \equiv \{x \mid \langle x, x_0 \rangle \geqq \alpha\} \subset R^n$,

正半空間 $H_{+}(x_0;\alpha) \equiv \{x \mid \langle x, x_0 \rangle > \alpha\} \subset R^n$,

非正半空間 $H_{\ominus}(x_0;\alpha) \equiv \{x \mid \langle x, x_0 \rangle \leqq \alpha\} \subset R^n$,

負半空間 $H_{-}(x_0;\alpha) \equiv \{x \mid \langle x, x_0 \rangle < \alpha\} \subset R^n$,

は凸集合である．更に，$x_0 \in R^n$ と $\varepsilon \in R_+$ に対して，

x_0 の ε 開球 $B(x_0;\varepsilon) \equiv \{x \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \subset R^n$,

単位開球 $B^n \equiv B(0;1) \equiv \{x \mid \|x\| < 1\} \subset R^n$,

も凸集合である．

定理 1　凸集合 $C \subset R^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$C = \{\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid x_i \in C, \alpha_i \in R_{\oplus}, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, k \in N\}.$$

証明　〔3〕の定理16の証明法と同様にすればよい．||

定理 2　凸集合 $C_i \subset R^n$ の任意の族 $\{C_i \mid i \in \Lambda$ (添数集合)$\}$ の共通部分 $\bigcap_{i \in \Lambda} C_i$ は凸集合である．

証明　〔3〕の定理17の証明法と同様にすればよい．||

定理 3　凸集合 $C, C_1, C_2 \subset R^n$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$\forall \alpha \in R : \alpha C$ は凸集合．

(ii)　$C_1 + C_2$ は凸集合．

(iii)　$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R_{\oplus} : (\alpha_1+\alpha_2)C = \alpha_1 C + \alpha_2 C.$

証明　(i)(ii)は明らかであるので，$\alpha_1, \alpha_2 \in R_{\oplus}$ は任意として，(iii)を示す．$\alpha_1=\alpha_2=0$ のときは自明であるので，$\alpha_1+\alpha_2 \neq 0$ とする．$x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2$，$x_1$,

$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}$, ならば,

$$\boldsymbol{x}=(\alpha_1+\alpha_2)[\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}\boldsymbol{x}_1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}\boldsymbol{x}_2]\in(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{C},$$

であるから, $\alpha_1\boldsymbol{C}+\alpha_2\boldsymbol{C}\subset(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{C}$. 一方, 逆の包含関係は明らかである.‖

定義 3　凸　包

集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{S}$ を含むすべての凸集合 $\boldsymbol{C}_i\subset\boldsymbol{R}^n$ の族 $\{\boldsymbol{C}_i\,|\,\boldsymbol{i}\in\Lambda$(添数集合)$\}$ の共通部分 $\mathcal{C}\boldsymbol{S}\equiv\cap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i$ を $\boldsymbol{S}$ の凸包という.

定理 4　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ の凸包 $\mathcal{C}\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{S}$ を含む最小の凸集合である.

証明　定理 2 により, 明らかである.‖

定理 5　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ の凸包 $\mathcal{C}\boldsymbol{S}$ に対して, 次の関係が成立する.

$$\mathcal{C}\boldsymbol{S}=\{\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\,|\,\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{S},\alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,k\in\boldsymbol{N}\}.$$

証明　〔3〕の定理20の証明法と同様にすればよい.‖

系　凸集合 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して, 次の関係が成立する.

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)=\{\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\,|\,\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{C}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}_2,\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\ \alpha_1+\alpha_2=1\}.$$

証明　上式右辺を $\boldsymbol{X}$ とおく. 定理 5 を考えて, 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)$ を

$$\boldsymbol{x}=\textstyle\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{1i}\boldsymbol{x}_{1i}+\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_{2i}\boldsymbol{x}_{2i},\quad \boldsymbol{x}_{1i}\in\boldsymbol{C}_1,\quad \boldsymbol{x}_{2i}\in\boldsymbol{C}_2,\quad \lambda_{1i},\lambda_{2i}\in\boldsymbol{R}_{\oplus},$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{1i}\equiv\alpha_1,\quad \sum_{i=2}^{k_2}\lambda_{2i}\equiv\alpha_2,\quad \alpha_1+\alpha_2=1,$$

$$k_1,k_2\in\boldsymbol{Z},\quad k_1+k_2\in\boldsymbol{N},$$

とおくと, α_1, α_2 のどちらか一方が 0 ならば, 定理 1 により, 直ちに $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ であり, $\alpha_1\neq0$, $\alpha_2\neq0$ ならば,

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1(\textstyle\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_{1i}\alpha_1^{-1}\boldsymbol{x}_{1i})+\alpha_2(\sum_{i=1}^{k_2}\lambda_{2i}\alpha_2^{-1}\boldsymbol{x}_{2i})\in\boldsymbol{X}$$

であるから, $\mathcal{C}(\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2)\subset\boldsymbol{X}$. 一方, 定理 5 により, 逆の包含関係は明らかである.‖

定理 6　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ と集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{S}/\!/\boldsymbol{C}$ ならば, $\boldsymbol{S}$ も凸集合である.

証明　〔3〕の定理22の証明法と同様にすればよい.‖

定義 4　凸集合の次元

凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ は，$\boldsymbol{C}$ のアフィン包 $\mathcal{A}\boldsymbol{C}$（と平行な線形部分空間）の次元が $r(\in\boldsymbol{Z})$ 次元であるとき，r 次元であるといい，$\dim\boldsymbol{C}=r$ と書く．

定義 5　単　体

集合 $\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k\}\subset\boldsymbol{R}^n$，$k\in\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ はアフィン独立，に対して，その凸包 $\mathcal{C}\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k\}$ を $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ を頂点とする（$\boldsymbol{R}^n$ の）k 次元単体という．

注意 2　集合 $\{\boldsymbol{e}_1^k,\cdots,\boldsymbol{e}_k^k\}\subset\boldsymbol{R}^k$，$k\in\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{e}_1^k,\cdots,\boldsymbol{e}_k^k$ は $\boldsymbol{R}^k$ の単位ベクトル，に対して，その凸包 $\mathcal{C}\{\boldsymbol{e}_1^k,\cdots,\boldsymbol{e}_k^k\}$ を改めて，

$$\Delta_\oplus^{k-1}\equiv\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)'=\textstyle\sum_{i=1}^k\alpha_i\boldsymbol{e}_i^k\,|\,\alpha_i\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \sum_{i=1}^k\alpha_i=1\},$$

と書くことにすれば，$\boldsymbol{e}_1^k-\boldsymbol{e}_k^k,\cdots,\boldsymbol{e}_{k-1}^k-\boldsymbol{e}_k^k$ は 1 次独立であるから，〔3〕の定理26(ii)により，$\Delta_\oplus^{k-1}$ は $k-1$ 次元単体である．なお，誤解のおそれがないので，今後は，$k-1$ 次元単体 $\Delta_\oplus^{k-1}$ 及び 1 次元単体 $\Delta_\oplus^1\equiv\Delta_\oplus$ を，

$$\Delta_\oplus^{k-1}\equiv\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\,|\,\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \textstyle\sum_{i=1}^k\alpha_i=1\},$$

$$\Delta_\oplus\equiv\{(\alpha_1,\alpha_2)\,|\,\alpha_1,\alpha_2\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \alpha_1+\alpha_2=1\},$$

によって定義する．

定理 7　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ の次元は，$\boldsymbol{C}$ に含まれるすべての単体の中の最大次元に等しい．

証明　定理 4 により，$\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{C}$ ならば，$\mathcal{C}\boldsymbol{S}\subset\mathcal{C}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}$ であることに留意して，$\boldsymbol{C}$ に含まれるすべての単体の最大次元を $r\in\boldsymbol{N}$——$r=0$ ならば，定理の成立は自明である——としておく．〔3〕の定理26を考慮しつつ，$\boldsymbol{C}$ に含まれる r 次元単体を

① $\mathring{\boldsymbol{S}}\equiv\mathcal{C}\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}\subset\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_r-\boldsymbol{x}_0$ は 1 次独立，

によって表すと，r の定義により，

② $^\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}\backslash\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots\boldsymbol{x}_r\}:\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_r-\boldsymbol{x}_0$ は 1 次従属，

である．さて，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}$ を示せばよいが，①と〔3〕の定理19により，$\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}$ であり，また，$\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}$ ならば，再び〔3〕の定理19により，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}$

であるので，以下では，$\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}$ を示す．〔3〕の定理19，〔3〕の定理20，及び定理5により，

$$\mathring{\boldsymbol{S}}\subset\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\},\ \text{i.e.}\ \mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}\subset\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\},$$

$$\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}\subset\mathring{\boldsymbol{S}},\ \text{i.e.}\ \mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}\subset\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}.$$

よって，〔3〕の定理20系及び〔3〕の定理21により，

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}&=\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}\\&=\mathcal{A}\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_r-\boldsymbol{x}_0\}+\boldsymbol{x}_0=\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_r-\boldsymbol{x}_0\}+\boldsymbol{x}_0,\end{aligned}$$

となる．よって，〔3〕の定理1により，

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}:\bar{\boldsymbol{x}}\notin\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}},\ \text{i.e.}\ \bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0\notin\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_r-\boldsymbol{x}_0\}\\\Rightarrow\ &{}^{\exists}\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}\backslash\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}:\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_r-\boldsymbol{x}_0\ \text{は1次独立,}\end{aligned}$$

を意味するが，これは②と矛盾する．よって，

$${}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}:\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}.\ \text{i.e.}\ \boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\mathring{\boldsymbol{S}}.\,\|$$

§2　錐・凸錐

定義6　非負1次結合・射線

$\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^n$，$k\in\boldsymbol{N}$，に対して，形式

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i,\quad \alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus}$$

を $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ の非負1次結合という．また，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，集合

$$\{\alpha(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{x}_1\,|\,\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}=\{\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\,|\,\alpha_1\in\boldsymbol{R},\alpha_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\alpha_1+\alpha_2=1\}$$

を $\boldsymbol{x}_1$ を端点とする $\boldsymbol{x}_2$ 方向への射線（または半直線）という．特に，$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{0}$ を端点とする $\boldsymbol{x}_0$ 方向の射線

$$\{\alpha\boldsymbol{x}_0\,|\,\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}$$

は，単に $\boldsymbol{x}_0$ 方向の射線（または半直線）という．

定義7　錐・凸錐

集合 $\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{R}^n$ は，

$${}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}\,{}^{\forall}\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}:\alpha\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K},$$

ならば，（$\boldsymbol{R}^n$ の）錐であるという．錐は必ずしも凸集合ではない．また，集合

$\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{R}^n$ は,

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{K}\ \forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus} : \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{K},$$

ならば,($\boldsymbol{R}^n$ の)凸錐であるという.凸錐は凸集合である.

注意 3 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^n_{\oplus}$, 線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$, $0\in\boldsymbol{R}^n$ のみからなる集合 $\{\boldsymbol{0}\}$, 空集合 $\emptyset\subset\boldsymbol{R}^n$ は凸錐である.また,$\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$, に対して,

$$\text{非負半空間 } \boldsymbol{H}_{\oplus}(\boldsymbol{x}_0;0)\equiv\{\boldsymbol{x}\mid\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0\rangle\geqq 0\}\subset\boldsymbol{R}^n,$$

$$\text{非正半空間 } \boldsymbol{H}_{\ominus}(\boldsymbol{x}_0;0)\equiv\{\boldsymbol{x}\mid\langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0\rangle\leqq 0\}\subset\boldsymbol{R}^n,$$

は凸錐である.

定理 8 凸錐 $\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して,次の関係が成立する.

$$\boldsymbol{K}=\{\textstyle\sum_{i=1}^k\alpha_i\boldsymbol{x}_i\mid\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{K}, \alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus}, k\in\boldsymbol{N}\}.$$

証明 〔3〕の定理16の証明法と同様にすればよい.‖

定理 9 凸錐((錐)) $\boldsymbol{K}_i\subset\boldsymbol{R}^n$ の任意の族 $\{\boldsymbol{K}_i\mid i\in\Lambda(\text{添数集合})\}$ の共通部分 $\cap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{K}_i$ は凸錐((錐))である.

証明 〔3〕の定理17の証明法と同様にすればよい.‖

定理10 凸錐 $\boldsymbol{K}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して,次の関係が成立する.

(i) $\boldsymbol{K}$ のアフィン包 $\mathcal{A}\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{K}$ を含む最小の線形部分空間である.

(ii) $(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{K}$ に含まれる最大の線形部分空間である.

証明 (i).$0\in\boldsymbol{K}$ であるから,〔3〕の定理18及び〔3〕の定理19により,明らかである.

(ii).①$(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K}$ は線形部分空間であること② $\boldsymbol{K}$ に含まれる任意の線形部分空間は$(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K}$ に含まれること——を証明すればよい.さて,$-\boldsymbol{K}$ が凸錐であることに注目すると,定理 9 と凸錐の定義により,

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K}\ \forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus} : \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K},$$

$$\therefore\quad \forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K}\ \forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R} : \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K}.$$

次に,$\boldsymbol{K}$ に含まれる任意の線形部分空間を $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{K}$ とおくと,

$$\forall \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{K} : \boldsymbol{x}\in(-\boldsymbol{L})\subset(-\boldsymbol{K}),\ \text{i.e. } \boldsymbol{x}\in(-\boldsymbol{K})\cap\boldsymbol{K}.\ \|$$

定理11　凸錐 $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

（i）　$\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2$ は凸錐．

（ii）　$\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2=\mathcal{C}(\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2)$．

証明　（i）は明らかであるので，(ii)を示す．任意の $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2$ を

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\quad \boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{K}_1,\quad \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{K}_2,$$

とおくと，

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{x}_1)+\frac{1}{2}(2\boldsymbol{x}_2),\quad 2\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{K}_1\subset\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2,\quad 2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{K}_2\subset\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2.$$

よって，定理５により，$\boldsymbol{x}\in\mathcal{C}(\boldsymbol{K}_1\cup\boldsymbol{K}_2)$．一方，逆の包含関係は，定理５系の証明の前半部分と定理８とから，直ちに得られる．‖

定義８　錐包・凸錐包

集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{S}$ を含むすべての凸錐((錐)) $\boldsymbol{K}_i\subset\boldsymbol{R}^n$ の族 $\{\boldsymbol{K}_i\,|\,\boldsymbol{i}\in\Lambda$ (添数集合)$\}$ の共通部分 $\mathcal{K}\boldsymbol{S}\equiv\cap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{S}_i$ を $\boldsymbol{S}$ の凸錐((錐))包という．

定理12　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ の凸錐((錐))包 $\mathcal{K}\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{S}$ を含む最小の凸錐((錐))である．

証明　定理９により明らかである．‖

定理13　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ の錐包 $\mathcal{K}\boldsymbol{S}$に対して，次の関係が成立する．

$$\mathcal{K}\boldsymbol{S}=\{\alpha\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S},\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}.$$

証明　上式右辺は $\boldsymbol{S}$ を含む錐であるから，定理12により，直ちに結論を得る．‖

系　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ の錐包 $\mathcal{K}\boldsymbol{C}$ は凸錐である．

証明　$\mathcal{K}\boldsymbol{C}$が凸集合であることを示せば十分である．さて，定理13に注目し，任意の $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in\mathcal{K}\boldsymbol{C}$ をそれぞれ，

$$\boldsymbol{y}_1=\beta_1\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{y}_2=\beta_2\boldsymbol{x}_2,\quad \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C},\quad \beta_1,\beta_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus},$$

とおくと，任意の$(\alpha_1,\alpha_2)\in\Delta_{\oplus}$ に対して，$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\equiv\delta>0$ ならば，

$$\alpha_1\boldsymbol{y}_1+\alpha_2\boldsymbol{y}_2=\delta(\alpha_1\beta_1\delta^{-1}\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\beta_2\delta^{-1}\boldsymbol{x}_2)\in\mathcal{K}\boldsymbol{C},$$

$\alpha_1\beta_1=\alpha_2\beta_2=0$ ならば，

$$\alpha_1\boldsymbol{y}_1+\alpha_2\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{0}\in\mathcal{K}\boldsymbol{C},$$

となって，結論を得る．‖

定理14 集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ の凸錐包 $\mathcal{K}\boldsymbol{S}$ に対して，次の関係が成立する．

$$\mathcal{K}\boldsymbol{S}=\{\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\,|\,\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{S},\alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus},k\in\boldsymbol{N}\}.$$

証明 〔3〕の定理16の証明法と同様にすればよい．||

定義9 双対錐・双対凸錐

集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，集合

$$\boldsymbol{S}^*\equiv\{\boldsymbol{z}\,|\,{}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}:\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle\leqq 0\}\subset\boldsymbol{R}^n$$

を $\boldsymbol{S}$ の双対錐という．双対錐は錐である．また，凸集合である双対錐を双対凸錐という．

定理15 錐 $\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

（i） $\boldsymbol{K}_1\subset\boldsymbol{K}_2 \Rightarrow \boldsymbol{K}_2^*\subset\boldsymbol{K}_1^*$.

（ii） $(\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2)^*=\boldsymbol{K}_1^*\cap\boldsymbol{K}_2^*$.

証明 （i）は明らかであるので，(ii)を示す．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{z}\in(\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2)^*\\
\Leftrightarrow\ &{}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{K}_2:\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle\leqq 0\\
\Leftrightarrow\ &{}^{\forall}\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{K}_2:\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}_1\rangle\leqq 0,\ \langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}_2\rangle\leqq 0\\
\Leftrightarrow\ &\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{K}_1^*\cap\boldsymbol{K}_2^*.\ ||
\end{aligned}$$

定理16 集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ とその凸錐包 $\mathcal{K}\boldsymbol{S}$，及び集合 $\boldsymbol{S}_i\subset\boldsymbol{R}^n$ の族 $\{\boldsymbol{S}_i|\boldsymbol{i}\in\Lambda$（添数集合）$\}$ に対して，次の関係が成立する．

（i） $\boldsymbol{S}^*=\mathcal{K}\boldsymbol{S}^*=(\mathcal{K}\boldsymbol{S})^*$.

（ii） $(\cup_{i\in\Lambda}\boldsymbol{S}_i)^*=\cap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{S}_i^*$.

証明 （i）．定理14を考慮すると，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{z}\in\mathcal{K}\boldsymbol{S}^*$ はそれぞれ，

$$\boldsymbol{x}=\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i,\quad \boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{S},\quad \alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\quad k\in\boldsymbol{N},$$

$$\boldsymbol{z}=\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{z}_i,\quad \boldsymbol{z}_i\in\boldsymbol{S}^*,\quad \alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\quad k\in\boldsymbol{N},$$

と書かれることに注目しておく．さて，

$$\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{S}^*\Leftrightarrow{}^{\forall}\boldsymbol{x}\in\mathcal{K}\boldsymbol{S}:\langle\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}\rangle\leqq 0\Leftrightarrow\boldsymbol{z}\in(\mathcal{K}\boldsymbol{S})^*.$$

よって，$\boldsymbol{S}^*=(\mathcal{K}\boldsymbol{S})^*$．一方，$\boldsymbol{S}^*\subset\mathcal{K}\boldsymbol{S}^*$ は明らかであるが，

$$z \in \mathcal{K}S^* \Rightarrow {}^{\forall}x \in S : \langle z, x \rangle \leqq 0 \Rightarrow z \in S^*.$$

よって，$S^* \supset \mathcal{K}S^*$，すなわち，$S^* = \mathcal{K}S^*$.

(ii). $z \in (\cup_{i \in \Lambda} S_i)^*$

$\Leftrightarrow\ {}^{\forall}x \in (\cup_{i \in \Lambda} S_i) : \langle z, x \rangle \leqq 0$

$\Leftrightarrow\ {}^{\forall}i \in \Lambda\, {}^{\forall}x \in S_i : \langle z, x \rangle \leqq 0$

$\Leftrightarrow\ {}^{\forall}i \in \Lambda : z \in S_i^*$

$\Leftrightarrow\ z \in \cap_{i \in \Lambda} S_i^*$. ||

§3　凸集合の位相的性質

注意 4　次の関係に留意しておく[1].

(i)　$x \in R^n$ と集合 $S \subset R^n$ に対して，

x は S の集積点 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon \in R_+ : [B(x;\varepsilon) \backslash \{x\}] \cap S \neq \emptyset$,

x は S の触点 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon \in R_+ : B(x;\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$,

x は S の内点 $\Leftrightarrow {}^{\exists}\varepsilon \in R_+ : B(x;\varepsilon) \subset S$,

x は S の外点 $\Leftrightarrow x \notin S$, i.e. $x \in S^c$,

x は S の境界点 $\Leftrightarrow {}^{\forall}\varepsilon \in R_+ : B(x;\varepsilon) \cap S \neq \emptyset$, $B(x;\varepsilon) \cap S^c \neq \emptyset$.

(ii)　集合 $S \subset R^n$ に対して，

S の閉包 $S^a \equiv S \cap \{x \mid x$ は S の集積点$\} \equiv \{x \mid x$ は S の触点$\}$,

S の内部または開核 $S^i \equiv \{x \mid x$ は S の内点$\}$,

S の外部または補集合 $S^c \equiv \{x \mid x$ は S の外点$\}$,

S の境界 $S^b \equiv \{x \mid x$ は S の境界点$\} = S^a \cap (S^c)^a \equiv S^a \cap S^{ca}$.

(iii)　集合 $S \subset R^n$ に対して，

S が (R^n の)開集合 $\Leftrightarrow S = S^i$,

S が (R^n の)閉集合 $\Leftrightarrow S = S^a$

$\Leftrightarrow {}^{\forall}$点列 $\langle x_i \rangle_{i \in N}, x_i \in S, \lim_{i \to \infty} x_i = x_0 : x_0 \in S$.

---

1)　cf. 文献〔2〕第6章.

(iv)　関数 $g : \boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{R}^{n}\to\boldsymbol{R}^{m}$ に対して，

g が $\boldsymbol{S}$ 上で連続

$\Leftrightarrow$ $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\ \forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}\ \exists\delta\in\boldsymbol{R}_{+} : g[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\delta)]\subset\boldsymbol{B}(g(\boldsymbol{x});\varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ $\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}\ \forall$ 点列 $\langle\boldsymbol{x}_i\rangle_{i\in\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{S}, \lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x} : g(\boldsymbol{x})=\lim_{i\to\infty}g(\boldsymbol{x}_i)$

$\Leftrightarrow$ 集合 $\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{a}}$, $\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{R}^{m}$ に対して，

$g^{-1}(\boldsymbol{T}_1)=[g^{-1}(\boldsymbol{T}_1)]^{\mathrm{a}}$, $g^{-1}(\boldsymbol{T}_2)=[g^{-1}(\boldsymbol{T}_2)]^{\mathrm{i}}$.

注意 5　$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^{n}$, $\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}$, $(\alpha_1, \alpha_2)\in\Delta_{\oplus}$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon)=\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{B}^{n}$.

(ii)　$\alpha_1\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_1;\varepsilon)+\alpha_2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_2;\varepsilon)=\boldsymbol{B}(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2;\varepsilon)$.

証明　(ii)は(i)により明らかであるので，(i)のみを示す．

$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon)\Leftrightarrow\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|<\varepsilon\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\varepsilon\boldsymbol{B}^{n}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{B}^{n}$. ||

注意 6　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^{n}$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$\boldsymbol{S}^{\mathrm{ic}}\equiv(\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}})^{\mathrm{c}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{ca}}\equiv(\boldsymbol{S}^{\mathrm{c}})^{\mathrm{a}}$.

(ii)　$\boldsymbol{S}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\backslash\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\equiv\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{ic}}$.

(iii)　$\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\cup\boldsymbol{S}^{\mathrm{b}}$, $\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{b}}=\emptyset$.

(iv)　$\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}=\bigcap_{\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}}(\boldsymbol{S}+\varepsilon\boldsymbol{B}^{n})$.

証明　(i)．$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}^{\mathrm{ic}}\Leftrightarrow\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon)\not\subset\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}$

$\Leftrightarrow\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon)\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{c}}\neq\emptyset\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}^{\mathrm{ca}}$.

(ii)．(i)と $\boldsymbol{S}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{ca}}$ とにより，明らかである．

(iii)．(i)と $\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}$ とにより，

$\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\cup\boldsymbol{S}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\cup(\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{ic}})=(\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\cup\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}})\cap(\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\cup\boldsymbol{S}^{\mathrm{ic}})=\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\cap\boldsymbol{R}^{n}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}$.

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\Rightarrow\exists\bar{\varepsilon}\in\boldsymbol{R}_{+} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\bar{\varepsilon})\subset\boldsymbol{S}$

$\Rightarrow\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\bar{\varepsilon})\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{c}}=\emptyset\Rightarrow\boldsymbol{x}\notin\boldsymbol{S}^{\mathrm{b}}$.

(iv)．右辺を $\boldsymbol{X}$ とおく．$\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\backslash\boldsymbol{S}=\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{S}$ を示せば十分である．

$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\backslash\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}\cap\boldsymbol{S}^{\mathrm{c}}$

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+} : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon)\cap\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{B}^{n})\cap\boldsymbol{S}\neq\emptyset, \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{S}^{\mathrm{c}}$

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}\ \exists\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}, \boldsymbol{z}\in\varepsilon\boldsymbol{B}^{n}, \boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0} : \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{S}^{\mathrm{c}}$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \setminus \boldsymbol{S} = \boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{S}^c$. ||

定義10 相対内点・相対内部・相対開集合，相対境界点・相対境界

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S} \subset \mathcal{A}\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n$ は，

$$\exists \varepsilon \in \boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon) \cap \mathcal{A}\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S},$$

ならば，$\boldsymbol{S}$ の（$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ における）相対内点であるという．$\boldsymbol{S}$ の相対内点の全体を $\boldsymbol{S}$ の（$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ における）相対内部または相対開核といい，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ と書くことにする．$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ であるとき，$\boldsymbol{S}$ は（$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ の）相対開集合であるという——したがって，$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ 自体は（$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ の）相対開集合である——．$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}$ は，$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}^{\mathrm{a}} \setminus \boldsymbol{S}^{\mathrm{I}}$ ならば，$\boldsymbol{S}$の（$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ における）相対境界点であるという．$\boldsymbol{S}$ の相対境界点の全体を $\boldsymbol{S}$ の（$\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ における）相対境界といい，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{B}}$ と書くことにする．明らかに，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}} \cup \boldsymbol{S}^{\mathrm{B}}$，$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}} \cap \boldsymbol{S}^{\mathrm{B}} = \emptyset$ である．

注意 7 集合 $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{I}} \subset \boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{S}^{\mathrm{a}} \subset (\mathcal{A}\boldsymbol{S})^{\mathrm{a}} = \mathcal{A}\boldsymbol{S}.$$

証明 最後の等号だけ示せば十分であるが，〔3〕の定理25と注意 4 (iii)により，直ちに結論を得る．||

注意 8 集合 $\boldsymbol{S}_1 \subset \boldsymbol{S}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{a}} \subset \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{a}}$，$\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{i}} \subset \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{i}}$ であるが，必ずしも $\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{I}} \subset \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{I}}$ではない．

証明 $\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{I}} \not\subset \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{I}}$ となる例を挙げておく．$\boldsymbol{S}_2$ を $\boldsymbol{R}^2$ の長方形，$\boldsymbol{S}_1$ を $\boldsymbol{S}_2$ の 1 辺とすると，$\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{I}} \neq \emptyset$，$\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{I}} \neq \emptyset$ であるが，$\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{I}} \cap \boldsymbol{S}_2^{\mathrm{I}} = \emptyset$ である．||

定理17 一般に，$r(\in \boldsymbol{N}, r \leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C} \subset \mathcal{A}\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{R}^n$ の（$\mathcal{A}\boldsymbol{C}$ における）相対内部 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ に関する定理を証明するには，その定理が $\boldsymbol{R}^r$ の r 次元凸集合 $\tilde{\boldsymbol{C}} \subset \mathcal{A}\tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{R}^r$ の（$\boldsymbol{R}^r$ における）内部 $\tilde{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{i}}$ に関して成立することを示せば十分である.[1)]

証明 $\boldsymbol{S} \subset \mathcal{A}\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n$，$\dim(\mathcal{A}\boldsymbol{S}) = r < n$，とする．今，$\boldsymbol{R}^n$ の r 次元線形部

1) したがって，一般性を失うことなく，$r=n$，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$，と見なして証明すればよい．

分空間 $\tilde{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{R}^r\times\{\boldsymbol{0}^{n-r}\}$，ただし，$\boldsymbol{0}^{n-r}$ は $\boldsymbol{R}^{n-r}$ の原点，を考えると，〔3〕の定理18，〔3〕の定理28，その系及び注意4 (iv)により，ある n 次正則行列 P とある $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^n$ によって定義される $\mathcal{AS}$ から $\tilde{\boldsymbol{L}}$ の上への1対1（全単射）かつ連続なアフィン変換 g

$$\begin{cases} g : \mathcal{AS}\to\tilde{\boldsymbol{L}},\ g(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\ g(\mathcal{AS})=\tilde{\boldsymbol{L}}, \\ g^{-1} : \tilde{\boldsymbol{L}}\to\mathcal{AS},\ g^{-1}(\boldsymbol{x})=P^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}),\ g^{-1}(\tilde{\boldsymbol{L}})=\mathcal{AS}, \end{cases}$$

が存在する．次に，射影 pr

$$\begin{cases} pr : \tilde{\boldsymbol{L}}\to\boldsymbol{R}^r,\ pr(\tilde{\boldsymbol{L}})=\boldsymbol{R}^r, \\ pr^{-1} : \boldsymbol{R}^r\to\tilde{\boldsymbol{L}},\ pr(\boldsymbol{R}^r)=\tilde{\boldsymbol{L}}, \end{cases}$$

を考えると，明らかに，pr は $\tilde{\boldsymbol{L}}$ から $\boldsymbol{R}^r$ の上への1対1（全単射）かつ連続な関数である．かくして，$\mathcal{AS}$ から $\boldsymbol{R}^r$ の上への1対1（全単射）連続関数 $pr\circ g$

$$\begin{cases} pr\circ g : \mathcal{AS}\to\boldsymbol{R}^r,\ (pr\circ g)(\mathcal{AS})=\boldsymbol{R}^r, \\ (pr\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ pr^{-1} : \boldsymbol{R}^r\to\mathcal{AS},\ (pr\circ g)^{-1}(\boldsymbol{R}^r)=\mathcal{AS}, \end{cases}$$

が存在する.[1] そしてこのことは，2つの位相空間 $\mathcal{AS}$ と $\boldsymbol{R}^r$ が全く同値な位相構造を持ち，$\mathcal{AS}((\boldsymbol{R}^r))$ の位相構造はそっくりそのまま $\boldsymbol{R}^r((\mathcal{AS}))$ の位相構造に移し変えられることを意味する.[2] ||

注意9　n 次行列 $M=[\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n]$, $\boldsymbol{m}_1,\cdots,\ \boldsymbol{m}_n\in\boldsymbol{R}^n$，に対して，次の関係が成立する．

（i）　$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n : \|M\boldsymbol{x}\|\leqq\|M\|\ \|\boldsymbol{x}\|.$

（ii）　Mが正則　$\Rightarrow$ $\boldsymbol{B}^n=\{M\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n,\|M\boldsymbol{x}\|<1\}.$

証明　（i）．シュワルツの不等式により，

$$\|M\boldsymbol{x}\|=(\textstyle\sum_{i=1}^n\langle\boldsymbol{m}_i,\boldsymbol{x}\rangle^2)^{\frac{1}{2}}\leqq(\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{m}_i\|^2\ \|\boldsymbol{x}\|^2)^{\frac{1}{2}}=\|M\|\ \|\boldsymbol{x}\|.$$

---

1)　$pr\circ g$ は $\mathcal{AS}$ から $\boldsymbol{R}^r$ への同(位)相関数である．$pr\circ g$ の連続性の証明については，cf. 文献〔9〕p. 131 の練習問題5の8．

2)　2つの位相空間 $\mathcal{AS}$ と $\boldsymbol{R}^r$ は同(位)相または位相同型であるという．詳細については，cf. 文献〔7〕pp. 183―185.

(ii). 右辺を $\boldsymbol{Y}$ とおく．集合 $\{\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n\}\subset\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底であるから，$\boldsymbol{R}^n$ は $\{\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n\}$ の線形包であることに注目すると，

$$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}^n \Leftrightarrow {}^{\exists}\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{y}=M\boldsymbol{x}, \|\boldsymbol{y}\|<1 \Leftrightarrow \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}. \|$$

定理18 $r(\in\boldsymbol{N}, r\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

(i) $\boldsymbol{C}^a$ は空でない凸集合である．

(ii) $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ は空でない凸集合である．

(iii) ${}^{\forall}\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^a\, {}^{\forall}(\alpha_1,\alpha_2)\in\Delta_{\oplus}, \alpha_1\in\boldsymbol{R}_+ : \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$.

証明 定理17を考慮して，一般性を失うことなく，$r=n$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^i$ と見なしてよいことに留意しておく．また，$\dim\boldsymbol{C}=r\in\boldsymbol{N}$ であるから，$\boldsymbol{C}\neq\emptyset$ は自明である．

(i). $\boldsymbol{C}^a\supset\boldsymbol{C}\neq\emptyset$. $\boldsymbol{C}^a$ が凸集合であることは，$\boldsymbol{C}$ の凸性，注意１，注意６(iv)，定理３(ii)及び定理２により，直ちに得られる．

(ii). $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ が凸であること．$\boldsymbol{C}$ の凸性と注意５(ii)により，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^i$ ならば，

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}\bar{\varepsilon}\in\boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_1;\bar{\varepsilon}),\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_2;\bar{\varepsilon})\subset\boldsymbol{C}\\ \Rightarrow\ &{}^{\forall}(\alpha_1,\alpha_2)\in\Delta_{\oplus} : \alpha_1\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_1;\bar{\varepsilon})+\alpha_2\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_2;\bar{\varepsilon})=\boldsymbol{B}(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2;\bar{\varepsilon})\subset\boldsymbol{C},\\ \Rightarrow\ &{}^{\forall}(\alpha_1,\alpha_2)\in\Delta_{\oplus} : \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{C}^i\neq\emptyset$ であること．定理７により，$\boldsymbol{C}$ は n 次元単体 $\mathcal{C}\boldsymbol{X}\equiv\mathcal{C}\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$, $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\in\boldsymbol{R}^n$ はアフィン独立，を含むから，$\boldsymbol{C}^i\supset(\mathcal{C}\boldsymbol{X})^i$ に留意すれば，$(\mathcal{C}\boldsymbol{X})^i\neq\emptyset$ を示せば十分である．〔３〕の定理26により，$\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0,\cdots,\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_0\}\equiv\{\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底となるから，$\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n$ によって定義される n 次行列 $M=[\boldsymbol{m}_1,\cdots,\boldsymbol{m}_n]$ は正則行列である．よって，注意９(ii)を見て，任意の $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{B}^n$, $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$, を

$$\boldsymbol{y}=M\boldsymbol{x},\ \ \boldsymbol{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'\in\boldsymbol{R}^n,\ \ \|M\boldsymbol{x}\|<1,$$

とおくと，注意９(i)により，

$$\mu\equiv\|M^{-1}\|>\|M^{-1}\|\,\|M\boldsymbol{x}\|\geqq\|MM^{-1}\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|\geqq\max_{1\leqq i\leqq n}|\xi_i|\equiv\xi$$

が成立している．さて，定理５により，

凸集合

$$\mathcal{C}\boldsymbol{X}=\{\textstyle\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\,|\,\alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\ \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1\}$$
$$=\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{m}_i+\boldsymbol{x}_0\,|\,\alpha_i\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\leqq 1\}$$
$$=\{\boldsymbol{M}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}_0\,|\,\boldsymbol{a}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)'\in\boldsymbol{R}_{\oplus}^{n},\ \textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\leqq 1\}$$

であるが，ここで，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathcal{C}\boldsymbol{X}$ を

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{x}_0,\quad \bar{\boldsymbol{a}}=(\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n)'\in\boldsymbol{R}_{+}^{n},\quad \textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i<1,$$

とおくと，$\bar{\boldsymbol{x}}\in(\mathcal{C}\boldsymbol{X})^{i}$ である．なぜなら，$\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+$ を

$$\varepsilon n\mu<\min(1-\textstyle\sum_{i=1}^{n}\bar{\alpha}_i,\bar{\alpha}_1,\cdots,\bar{\alpha}_n)$$

を満たすように選び，任意の $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon)=\bar{\boldsymbol{x}}+\varepsilon\boldsymbol{B}^n$ を

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{x}_0+\varepsilon\boldsymbol{y}=\boldsymbol{M}(\bar{\boldsymbol{a}}+\varepsilon\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}_0,$$
$$\bar{\boldsymbol{a}}+\varepsilon\boldsymbol{x}=(\bar{\alpha}_1+\varepsilon\xi_1,\cdots,\bar{\alpha}_n+\varepsilon\xi_n)',$$

とおくと，

$$\forall i(1\leqq i\leqq n):\bar{\alpha}_i+\varepsilon\xi_i\geqq\bar{\alpha}_i-\varepsilon\xi>\bar{\alpha}_i-\varepsilon n\mu>0,$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\bar{\alpha}_i+\varepsilon\xi_i)\leqq\sum_{i=1}^{n}(\bar{\alpha}_i+\varepsilon\xi)<\sum_{i=1}^{n}(\bar{\alpha}_i+\varepsilon\mu)<1,$$

となって，$\boldsymbol{z}\in\mathcal{C}\boldsymbol{X}$，すなわち，$\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{x}};\varepsilon)\subset\mathcal{C}\boldsymbol{X}$ となる．よって，$(\mathcal{C}\boldsymbol{X})^{i}\neq\emptyset$．

(iii)．$(\alpha_1,\alpha_2)\in\Delta_{\oplus}$，$\alpha_1\in\boldsymbol{R}_+$，は任意とする．$\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{C}^{i}$ であるから，注意5をも考慮すると，

$$\exists\bar{\delta}\in\boldsymbol{R}_+:\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}_1;\bar{\delta})=\boldsymbol{x}_1+\bar{\delta}\boldsymbol{B}^n\subset\boldsymbol{C}.$$

$\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^{a}$ であるから，注意6(iv)により，

$$\forall\gamma\in\boldsymbol{R}_+,\alpha_1\bar{\delta}>\alpha_2\gamma:\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}+\gamma\boldsymbol{B}^n.$$

よって，注意5と定理3(iii)により，

$$\forall\gamma\in\boldsymbol{R}_+,\alpha_1\bar{\delta}-\alpha_2\gamma\equiv\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+:\boldsymbol{B}(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2;\varepsilon)$$
$$=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\varepsilon\boldsymbol{B}^n\subset\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2(\boldsymbol{C}+\gamma\boldsymbol{B}^n)+\varepsilon\boldsymbol{B}^n$$
$$=\alpha_1(\boldsymbol{x}_1+\bar{\delta}\boldsymbol{B}^n)+\alpha_2\boldsymbol{C}\subset\alpha_1\boldsymbol{C}+\alpha_2\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}.$$

よって，$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{C}^{i}$．||

系1 $r(\in\boldsymbol{N},r\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}=\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}.$$

証明 $r=n$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$, と見なしておく．$\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}$ であるから，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}$. 一方，$\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}$ と注意7により，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}\subset(\mathcal{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{a}}=\mathcal{A}\boldsymbol{C}$ であるから，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}\subset\mathcal{A}(\mathcal{A}\boldsymbol{C})=\mathcal{A}\boldsymbol{C}$. よって，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}$. 次に，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{C}$ であるから，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}$. よって，あとは $\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ が示されれば，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}(\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}})=\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ となって，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ が主張されるので，以下，$\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ を示す．定理18(ii)を念頭に置き，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\neq\emptyset$ を任意所与とし，更に，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$ は任意，α_1, $\alpha_2\in\boldsymbol{R}_+$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, は任意所与としておく．定理18(iii)により，$\alpha_1\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha_2\boldsymbol{x}\equiv\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$, すなわち，$\boldsymbol{x}=\alpha_2^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}-\alpha_1\alpha_2^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}$ であるから，$\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$. よって，$\boldsymbol{C}\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$.||

系2 $r(\in\boldsymbol{N}, r\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ の相対内点 $\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ と $\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{x}_2\neq\boldsymbol{x}_1$, に対して，$\boldsymbol{x}_1$ を端点とする $\boldsymbol{x}_2$ 方向への射線

$$\boldsymbol{Y}=\{\alpha(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{x}_1\,|\,\alpha\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\}$$

上には，$\boldsymbol{C}$ の境界点はたかだか1つしか存在しない．

証明 $r=n$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{B}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{b}}$, と見なしておく．$\boldsymbol{Y}$ 上に $\boldsymbol{C}^{\mathrm{b}}$ の相異なる2つの境界点 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2\in\boldsymbol{Y}\cap\boldsymbol{C}^{\mathrm{b}}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}$, $\boldsymbol{b}_1\neq\boldsymbol{b}_2$, が存在すれば矛盾することを示そう．

$$\boldsymbol{b}_1=\alpha_1(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{b}_2=\alpha_2(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+\boldsymbol{x}_1,\quad \alpha_1,\alpha_2\in\boldsymbol{R}_{\oplus},\quad \alpha_2>\alpha_1,$$

とおくと，$\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$, $0\leqq\alpha_1\alpha_2^{-1}<1$ であることから，定理18(iii)により，

$$\boldsymbol{b}_1=\alpha_1\alpha_2^{-1}\boldsymbol{b}_2+(1-\alpha_1\alpha_2^{-1})\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}},\ \text{i.e.}\ \boldsymbol{b}_1\notin\boldsymbol{C}^{\mathrm{b}}.\ ||$$

定理19 $r(\in\boldsymbol{N}, r\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

（i） $\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{Ia}}\equiv(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{a}}$.

（ii） $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{aI}}\equiv(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})^{\mathrm{I}}$.

証明 定理17及び定理18(ii)を考慮して，一般性を失うことなく，$r=n$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\neq\emptyset$, と見なしてよいことに留意しておく．

（i）. $\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{C}$ であるから，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{ia}}\equiv\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\cup\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ の集積点$\}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}\equiv\boldsymbol{C}\cup\{\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{C}$ の集積点$\}$. 一方，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}$ ならば，定理18(iii)により，

$$\forall \bar{\boldsymbol{x}}\in \boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\,\forall \nu\in \boldsymbol{N}\backslash\{1\}:(1-\nu^{-1})\boldsymbol{x}+\nu^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}\in \boldsymbol{C}^{\mathrm{i}},$$

であるから，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{ia}}$ となり，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{ia}}$.

(ii). $\boldsymbol{C}^{\mathrm{ai}}\supset\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ は自明であるから，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{ai}}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ を示せばよいが，そのために，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ は任意所与，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{ai}}$，$\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$，は任意として，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}$ を示す．注意 4，注意 5 及び定理 3 (iii)により，

$$\exists\bar{\varepsilon}\in\boldsymbol{R}_{+}:\boldsymbol{x}+2\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}},\ \bar{\boldsymbol{x}}+2\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n}\subset\boldsymbol{C},$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}+\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{ai}}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}},\ \bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n}\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{C}.$$

ここで，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}_{+}$，$\beta<\alpha<1$ を $\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n}$ を満たすように選ぶと，定理18(iii)と定理 3 (iii)により，

$$\beta\bar{\boldsymbol{x}}+(1-\beta)\boldsymbol{x}-\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})=(1+\alpha-\beta)\boldsymbol{x}-(\alpha-\beta)\bar{\boldsymbol{x}}\equiv\hat{\boldsymbol{x}}$$
$$\in\beta\bar{\boldsymbol{x}}+(1-\beta)\boldsymbol{x}+\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n}=\beta(\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n})+(1-\beta)(\boldsymbol{x}+\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^{n})\subset\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}=(1+\alpha-\beta)^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}+(\alpha-\beta)(1+\alpha-\beta)^{-1}\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}.\ \|$$

系 1　空でない凸集合 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)(iii)は同値である．

(i)　$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}$.

(ii)　$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{I}}$.

(iii)　$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{I}}\subset\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}$.

証明　$\dim\boldsymbol{C}_1=\dim\boldsymbol{C}_2=0$ のとき，すなわち，$\boldsymbol{C}_1$ と $\boldsymbol{C}_2$ が共にただ 1 つの要素からなる集合のときには自明であるから，$\dim\boldsymbol{C}_1,\dim\boldsymbol{C}_2\in\boldsymbol{N}$ としておく．

(i) $\Leftrightarrow$ (ii)．定理19により，明らかである．

(i)(ii) $\Rightarrow$ (iii)．注意 7 により，

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{I}}\subset\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i)．定理19により，

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{Ia}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}\subset\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}\subset(\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}})^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}.\ \|$$

系 2　$r(\in\boldsymbol{N},r\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ と（$\boldsymbol{R}^n$ の）開集合 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{C}^{a}\cap\boldsymbol{S}\neq\emptyset\ \Rightarrow\ \boldsymbol{C}^{I}\cap\boldsymbol{S}\neq\emptyset.$$

証明　定理19及び注意4により，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{a}\cap\boldsymbol{S}=\boldsymbol{C}^{Ia}\cap\boldsymbol{S}^{I}$ ならば，

$$\exists\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}:\boldsymbol{S}\supset\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon)\supset\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x};\varepsilon)\cap\boldsymbol{C}^{I}\neq\emptyset.\ \|$$

系3　$r_1(\in\boldsymbol{Z},r_1\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}_1\subset\boldsymbol{R}^n$ と $r_2(\in\boldsymbol{N},r_2\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{C}_1\subset\boldsymbol{C}_2^{B}\ \Rightarrow\ r_1<r_2.$$

証明　$\boldsymbol{C}_1^{I}\subset\boldsymbol{C}_1\subset\boldsymbol{C}_2^{B}\subset\boldsymbol{C}_2^{a}$ であるから，定理18系1により，$\mathcal{A}\boldsymbol{C}_1\subset\mathcal{A}\boldsymbol{C}_2^{a}=\mathcal{A}\boldsymbol{C}_2$. よって，〔3〕の注意2及び〔3〕の定理18により，$r_1\leqq r_2$. 以下，$r_2=n$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}_2^{I}=\boldsymbol{C}_2^{i}\neq\emptyset$，と見なし，$r_1=n$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}_1^{I}=\boldsymbol{C}_1^{i}\neq\emptyset$, $\boldsymbol{C}_1^{I}\subset\boldsymbol{C}_1\subset\boldsymbol{C}_2^{B}=\boldsymbol{C}_2^{a}\backslash\boldsymbol{C}_2^{I}\subset\boldsymbol{C}_2^{a}$, ならば，矛盾することを示す．$\boldsymbol{C}_1^{I}\subset\boldsymbol{C}_2^{a}\backslash\boldsymbol{C}_2^{I}$ であるから，$\boldsymbol{C}_1^{I}\cap\boldsymbol{C}_2^{I}=\emptyset$. よって，定理19とその系により，$\boldsymbol{C}_1^{I}\cap\boldsymbol{C}_2^{Ia}=\boldsymbol{C}_1^{I}\cap\boldsymbol{C}_2^{a}=\emptyset$. かくして，$\emptyset\neq\boldsymbol{C}_1^{I}\not\subset\boldsymbol{C}_2^{a}$ となる，これは $\boldsymbol{C}_1^{I}\subset\boldsymbol{C}_2^{a}$ と矛盾する．‖

定理20　$r(\in\boldsymbol{N},r\leqq n)$ 次元凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ と $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)(iii)は同値である．

(i)　$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{I}$.

(ii)　$\exists\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}\boldsymbol{C}\forall\alpha\in\boldsymbol{R}_{+},\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\varepsilon\boldsymbol{B}^n:\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}.$

(iii)　$\forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}\boldsymbol{C}\exists\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}:\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}.$

証明　(i)⇒(ii)⇒(iii)は自明であるので，(iii)⇒(i)を示す．定理18(ii)を考慮して，$\tilde{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{I}\neq\emptyset$ を任意所与とする．(iii)により，ある $\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}$ に対して，$(1+\alpha)\bar{\boldsymbol{x}}-\alpha\tilde{\boldsymbol{x}}\equiv\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}$. よって，定理18(iii)により，$\bar{\boldsymbol{x}}=(1+\alpha)^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}+\alpha(1+\alpha)^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{I}$. ‖

系1　n 次元凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ と $\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{i}$.

(ii)　$\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\exists\alpha\in\boldsymbol{R}_{+}:\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}.$

証明　定理20における $\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ を改めて $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ とおけばよい．‖

系2　$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{R}^n$ と $\varepsilon\in\boldsymbol{R}_{+}$ に対して，有限個の $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^n$ を適当に選ぶ

ことによって，$\bar{x}$が凸包 $\mathcal{C}\{x_1, \cdots, x_k\}\subset B(\bar{x};\varepsilon)$ の内点になるようにできる．

証明 $e_1, \cdots, e_n\subset R^n$ は単位ベクトルとし，

$$S\equiv\mathcal{C}\{\bar{x}+\varepsilon e_1, \cdots, \bar{x}+\varepsilon e_n, \bar{x}-\varepsilon e_n, \cdots, \bar{x}-\varepsilon e_n\}$$

とおく．系1の結果に注目すれば，

① $\forall x\in R^n\ \exists\alpha\in R_+ : \bar{x}+\alpha x\in S$

を示せば，$\bar{x}\in S^1$ となって，結論を得るので，以下では，①を示す．なお，便宜上，記号 $\sum_{i=1}^n$ を単に$\sum$と書くことにする．任意所与の $x\in R^n$ は，

$$x=\varepsilon\sum\gamma_i e_i,\quad \gamma_i\in R \text{ は定数},$$

と書けることに留意して，連立方程式

$$② \begin{cases} \alpha\gamma_i=\zeta_i-\eta_i, & i=1, \cdots, n, \\ \sum(\zeta_i+\eta_i)=1, & \alpha\in R_+,\ \zeta_i, \eta_i\in R_\oplus, \end{cases}$$

を考える．もし②が解 α^*，ζ_i^*，η_i^* を持つならば，

$$\bar{x}+\alpha^* x=\bar{x}+\varepsilon\alpha^*\sum\gamma_i e_i=\sum(\zeta_i^*+\eta_i^*)\bar{x}+\varepsilon\sum(\zeta_i^*-\eta_i^*)e_i$$
$$=\sum\zeta_i^*(\bar{x}+\varepsilon e_i)+\sum\eta_i^*(\bar{x}-\varepsilon e_i)$$

となって，確かに①が成立する．ところで，$\sum\gamma_i\equiv\theta\in R$とおき，

$$\alpha\max(|\theta|, |\theta+2n\gamma_1|, \cdots, |\theta+2n\gamma_n|)<1$$

を満たす1つの $\alpha\in R_+$をα^* と定めた後に，

$$\eta_i^*=(1-\sum\zeta_i^*)/n=(1-\alpha^*\theta)/(2n),\ \text{ただし，}\ \sum\zeta_i^*=(1+\alpha^*\theta)/2,$$
$$\zeta_i^*=\eta_i^*+\alpha^*\gamma_i=(1-\alpha^*\theta-2n\alpha^*\gamma_i)/(2n)$$

とおくと，この α^*，ζ_i^*，η_i^* は②の解となっている．最後に，任意の $y\in S$ を

$$y=\bar{x}+\varepsilon\sum(\zeta_i-\eta_i)e_i,\quad \zeta_i, \eta_i\in R_\oplus,\quad \sum(\zeta_i+\eta_i)=1$$

と表すと，

$$\|y-\bar{x}\|=\varepsilon\sqrt{\sum(\zeta_i-\eta_i)^2}\leqq\varepsilon\sqrt{\sum(\zeta_i^2+\eta_i^2)}\leqq\varepsilon\sqrt{\{\sum(\zeta_i+\eta_i)\}^2}=\varepsilon$$

であるから，$y\in B(\bar{x};\varepsilon)$. ‖

定理21 凸集合 $C_i\subset R^n$ の任意の族 $\{C_i\,|\,i\in\Lambda(\text{添数集合})\}$ に対して，

$\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ ならば，次の関係が成立する．

（i） $(\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{a}}=\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{a}}=(\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}})^{\mathrm{a}}$.

（ii） Λ が有限集合ならば，$(\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{I}}=\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$.

証明 以下においては，$\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}=\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$ というように，$i\in\Lambda$ を省略する．

（i）．$\boldsymbol{x}\in\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{a}}$ は任意，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$ は任意所与として，

$$\boldsymbol{z}_\alpha=(1-\alpha)\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{x},\ \ \alpha\in\boldsymbol{R}_\oplus,\ \ \alpha<1,$$

とおくと，定理18(iii)により，任意の $i\in\Lambda$ に対して $\boldsymbol{z}_\alpha\in\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$，すなわち，$\boldsymbol{z}_\alpha\in\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$ であるから，注意4(iii)により，$\boldsymbol{x}=\lim_{\alpha\uparrow1}\boldsymbol{z}_\alpha\in(\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}})^{\mathrm{a}}$ となり，$\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{a}}\subset(\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}})^{\mathrm{a}}$．一方，注意7と〔3〕の定理6(A. 2)により，$(\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}})^{\mathrm{a}}\subset(\bigcap\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{a}}\subset(\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{a}})^{\mathrm{a}}=\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{a}}$.

(ii)．（i）の結果と定理19系1(iii)により，$(\bigcap\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{I}}\subset\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$ であるから，後は逆の包含関係を示せばよい．任意の $\bar{\boldsymbol{x}}\in\bigcap\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$ に対して，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{I}}$，$i\in\Lambda$，であるから，定理20により，任意の $i\in\Lambda$ に対して，

$$\exists\bar{\varepsilon}_i\in\boldsymbol{R}_+\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathscr{A}\boldsymbol{C}_i\ \forall\alpha_i\in\boldsymbol{R}_+,\ \alpha_i(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\bar{\varepsilon}_i\boldsymbol{B}^n:\ \bar{\boldsymbol{x}}+\alpha_i(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}_i,$$

であるが，Λ は有限集合であるから，$\min_{i\in\Lambda}\bar{\varepsilon}_i=\bar{\varepsilon}$ とおくと，

$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathscr{A}(\bigcap\boldsymbol{C}_i)\subset\mathscr{A}\boldsymbol{C}_i\ \forall\alpha_i\in\boldsymbol{R}_+,\ \alpha_i(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\bar{\varepsilon}\boldsymbol{B}^n:$$
$$\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha_i(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})\in\bigcap\boldsymbol{C}_i.$$

よって，再び定理20により，$\bar{\boldsymbol{x}}\in(\bigcap\boldsymbol{C}_i)^{\mathrm{I}}$. ||

系1 凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ とアフィン集合 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}\cap\boldsymbol{A}\neq\emptyset$ ならば，次の関係が成立する．

（i） $(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}$.

（ii） $(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C})^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$.

証明 $\boldsymbol{A}$ はアフィン集合であるから，定義10と注意7により，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{a}}$. よって，定理21により，直ちに結論を得る．||

系2 凸集合 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}$，$\boldsymbol{C}_2\not\subset\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{B}}$，ならば，$\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{I}}\subset\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{I}}$ で

ある.[1]

証明　$C_2=\emptyset$ あるいは C_2 がただ1つの要素からなる集合である場合には自明であるので，$\dim C_2=r\in N$，$r\leqq n$，としておく．まず，$C_1^{\mathrm{I}}\cap C_2^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$ である．なぜなら，$C_2\subset C_1^{\mathrm{a}}$ と注意7により，$C_2^{\mathrm{I}}\subset C_2\subset C_1^{\mathrm{a}}=C_1^{\mathrm{I}}\cap C_1^{\mathrm{B}}$ であるが，定理19と $C^{\mathrm{B}}=C^{\mathrm{a}}\cap C^{\mathrm{ca}}$ が閉集合であることを考え合わせると，$C_1^{\mathrm{I}}\cap C_2^{\mathrm{I}}=\emptyset$ ならば，$C_2^{\mathrm{I}}\subset C_1^{\mathrm{B}}$，すなわち，$C_2\subset C_2^{\mathrm{a}}=C_2^{\mathrm{Ia}}\subset C_1^{\mathrm{Ba}}=C_1^{\mathrm{B}}$ となり，$C_2\not\subset C_1^{\mathrm{B}}$ に反する．よって，定理21及び定理19により，$C_2^{\mathrm{I}}=(C_1^{\mathrm{a}}\cap C_2)^{\mathrm{I}}=C_1^{\mathrm{aI}}\cap C_2^{\mathrm{I}}=C_1^{\mathrm{I}}\cap C_2^{\mathrm{I}}\subset C_1^{\mathrm{I}}$. ||

注意10　(i)　定理21は，$\cap_{i\in\Lambda}C_i^{\mathrm{I}}=\emptyset$ ならば，一般に成立しない.[2]

(ii)　定理21(ii)は，Λが有限集合でないならば，一般に成立しない．

証明　$C_2=R^2$ の長方形，$C_1=C_2$ の1辺，とすると，$C_1^{\mathrm{I}}\cap C_2^{\mathrm{I}}=\emptyset$，$(C_1\cap C_2)^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$，となり，定理21が成立しない．また，$\Lambda=R_{\oplus}$，$C_i=[0,1+i]\subset R$，$i\in\Lambda$，とすると，$(\cap_{i\in\Lambda}C_i)^{\mathrm{I}}=(0,1)$，$\cap_{i\in\Lambda}C_i^{\mathrm{I}}=(0,1]$，となり，定理21(ii)が成立しない. ||

定理22　凸集合 $C_1\subset R^n$，$C_2\subset R^m$，に対して，次の関係が成立する.[3]

(i)　$(C_1\times C_2)^{\mathrm{a}}=C_1^{\mathrm{a}}\times C_2^{\mathrm{a}}$.

(ii)　$(C_1\times C_2)^{\mathrm{I}}=C_1^{\mathrm{I}}\times C_2^{\mathrm{I}}$.

証明　(i)．$B^n\subset R^n$，$B^m\subset R^m$，$B^{n+m}\subset R^{n+m}$ はそれぞれ単位開球とする．$B^{n+m}\subset B^n\times B^m\subset 2B^{n+m}$ であることに注目すると，

$$
\begin{aligned}
&x=(y',z')'\in(C_1\times C_2)^{\mathrm{a}}\subset R^{n+m}\\
\Leftrightarrow\ &\forall\varepsilon\in R_+:\ \emptyset\neq(x+\varepsilon B^{n+m})\cap(C_1\times C_2)\\
\Leftrightarrow\ &\forall\delta\in R_+:\ \emptyset\neq[(y+\delta B^n)\times(z+\delta B^m)]\cap(C_1\times C_2)\\
\Leftrightarrow\ &\forall\delta\in R_+:\ (y+\delta B^n)\cap C_1\neq\emptyset,\ (z+\delta B^m)\cap C_2\neq\emptyset
\end{aligned}
$$

---

1)　cf. 注意8.

2)　cf. 注意8.

3)　証明過程から分かるように，実は，この定理は任意の集合 $S_1\subset R^n$，$S_2\subset R^m$，に対して成立する．

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')'\in \boldsymbol{C}_1^a\times \boldsymbol{C}_2^a\subset \boldsymbol{R}^{n+m}.$

(ii). $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ のどちらか一方が空集合かまたはただ1つの要素からなる集合である場合には自明であるので，$\dim \boldsymbol{C}_1=r_1\in \boldsymbol{N}$, $r_1\leqq n$, $\dim \boldsymbol{C}_2=r_2\in \boldsymbol{N}$, $r_2\leqq m$, とし，更に，定理17及び定理18(ii)を考慮して，一般性を失うことなく，$r_1=n$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{i}}\neq\emptyset$, $r_2=m$, $\mathcal{A}\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{i}}\neq\emptyset$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{C}_1\times \boldsymbol{C}_2)=\boldsymbol{R}^{n+m}$, $(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{I}}=(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{i}}\neq\emptyset$ と見なしてよいことに留意すると，

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')'\in(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{R}^{n+m}$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{B}^{n+m}\subset\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists\delta\in\boldsymbol{R}_+ : \boldsymbol{y}+\delta\boldsymbol{B}^{n}\subset\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{z}+\delta\boldsymbol{B}^{m}\subset\boldsymbol{C}_2$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')'\in\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{i}}\subset\boldsymbol{R}^{n+m}. \|$$

定理23　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ と線形変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$[g(\boldsymbol{C})]^a\supset g(\boldsymbol{C}^a)$.[1)]

(ii)　$[g(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})$.

証明　$\boldsymbol{C}$ が空集合かまたはただ1つの要素からなる集合である場合，及び凸集合 $g(\boldsymbol{C})$ がただ1つの要素からなる集合である場合には自明であるので，定理18(ii)を考慮して，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$, $[g(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}\neq\emptyset$, としておく．

(i). 任意の $\boldsymbol{y}\in g(\boldsymbol{C}^a)$ を $\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^a$ とおく．注意4(i)(ii)と注意5により，

$$\forall\nu\in\boldsymbol{N} : (\boldsymbol{x}+\nu^{-1}\boldsymbol{B}^n)\cap\boldsymbol{C}\neq\emptyset,$$
$$\therefore \quad \forall\nu\in\boldsymbol{N}\ \exists\boldsymbol{a}_\nu\in\boldsymbol{B}^n : \boldsymbol{x}+\nu^{-1}\boldsymbol{a}_\nu\equiv\boldsymbol{x}_\nu,\ \lim_{\nu\to\infty}\boldsymbol{x}_\nu=\boldsymbol{x}.$$

更に，〔3〕の定理14と注意4(iv)により，g は $\boldsymbol{R}^n$ 上で連続であるから，

$$\lim_{\nu\to\infty}g(\boldsymbol{x}_\nu)=g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y},\ g(\boldsymbol{x}_\nu)\in g(\boldsymbol{C}).$$

よって，注意4(iii)により，$\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\in[g(\boldsymbol{C})]^a$.

(ii). (i)の結果，定理19及び注意7により，

1)　証明過程から分かるように，任意の集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して成立する．

$$g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})\subset g(\boldsymbol{C})\subset g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})=g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{Ia}})\subset[g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})]^{\mathrm{a}}.$$

$$\therefore\quad [g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})]^{\mathrm{a}}\subset[g(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\subset[[g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})]^{\mathrm{a}}]^{\mathrm{a}}=[g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})]^{\mathrm{a}}.$$

よって，$[g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})]^{\mathrm{a}}=[g(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}$ となり，定理19系 1 (iii)により，$[g(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}\subset g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})$. 一方，任意の $\bar{\boldsymbol{y}}\in g(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})$ を，$\bar{\boldsymbol{y}}=g(\bar{\boldsymbol{x}})$，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$，とおくと，定理20により，任意の $\boldsymbol{y}\in[g(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}$ に対して，ある $\hat{\alpha}\in\boldsymbol{R}_+$ が存在して，$(1+\hat{\alpha})\bar{\boldsymbol{x}}-\hat{\alpha}\boldsymbol{x}\equiv\hat{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{C}$，$g(\hat{\boldsymbol{x}})=\hat{\boldsymbol{y}}\in g(\boldsymbol{C})$，となる．よって，定理18(iii)により，

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{y}}=g(\bar{\boldsymbol{x}})&=g[(1+\hat{\alpha})^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\alpha}(1+\hat{\alpha})^{-1}\boldsymbol{x}]\\&=(1+\hat{\alpha})^{-1}g(\hat{\boldsymbol{x}})+\hat{\alpha}(1+\hat{\alpha})^{-1}g(\boldsymbol{x})\\&=(1+\hat{\alpha})^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}+\hat{\alpha}(1+\hat{\alpha})^{-1}\boldsymbol{y}\in[g(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}.\ \|\end{aligned}$$

系 1　凸集合 $\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{a}}\supset\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{a}}+\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{a}}$.

(ii)　$(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{I}}+\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{I}}$.

証明　Eは n 次単位行列，Aは $(n,2n)$ 型行列〔E,E〕とし，関数 $g:\boldsymbol{R}^{2n}\to\boldsymbol{R}^n$ を，

$$g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=A(\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')'=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},\quad g(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)=\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2,$$

によって定義すると，〔3〕の定理14により，g は線形変換であるから，定理22及び定理23により，直ちに結論を得る．‖

系 2　凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n$ と $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$(\alpha\boldsymbol{C})^{\mathrm{a}}=\alpha\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}$.

(ii)　$(\alpha\boldsymbol{C})^{\mathrm{I}}=\alpha\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$.

証明　(i)は明らかであり，(ii)は，線形変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ を，$g(\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{x}$，$g(\boldsymbol{C})=\alpha\boldsymbol{C}$，によって定義すれば，定理23から直ちに得られる．

定理24　線形変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ と凸集合 $\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^m$ に対して，

$$g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n\,|\,\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}\}\neq\emptyset,$$

ならば，次の関係が成立する．

(i)　$[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})$.

(ii)　$[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})$.

証明　最初に，集合 $\boldsymbol{D}$，g のグラフ $\boldsymbol{G}$，射影 pr をそれぞれ，

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m,\ \ \boldsymbol{G}=\{(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')'\mid\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\}\subset\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m,$$
$$pr:\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^n,\ \ pr(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x},$$

とすると，$\boldsymbol{G}$ は線形部分空間，したがって，アフィン集合であり，

$$g^{-1}(\boldsymbol{C})=pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D}),\ \ g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})=pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D}^{\mathrm{I}}),\ \ g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})=pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D}^{\mathrm{a}})$$

であることに注目しておく．さて，定理22及び定理21系１により，任意の $\boldsymbol{x}\in g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})$ とそれに対応する $\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}$ に対して，

$$(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')'\in\boldsymbol{G}\cap(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})=\boldsymbol{G}\cap(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{C})^{\mathrm{I}}=(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D})^{\mathrm{I}}$$

であるから，$(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D})^{\mathrm{I}}\fallingdotseq\emptyset$．よって，定理23と定理21系１により，

$$\begin{aligned}[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}&=[pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D})]^{\mathrm{I}}=pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D})^{\mathrm{I}}\\&=pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D}^{\mathrm{I}})=g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}),\\[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}&=[pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D})]^{\mathrm{a}}\supset pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D})^{\mathrm{a}}\\&=pr(\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{D}^{\mathrm{a}})=g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})\end{aligned}$$

である．後は，$[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\subset g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})$ を示せばよいが，〔３〕の定理14と注意４(iv)により，g は $\boldsymbol{R}^n$ 上で連続関数であるから，再び注意４(iv)により，

$$[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}\subset[g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})]^{\mathrm{a}}=g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}).\|$$

注意11　定理24は，$g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})=\emptyset$ ならば，一般に成立しない．

証明　$n=m=2$ として，線形変換 $g:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^2$ を，

$$g(\xi_1,\xi_2)=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_1\\0\end{pmatrix}\in\boldsymbol{C}^{\mathrm{B}}$$

によって定義する．$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{R}^2_+$，したがって，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}^2_{\oplus}$ ならば，$g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}})=\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}\fallingdotseq[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{a}}=\emptyset$ となり，定理24(ｉ)が成立しない．また，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{a}}=\boldsymbol{R}^2_{\oplus}$，したがって，$\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{R}^2_+$ ならば，$[g^{-1}(\boldsymbol{C})]^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}\fallingdotseq g^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{I}})=\emptyset$ となり，定理24(ii)が成立しない．||

参 考 文 献

〔1〕 Avriel, M., *Nonlinear Programming : Analysis and Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1976.

〔2〕 福尾洋一『最適経済成長理論』有斐閣，1978年.

〔3〕 福尾洋一「アフィン集合」『経済学論究（関西学院大学)』**33**(**3**) (1979), pp. 97—122.

〔4〕 今野　浩・山下　浩『非線形計画法』日科技連，1978年.

〔5〕 久志本　茂『最適化問題の基礎』森北出版，1979年.

〔6〕 Mangasarian, O. L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.（関根智明訳『非線形計画法』培風館，1972年.）

〔7〕 松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店，1968年.

〔8〕 Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

〔9〕 竹之内　脩『トポロジー』広川書店，1962年.