アフィン集合

福尾洋一

§0 序

経済学のある領域においては，数理計画法の分析手法が重要な役割を演じてきた．そして，今後もこの傾向がますます増大するように思われる．数理計画法の一分野である線形計画法については，その高度な実用性のゆえに，多くの人々がその重要性を認識している．しかし，線形計画法はその線形特性のゆえに限界がある．したがって，更に高次の目標は，非線形計画法の理論・応用両面における一層の発展ということであるように思える．

我々は，以上の認識の下に，非線形計画法の理論を経済分析の用具として利用するための手掛かりを探ろうとしている．

ところで，非線形計画法の理論の基礎概念に周知の凸集合と凸関数がある．表題のアフィン集合は凸集合と密接な関係を持つ集合である．本稿と続く稿において，我々は，線形部分空間，アフィン集合，凸集合，錐・凸錐，凸関数といった非線形計画法の理論の基礎概念を統一的に理解・整理することに努めたい．本稿で導出される諸定理はいずれも文献〔1〕—〔5〕その他に見られる基礎的なものばかりであり，新しい成果はないことを断っておく．

なお，本論に入るに先立って，幾つかの記号を約束しておく．$\boldsymbol{R}$ は実数全体，$\boldsymbol{Z}$ は非負整数全体，$\boldsymbol{N}$ は自然数全体，$n(\in\boldsymbol{N})$ 個の $\boldsymbol{R}$ の直積 $\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}$ (n 個) 及び $m(\in\boldsymbol{N})$ 個の $\boldsymbol{R}$ の直積 $\boldsymbol{R}^m=\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}$($m$個) はそれぞれユークリッド（・ベクトル）空間とする．ベクトルはすべて列ベクトルとする．

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)'$, $\boldsymbol{y}=(\eta_1,\cdots,\eta_n)'$ に対して，その内積 $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle$ 及びノルム $\|\boldsymbol{x}\|$ がそれぞれ次のように定義されている．

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \ , \quad \|\boldsymbol{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

集合 $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ に対して,

$$\alpha \boldsymbol{S}_1 = \{\alpha \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}_1\}, \quad \boldsymbol{S}_1 \pm \boldsymbol{S}_2 = \{\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}_1, \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S}_2\} \quad \text{(複号同順)}$$

と定義し，それぞれ，$\boldsymbol{S}_1$ のスカラー倍，集合和・集合差という．$\boldsymbol{S}_2$ が1点からなる集合 $\{\boldsymbol{y}\}$ である場合には，$\boldsymbol{S}_1 \pm \{\boldsymbol{y}\}$ を特に $\boldsymbol{S}_1 \pm \boldsymbol{y}$ と書くことにする．

最後に,「∀～：——」は「任意の～に対して，——」,「∀～∀～：——」は「任意の～と任意の～に対して，——」,「∃～：——」は「ある～が存在して，——」,「∀～∃～：——」は「任意の～に対して それぞれある～が存在して，——」等々，と読む．

§1　線形部分空間

定義1　1次結合

$k(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，形式

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \ , \quad \alpha_i \in \boldsymbol{R}$$

を $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ の1次結合という．ベクトル $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ が k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ のある1次結合として表すことができるということは，

$$\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \boldsymbol{R} \ : \ \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$$

と表すことができるということである．このことを，しばしば，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \ , \quad \alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R} \ ^{1)}$$

と書くことにする．

定義2　1次従属・1次独立

$k(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ は，

$$\exists\ \text{少くとも1つは0でない}\ \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \boldsymbol{R} \ : \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$$

1) $\alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}$ とは，α_i がベクトル $\boldsymbol{x}$ に応じて定まるということを意味する．以下において，特に断ることなしに，類似の表記法をしばしば採用する．

ならば，1次従属であるといい，1次従属でないとき，すなわち，

$$\forall \text{少くとも1つは0でない} \ \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \boldsymbol{R} \ : \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$$

ならば，あるいは，対偶をとって，

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \ , \quad \alpha_i \in \boldsymbol{R} \ \Rightarrow \ \forall \alpha_i (1 \leqq i \leqq k) \ : \ \alpha_i = 0$$

ならば，1次独立であるという．$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が1次従属であることを，しばしば，

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \ , \quad \alpha_i \in \boldsymbol{R} \ , \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \neq \boldsymbol{0}$$

と書くことにする．

定理 1 $k (\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i) $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ は1次従属である．

(ii) $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ の中のあるベクトルが他のベクトルのある1次結合として表すことができる．

証明 (i)⇒(ii). $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$, $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$, $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \neq \boldsymbol{0}$

であるが，$\alpha_m \neq 0$ とすると，

$$\boldsymbol{x}_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=m+1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{x}_i \ , \quad \lambda_i = -\alpha_i / \alpha_m \in \boldsymbol{R}.$$

(ii)⇒(i). $\boldsymbol{x}_m$ が $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{m-1}, \boldsymbol{x}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ のある1次結合として表すことができるとすれば，

$$\boldsymbol{x}_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=m+1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \ , \quad \alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{x}_m) \in \boldsymbol{R}.$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0} \ , \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \neq \boldsymbol{0} \ , \quad \alpha_m = -1. \ \|$$

定理 2 $k+1 (\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が1次従属，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が1次独立ならば，$\boldsymbol{x}_0$ は $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ のある1意的な1次結合として表すことができる．

証明 $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$, $\alpha_i \in \boldsymbol{R}$, $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k) \neq \boldsymbol{0}$

であるが，$\alpha_0 = 0$ とすると，

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \ , \quad \alpha_i \in R \ , \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \neq 0$$

となり，仮定に反する．よって，$\alpha_0 \neq 0$ であるので，

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ , \quad \lambda_i = -\alpha_i/\alpha_0 \in R \, .$$

次に，

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ , \quad \lambda_i = \lambda_i(x_0) \in R$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \ , \quad \mu_i = \mu_i(x_0) \in R$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0 \ , \quad \lambda_i - \mu_i \in R$$

$$\Rightarrow \quad \forall i (1 \leqq i \leqq k) \ : \ \lambda_i - \mu_i = 0 \ , \quad \text{i.e. } \lambda_i = \mu_i \, . \ \|$$

定義 3　線形部分空間

集合 $L \subset R^n$ は，

$$\forall x_1, x_2 \in L \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R \ : \ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L$$

ならば，（R^n の）線形部分空間であるという．

定理 3　線形部分空間 $L \subset R^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$L = \{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid x_i \in L \ , \quad \alpha_i \in R \ , \quad k \in N \} \, .$$

証明　後出定理16の証明法と同様にすればよい．‖

定理 4　線形部分空間 $L_i \subset R^n$ の任意の族 $\{L_i \mid i \in \Lambda$（添数集合）$\}$ の共通部分 $\cap_{i \in \Lambda} L_i$ は線形部分空間である．

証明　後出定理17の証明法と同様にすればよい．‖

定義 4　線形包

集合 $S \subset R^n$ に対して，S を含むすべての線形部分空間 $L_i \subset R^n$ の族 $\{L_i \mid i \in \Lambda$（添数集合）$\}$ の共通部分 $\mathcal{L}S = \cap_{i \in \Lambda} L_i$ を S の線形包という．

定理 5　集合 $S \subset R^n$ の線形包 $\mathcal{L}S$ は S を含む最小の線形部分空間である．

証明　定理 4 により明らかである．‖

定理 6　集合 $S \subset R^n$ の線形包 $\mathcal{L}S$ に対して，次の関係が成立する．

$$\mathcal{L}S = \{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \mid x_i \in S \ , \quad \alpha_i \in R \ , \quad k \in N \} \, .$$

証明　後出定理20の証明法と同様にすればよい．‖

系　$k(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} \subset \boldsymbol{R}^n$ の線形包 $\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ に対して，次の関係が成立する．

$$\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} = \{\textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{x}_i \mid \alpha_i \in \boldsymbol{R}\}.$$

証明　定理6から直ちに得られる．‖

定義5　線形部分空間の生成

$k(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} \subset \boldsymbol{R}^n$ の線形包 $\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ を，しばしば，$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ によって生成される線形部分空間といい，$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k]$ と書く．

補題　$r(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\} \subset \boldsymbol{R}^n$ と $s(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s\} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，線形包に関する次の関係が成立する．

(i)　$\boldsymbol{x}_r \in [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}] \;\Rightarrow\; [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r] = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}]$.

(ii)　$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r] \subset [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s] \;\Rightarrow$

$$\forall \boldsymbol{y}_j (1 \leqq j \leqq s) : [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_j] \subset [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s].$$

(iii)　$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ が1次独立，$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r] \subsetneqq [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]$ [1] $\Rightarrow$

$$\exists \boldsymbol{y}_j (1 \leqq j \leqq s) : \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_j \text{ は1次独立．}$$

証明　(i)．任意の $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]$ と $\boldsymbol{x}_r \in [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}]$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \textstyle\sum_{i=1}^r \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{x}_r = \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} \beta_i \boldsymbol{x}_i, \quad \beta_i = \beta_i(\boldsymbol{x}_r) \in \boldsymbol{R}$$

とおくと，

$$\boldsymbol{x} = \textstyle\sum_{i=1}^{r-1} (\alpha_i + \alpha_r \beta_i) \boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i + \alpha_r \beta_i \in \boldsymbol{R}.$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}], \quad \text{i.e. } [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r] \subset [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{r-1}].$$

逆の包含関係は自明であるので，結論を得る．‖

(ii)．任意の $\boldsymbol{y}_j (1 \leqq j \leqq s)$ に対応する任意の $\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_j]$，及び任意の $\boldsymbol{x}_i (1 \leqq i \leqq r) \in [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]$ をそれぞれ

1)　集合 $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{S}_1 \subsetneqq \boldsymbol{S}_2$ は $\boldsymbol{S}_1 \subset \boldsymbol{S}_2$ かつ $\boldsymbol{S}_1 \neq \boldsymbol{S}_2$ を意味する．

$$\boldsymbol{z}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\boldsymbol{x}_i+\lambda_j\boldsymbol{y}_j,\quad \alpha_i=\alpha_i(\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{z})\in\boldsymbol{R},\quad \lambda_j=\lambda_j(\boldsymbol{y}_j,\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R},$$

$$\boldsymbol{x}_i=\sum_{q=1}^{s}\beta_{iq}\boldsymbol{y}_q,\quad \beta_{iq}=\beta_{iq}(\boldsymbol{x}_i)\in\boldsymbol{R}$$

とおくと,

$$\boldsymbol{z}=\sum_{q=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\beta_{iq}+\lambda_q\right)\boldsymbol{y}_q,\quad \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\beta_{iq}+\lambda_q\in\boldsymbol{R},\quad \lambda_q(q\neq j)=0.$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{z}\in[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s],\quad \text{i.e. } [\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{y}_j]\subset[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s].$$

(iii). $\exists\boldsymbol{y}\in[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s],\ \boldsymbol{y}=\sum_{j=1}^{s}\beta_j\boldsymbol{y}_j,\ \beta_j=\beta_j(\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R}:\boldsymbol{y}\notin[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r]$ であるが,このとき,

$$\forall\boldsymbol{y}_j(1\leqq j\leqq s):\ \boldsymbol{y}_j\in[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r],$$

$$\boldsymbol{y}_j=\sum_{p=1}^{r}\alpha_{jp}\boldsymbol{x}_p,\quad \alpha_{jp}=\alpha_{jp}(\boldsymbol{y}_j)\in\boldsymbol{R}.$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{y}=\sum_{p=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{s}\beta_j\alpha_{jp}\right)\boldsymbol{x}_p,\quad \sum_{j=1}^{s}\beta_j\alpha_{jp}\in\boldsymbol{R}.$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{y}\in[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r],\quad \text{矛盾}.$$

$$\therefore\quad \exists\boldsymbol{y}_j(1\leqq j\leqq s):\ \boldsymbol{y}_j\notin[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r].$$

よって,定理1により,結論を得る. ‖

定理 7 $r(\in\boldsymbol{N})$ 個の1次独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}\subset\boldsymbol{R}^n$ と $s(\in\boldsymbol{N})$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s\}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して,線形包に関する次の関係が成立する.

(i) $[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r]\subset[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s]\ \Rightarrow\ r\leqq s.$

(ii) $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s$ が1次独立, $[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r]=[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s]\ \Rightarrow\ r=s.$

(iii) $[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r]\subset[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s],\ r=s\ \Rightarrow$

$[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r]=[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s],\ \boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s$ は1次独立.

証明 (i). $[\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r]\subsetneqq[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r]\subset[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s]$ であるから,補題(ii)(iii)により,

$$\exists\boldsymbol{y}_{j(1)}(1\leqq j(1)\leqq s):\ [\boldsymbol{y}_{j(1)},\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r]\subset[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s],$$

$\boldsymbol{y}_{j(1)},\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ は1次独立.

この操作を順次繰り返して,すべての $\boldsymbol{x}_i(1\leqq i\leqq r)$ を $\boldsymbol{y}_{j(i)}(1\leqq j(i)\leqq s)$ に置き換えていくと,

$$[\boldsymbol{y}_{j(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}_{j(r)}] \subset [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s], \quad \boldsymbol{y}_{j(1)}. \cdots, \boldsymbol{y}_{j(r)} \text{ は1次独立}.$$

よって，結論を得る．

(ii)．$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]=[\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]$ は，$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]\subset[\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]$ かつ $[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]\supset[\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]$ を意味するので，(i)により結論を得る．

(iii)．$r=s$，$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]\subsetneqq[\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]$ ならば，補題(ii)(iii)により，

$$\exists \boldsymbol{y}_j (1\leqq j\leqq s) : [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_j]\subset[\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s],$$
$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_j \text{ は1次独立},$$

となるので，(i)により $r+1\leqq s$ となるが，これは矛盾である．よって，まず，

$$① \quad [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]=[\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s].$$

次に，$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ が1次従属ならば，補題(i)により，$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ の中から適当に $\boldsymbol{y}_{j(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}_{j(q)} (1\leqq j(1), \cdots, j(q)\leqq s)$ を選んで，

$$② \begin{cases} [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]=[\boldsymbol{y}_{j(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}_{j(q)}], \quad q<s=r, \\ \boldsymbol{y}_{j(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}_{j(q)} \text{ は1次独立}, \end{cases}$$

とすることができる．よって，①②により，

$$\begin{cases} [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]=[\boldsymbol{y}_{j(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}_{j(q)}], \quad q<r, \\ \boldsymbol{y}_{j(1)}, \cdots, \boldsymbol{y}_{j(q)} \text{ は1次独立}, \end{cases}$$

となるが，これは(ii)と矛盾する．よって，$\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s$ は1次独立である．‖

系　$k(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^n$ が1次独立ならば，$k\leqq n$ である．

証明　n 個のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\in\boldsymbol{R}^n$ を単位ベクトル(＝1次独立)，すなわち，

$$\boldsymbol{e}_i=(0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)', \quad 1\leqq i\leqq n,$$

とする．

$$\forall \boldsymbol{x}_i (1\leqq i\leqq k) : \boldsymbol{x}_i\in[\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$$

であるから，補題(i)により，

$$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k] \subset [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n] = [\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$$

となる．よって，定理7(i)により，結論を得る．||

定義6　線形部分空間の次元

線形部分空間 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ は，$\boldsymbol{L}$ の1次独立なベクトルの最大個数が $r \in \boldsymbol{Z}$ であるとき，[1] すなわち，適当に選ばれた $\boldsymbol{L}$ の r 個のベクトルは1次独立となるが，$\boldsymbol{L}$ の $r+1$ 個のベクトルは，それがどのように選ばれようとも，1次従属になるとき，r 次元であるといい，$\dim \boldsymbol{L} = r$ と書く．

定義7　線形部分空間の基底

$r\,(\in \boldsymbol{N})$次元線形部分空間 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，r 個の1次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \boldsymbol{L}$ の集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ を $\boldsymbol{L}$ の基底という．

注意1　$r(\in \boldsymbol{N})$ 次元線形部分空間 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r] \equiv \mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}.$$

注意2　2つの線形部分空間 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

(i)　$\boldsymbol{L}_1 \subset \boldsymbol{L}_2 \Rightarrow \dim \boldsymbol{L}_1 \leqq \dim \boldsymbol{L}_2$,

(ii)　$\boldsymbol{L}_1 \subsetneqq \boldsymbol{L}_2 \Rightarrow \dim \boldsymbol{L}_1 < \dim \boldsymbol{L}_2$.

証明　(i)．明らかである．

(ii)．注意1に注目して，$\dim \boldsymbol{L}_1 = r \in \boldsymbol{Z}$, $\dim \boldsymbol{L}_2 = s \in \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{L}_1$ の基底を $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$, $\boldsymbol{L}_2$ の基底を $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s\}$，すなわち，

$$\boldsymbol{L}_1 = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]\ , \quad \boldsymbol{L}_2 = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s]$$

とおくと，補題(ii)(iii)により，

$$\exists \boldsymbol{y}_j (1 \leqq j \leqq s) : \boldsymbol{L}_1 \subsetneqq [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_j] \subset \boldsymbol{L}_2,$$

$$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{y}_j \text{ は1次独立.}$$

$$\therefore \dim \boldsymbol{L}_1 = r < r+1 \leqq \dim \boldsymbol{L}_2 = s\ .\ \|$$

1)　空集合は -1 次元線形部分空間であると規約する．

注意 3　$\dim \boldsymbol{R}^n = n$ であり，n 個の単位ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\} \subset \boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底である．

証明　定理7系により，$\dim \boldsymbol{R}^n \leqq n$ であるが，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ は1次独立であることから，結論を得る．‖

定理 8　$r(\in \boldsymbol{N})$ 次元線形部分空間 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ の基底を $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ とする．任意 $k(\in \boldsymbol{Z}, k<r)$ 個の1次独立なベクトル $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k \in \boldsymbol{L}$ に対して，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ の中から $r-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_{i(k+1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i(r)}$, $1 \leqq i(k+1), \cdots, i(r) \leqq r$ を選び，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{x}_{i(k+1)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i(r)}\}$ が $\boldsymbol{L}$ の基底となるようにすることができる．

証明　$k<r$, i.e. $[\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k] \subsetneqq \boldsymbol{L} = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]$

であるから，補題(iii)により，

$$\exists \boldsymbol{x}_{i(k+1)} (1 \leqq i(k+1) \leqq r) : \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{x}_{i(k+1)} \text{ は1次独立.}$$

$k+1=r$ ならば，$\{\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{x}_{i(k+1)}\}$ が $\boldsymbol{L}$ の基底となる．$k+1<r$ ならば，この操作を順次 $r-k$ 回繰り返すことにより，結論を得る．‖

系　$k(\in \boldsymbol{Z})$ 個の1次独立なベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，n 個の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \boldsymbol{R}^n$ の中から適当に $n-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{e}_{i(k+1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i(n)}$, $1 \leqq i(k+1), \cdots, i(n) \leqq n$ を選び，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{e}_{i(k+1)}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i(n)}\}$ が基底となるようにすることができる．

証明　$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ の基底であるので，定理8から直ちに得られる．‖

定理 9　2つの線形部分空間 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\dim(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2) = \dim \boldsymbol{L}_1 + \dim \boldsymbol{L}_2 - \dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2).$$

証明　$\dim(\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2) = r \in \boldsymbol{Z}$, $\dim \boldsymbol{L}_1 = s \in \boldsymbol{Z}$, $\dim \boldsymbol{L}_2 = t \in \boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2$ の基底を $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$, $\boldsymbol{L}_1$ の基底を $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s\}$, $\boldsymbol{L}_2$ の基底を $\{\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_t\}$, すなわち，

$$\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2 = [\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r], \quad \boldsymbol{L}_1 = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s], \quad \boldsymbol{L}_2 = [\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_t],$$

① $$\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = [\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_t]$$

とする．

$$\boldsymbol{L}_1 \cap \boldsymbol{L}_2 = \{\boldsymbol{0}\}, \text{ i.e. } r=0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_t \text{ は1次独立,}$$

$$L_1\cap L_2=L_2\,,\ \text{i.e. } r=t\leqq s\ \Rightarrow\ L_1+L_2=[y_1,\ \cdots,\ y_s]\,,$$
$$L_1\cap L_2=L_1\,,\ \text{i.e. } r=s\leqq t\ \Rightarrow\ L_1+L_2=[z_1,\ \cdots,\ z_t]$$

であり，結論を得るので，以下では，

$$0<r<\min(s,\ t)$$

とする．定理８と①により，$\{x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y_{j(r+1)},\ \cdots,\ y_{j(s)}\}$，$1\leqq j(r+1),\ \cdots,\ j(s)\leqq s$，及び $\{x_1,\ \cdots,\ x_r,\ z_{h(r+1)},\ \cdots,\ z_{h(t)}\}$，$1\leqq h(r+1),\ \cdots,\ h(t)\leqq t$，がそれぞれ L_1 と L_2 の基底，すなわち，

$$② \begin{cases} L_1=[x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y_{j(r+1)},\ \cdots,\ y_{j(s)}]\,, \\ L_2=[x_1,\ \cdots,\ x_r,\ z_{h(r+1)},\ \cdots,\ z_{h(t)}]\,, \\ L_1+L_2=[x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y_{j(r+1)},\ \cdots,\ y_{j(s)},\ z_{h(r+1)},\ \cdots,z_{h(t)}] \end{cases}$$

となるようにすることができる．よって，$x_1,\ \cdots,\ x_r,\ y_{j(r+1)},\ \cdots,\ y_{j(s)},\ \cdots,\ z_{h(r+1)},\ \cdots,\ z_{h(t)}$ が１次独立であること，すなわち，

$$③\qquad \textstyle\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i+\sum_{u=r+1}^{s}\beta_u y_{j(u)}+\sum_{v=r+1}^{t}\gamma_v z_{h(v)}=\mathbf{0}\,,\quad \alpha_i,\ \beta_u,\ \gamma_v\in \boldsymbol{R}$$
$$\Rightarrow\ \forall\alpha_i(1\leqq i\leqq r),\ \beta_u(r+1\leqq u\leqq s),\ \gamma_v(r+1\leqq v\leqq t)\ :\ \alpha_i=\beta_u=\gamma_v=0$$

を示せばよい．②③により，

$$④\qquad \textstyle\sum_{i=1}^{r}\alpha_i x_i+\sum_{u=r+1}^{s}\beta_u y_{j(u)}=-\sum_{v=r+1}^{t}\gamma_v z_{h(v)}\in L_1\cap L_2\,.$$
$$\therefore\quad \textstyle -\sum_{v=r+1}^{t}\gamma_v z_{h(v)}=\sum_{i=1}^{r}\delta_i x_i\,,\quad \delta_i=\delta_i(\sum_{v=r+1}^{t}\gamma_v z_{h(v)})\in \boldsymbol{R}\,,$$
$$\text{i.e.}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{r}\delta_i x_i+\sum_{v=r+1}^{t}\gamma_v z_{h(v)}=0$$

となるが，②により，

$$\forall\gamma_v(r+1\leqq v\leqq t)\ :\ \gamma_v=0\,.$$

よって，④の右辺は $\mathbf{0}$ となるが，再び②により，

$$\forall\alpha_i(1\leqq i\leqq r)\,,\ \beta_u(r+1\leqq u\leqq s)\ :\ \alpha_i=\beta_u=0\,.\ \|$$

定義８　ベクトルの直交

２つのベクトル $x_1,\ x_2\in \boldsymbol{R}^n$ は，$\langle x_1,\ x_2\rangle=0$ ならば，直交するという．

定義９　正規直交系

$k(\in \boldsymbol{N})$ 個の $\boldsymbol{0}$ でないベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} \subset \boldsymbol{R}^n$ は，$1 \leqq i,\ j \leqq k$ に対して，

$$\begin{cases} i \neq j \ \Rightarrow \ \langle \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j \rangle = 0, \\ i = j \ \Rightarrow \ \langle \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j \rangle = 1 \end{cases}$$

ならば，正規直交系であるという．

定理10　$r(\in \boldsymbol{N})$ 次元線形部分空間 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{L}$ の r 個のベクトルからなる正規直交系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ は $\boldsymbol{L}$ の基底である．すなわち，

$$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_r] \equiv \mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_r\}.$$

証明　$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ が1次独立であることをいえばよい．

$$\textstyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}, \quad \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\} \text{ が正規直交系}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ \forall j (1 \leqq j \leqq r) : 0 &= \langle \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}_j \rangle = \langle \textstyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j \rangle = \alpha_j. \ \| \end{aligned}$$

定義10　正規直交底

$r(\in \boldsymbol{N})$ 次元線形部分空間 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ の r 個のベクトルからなる正規直交系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ を $\boldsymbol{L}$ の正規直交底という．

定理11　$r(\in \boldsymbol{N})$ 次元線形部分空間 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ の任意 $k(\in \boldsymbol{Z},\ k < r)$ 個のベクトルからなる正規直交系 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ に対して，適当に $r-k$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \boldsymbol{L}$ を選び，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ を $\boldsymbol{L}$ の正規直交底とすることができる．

証明　$[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k] \subsetneqq \boldsymbol{L}$ であるから，補題(iii)により，

$$\exists \boldsymbol{y}_{k+1} \in \boldsymbol{L} : \boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_k,\ \boldsymbol{y}_{k+1} \text{ は1次独立.}$$

よって，

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \boldsymbol{y}_{k+1} - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i = \langle \boldsymbol{y}_{k+1},\ \boldsymbol{x}_i \rangle \in \boldsymbol{R},$$

とおくと，定理1により，$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} \neq \boldsymbol{0}$ である．また，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ は正規直交系であるから，

$$\forall \boldsymbol{x}_j (1 \leqq j \leqq k) : \langle \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1},\ \boldsymbol{x}_j \rangle = \alpha_j - \textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle \boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j \rangle = 0$$

となり，$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}$ はすべての $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ と直交する．そこで，

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}/\|\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}\|$$

とおけば，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{k+1}\}$ は正規直交系となる．$k+1=r$ ならば，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{k+1}\}$ が $\boldsymbol{L}$ の正規直交底である．$k+1<r$ ならば，この操作を順次 $r-k$ 回繰り返すことにより，結論を得る．‖

系　$r(\in \boldsymbol{N})$ 次元線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，適当に r 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\in\boldsymbol{L}$ を選んで，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$ を $\boldsymbol{L}$ の正規直交底とすることができる．

証明　任意のベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}(\neq\boldsymbol{0})\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}_1=\hat{\boldsymbol{x}}/\|\hat{\boldsymbol{x}}\|$ とおくと，正規直交系 $\{\boldsymbol{x}_1\}$ が得られる．ここで，$k=1$ の場合として，定理11を適用すればよい．‖

定義11　直交補空間

線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{L}$ の任意のベクトルに直交する（$\boldsymbol{R}^n$ の）ベクトル全体の集合

$$\{\boldsymbol{y}\,|\,\forall\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L} : \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle=0\}\subset\boldsymbol{R}^n$$

を $\boldsymbol{L}$ の直交補空間といい，$\boldsymbol{L}^\perp$ と書く．

注意 4　線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$ の直交補空間 $\boldsymbol{L}^\perp\subset\boldsymbol{R}^n$ は線形部分空間である．

注意 5　２つの線形部分空間 $\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{L}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ とその直交補空間 $\boldsymbol{L}_1^\perp, \boldsymbol{L}_2^\perp\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{L}_1\subset\boldsymbol{L}_2 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{L}_1^\perp\supset\boldsymbol{L}_2^\perp .$$

定理12　線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$ とその直交補空間 $\boldsymbol{L}^\perp\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

（i）$\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^\perp$，　$\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{L}^\perp=\{\boldsymbol{0}\}$,

（ii）$\dim\boldsymbol{L}+\dim\boldsymbol{L}^\perp=n$.

証明　$\dim\boldsymbol{L}=0$ のときは自明であるから，$\dim\boldsymbol{L}=r(\in\boldsymbol{N})$ としておく．

（i）.　$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{L}^\perp \;\Rightarrow\; \langle\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

次に，$\boldsymbol{R}^n\supset\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^\perp$ は自明であるから，$\boldsymbol{R}^n\subset\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^\perp$ を示す．定理10に注目して，

$\boldsymbol{L}$ の正規直交系を $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$, すなわち,

$$\boldsymbol{L}=[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r]$$

とする．任意の $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して,

$$\boldsymbol{z}_1=\textstyle\sum_{i=1}^r \alpha_i\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{L}, \quad \alpha_i\equiv\langle\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_i\rangle\in\boldsymbol{R}\ ;\ \boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}_1$$

とおくと,

$$\forall\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{x}=\textstyle\sum_{i=1}^r \beta_i\boldsymbol{x}_i, \quad \beta_i=\beta_i(\boldsymbol{x})\in\boldsymbol{R}\ :$$

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{x}\rangle&=\langle\boldsymbol{z}-\textstyle\sum_{i=1}^r \alpha_i\boldsymbol{x}_i, \ \textstyle\sum_{i=1}^r \beta_i\boldsymbol{x}_i\rangle\\ &=\textstyle\sum_{i=1}^r \beta_i\langle\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}_i\rangle-\textstyle\sum_{i,j=1}^r \alpha_i\beta_j\langle\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\rangle\\ &=0, \quad \text{i.e. } \boldsymbol{z}_2\in\boldsymbol{L}^\perp.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \forall\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n\exists\boldsymbol{z}_1\in\boldsymbol{L}, \ \boldsymbol{z}_2\in\boldsymbol{L}^\perp\ :\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2.$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{R}^n\subset\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^\perp.$$

(ii). 注意3，定理9及び定理12(ｉ)により，明らかである．‖

系　線形部分空間 $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$ とその直交補空間 $\boldsymbol{L}^\perp\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，任意のベクトル $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^n$ は,

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{L}^\perp$$

の形に1意的に表すことができる．

証明　定理12の内容から，1意性を示せば十分である．定理12(ｉ)により,

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2, \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2\in\boldsymbol{L}^\perp$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{y}_1\in\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{L}^\perp=\{\boldsymbol{0}\}, \quad \text{i.e. } \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2, \ \boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}_2. \ \|$$

定理13　2つの線形部分空間 $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2\subset\boldsymbol{R}^n$ とその直交補空間 $\boldsymbol{L}_1^\perp$, $\boldsymbol{L}_2^\perp\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

(ｉ)　$(\boldsymbol{L}_1^\perp)^\perp=\boldsymbol{L}_1$,

(ii)　$(\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2)^\perp=\boldsymbol{L}_1^\perp\cap\boldsymbol{L}_2^\perp$,

(iii)　$(\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2)^\perp=\boldsymbol{L}_1^\perp+\boldsymbol{L}_2^\perp$.

証明　(ｉ). 定理12により,

$$n=\dim \boldsymbol{L}_1+\dim \boldsymbol{L}_1^{\perp}=\dim \boldsymbol{L}_1^{\perp}+\dim(\boldsymbol{L}_1^{\perp})^{\perp}, \text{ i.e.}$$

① $\dim \boldsymbol{L}_1=\dim (\boldsymbol{L}_1^{\perp})^{\perp}$.

一方， $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{L}_1 \Rightarrow \boldsymbol{x}\in(\boldsymbol{L}_1^{\perp})^{\perp}=\{\boldsymbol{z}\mid\forall\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{L}_1^{\perp} : \langle\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\rangle=0\}$.

$\therefore \quad \boldsymbol{L}_1\subset(\boldsymbol{L}_1^{\perp})^{\perp}$.

このとき，注意2(ii)により，

$\boldsymbol{L}_1\subsetneqq(\boldsymbol{L}_1^{\perp})^{\perp} \Rightarrow \dim \boldsymbol{L}_1<\dim(\boldsymbol{L}_1^{\perp})^{\perp}$， ①に矛盾.

よって，結論を得る.

(ii). $\boldsymbol{y}\in(\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2)^{\perp}$

$\Leftrightarrow \forall\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2,\ \boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{L}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_2 : \langle\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}\rangle=0$

$\Leftrightarrow \forall\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{L}_1 : \langle\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}\rangle=0,\ \&\ \forall\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{L}_2 : \langle\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}\rangle=0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{L}_1^{\perp}\cap\boldsymbol{L}_2^{\perp}$.

(iii). (i)(ii)の結果により，

$$\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2=(\boldsymbol{L}_1^{\perp})^{\perp}\cap(\boldsymbol{L}_2^{\perp})^{\perp}=(\boldsymbol{L}_1^{\perp}+\boldsymbol{L}_2^{\perp})^{\perp}.$$

$$\therefore \quad (\boldsymbol{L}_1\cap\boldsymbol{L}_2)^{\perp}=[(\boldsymbol{L}_1^{\perp}+\boldsymbol{L}_2^{\perp})^{\perp}]^{\perp}=\boldsymbol{L}_1^{\perp}+\boldsymbol{L}_2^{\perp}. \ \|$$

定義12 線形変換・線形関数

関数 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ は，

$$\forall\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n\forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R} : g(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)=\alpha_1 g(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 g(\boldsymbol{x}_2)$$

ならば，線形変換または線形関数であるという.

注意 6 線形変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ に対して，次の関係が成立する.

$$\forall k\in\boldsymbol{N}\forall\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^n\forall\alpha_1, \cdots, \alpha_k\in\boldsymbol{R} :$$

$$g\left(\textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i\boldsymbol{x}_i\right)=\textstyle\sum_{i=1}^k \alpha_i g(\boldsymbol{x}_i).$$

定理14 関数 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ に対して，次の(i)(ii)は同値である.

(i) g は線形変換である.

(ii) g は，ある1意的な (m, n) 型行列 $\boldsymbol{M}$ によって，$g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}$ と表すことができる.

証明 (i)$\Rightarrow$(ii). $\boldsymbol{R}^n$ の n 個の単位ベクトルによる基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって作られる n 次単位行列を E とする. g は線形変換であるので, 注意6により,

$$\forall \boldsymbol{x}=(\xi_1, \cdots, \xi_n)' \in \boldsymbol{R}^n : g(\boldsymbol{x})=g(\textstyle\sum_{i=1}^n \xi_i \boldsymbol{e}_i)=\sum_{i=1}^n \xi_i g(\boldsymbol{e}_i) .$$

よって, $g(\boldsymbol{e}_i)(1 \leqq i \leqq n)$ を列とする (m, n) 型行列を M とおくと,

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : g(\boldsymbol{x})=M\boldsymbol{x} .$$

次に, $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : g(\boldsymbol{x})=M_1\boldsymbol{x}=M_2\boldsymbol{x}$, M_1, M_2 は (m, n) 型行列

$$\Rightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : (M_1-M_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \Rightarrow (M_1-M_2)E=M_1-M_2=O .$$

(ii)$\Rightarrow$(i). $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{R}^n \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned} g(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2) &= M(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2) \\ &= \alpha_1 M\boldsymbol{x}_1+\alpha_2 M\boldsymbol{x}_2=\alpha_1 g(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 g(\boldsymbol{x}_2) . \| \end{aligned}$$

定理15 集合 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して, 次の(i)(ii)は同値である.

(i) $\boldsymbol{L}$ は $r(\in \boldsymbol{Z}, r<n)$ 次元線形部分空間である.

(ii) $\boldsymbol{L}$ は, $n-r$ 個の1次独立なベクトル $\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_{n-r} \subset \boldsymbol{R}^n$ を行とする $(n-r, n)$ 型行列 M によって, $\boldsymbol{L}=\{\boldsymbol{x} \mid M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ と表される.

証明 (i)$\Rightarrow$(ii). 定理12により, $\boldsymbol{L}$ の直交補空間 $\boldsymbol{L}^{\perp} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して, $\dim \boldsymbol{L}^{\perp}=n-r$ であるから, $\boldsymbol{L}^{\perp}$ の基底 $\{\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_{n-r}\}$ を構成するベクトルを行とする $(n-r, n)$ 型行列を M とすると,

$$\boldsymbol{L}=\{\boldsymbol{x} \mid \forall \boldsymbol{m}_i(1 \leqq i \leqq n-r) : \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}_i \rangle = 0\}=\{\boldsymbol{x} \mid M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\} .$$

(ii)$\Rightarrow$(i). $\boldsymbol{L}$ が線形部分空間であり, $\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_{n-r} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$ であることは明らかである. また, 連立1次方程式に関する基本定理[1]により, $\dim \boldsymbol{L}=n-(n-r)=r$. ‖

§2 アフィン集合

定義13 アフィン1次結合・直線

$k(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{R}^n$ に対して, 形式

アフィン集合

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i\in\boldsymbol{R}, \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$$

を $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ のアフィン1次結合という．また，ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，その任意のアフィン1次結合の全体

$$\{\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}, \ \alpha_1+\alpha_2=1\}$$

を $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を通る直線という．

定義14　アフィン集合

集合 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{R}^n$ は，

$$\forall\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{A}\forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}, \ \alpha_1+\alpha_2=1 \ : \ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{A}$$

ならば，($\boldsymbol{R}^n$ の) アフィン集合であるという．

定理16　アフィン集合 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\boldsymbol{A}=\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{A}, \ \alpha_i\in\boldsymbol{R}, \ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1, \ k\in\boldsymbol{N}\}.$$

証明　上式右辺を $\boldsymbol{S}$ とおく．$\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{A}$ を示せば十分である．$k=2$ のときはアフィン集合の定義により明らかであるので，$k=\nu$ のとき結論が真であるとして，$k=\nu+1$ について証明する．

$$\boldsymbol{x}\in\{\sum_{i=1}^{\nu+1}\alpha_i\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{A}, \ \alpha_i\in\boldsymbol{R}, \ \sum_{i=1}^{\nu+1}\alpha_i=1, \ \alpha_{\nu+1}\neq1\}^{2)}$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{x}\in\{(1-\alpha_{\nu+1})\sum_{i=1}^{\nu}[\alpha_i/(1-\alpha_{\nu+1})]\boldsymbol{x}_i+\alpha_{\nu+1}\boldsymbol{x}_{\nu+1} \mid \cdots\}$$

であるが，帰納法の仮定により，$\sum_{i=1}^{\nu}[\alpha_i/(1-\alpha_{\nu+1})]\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{A}$ であるので，$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{A}$，すなわち，$\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{A}$となる．‖

定理17　アフィン集合 $\boldsymbol{A}_i\subset\boldsymbol{R}^n$ の任意の族 $\{\boldsymbol{A}_i \mid i\in\Lambda$(添数集合)$\}$ の共通部分 $\cap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{A}_i$ はアフィン集合である．

証明　$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\cap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{A}_i \ \Rightarrow \ \forall\boldsymbol{A}_i(i\in\Lambda) \ : \ \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{A}_i$

$$\Rightarrow \ \forall\boldsymbol{A}_i(i\in\Lambda)\forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}, \ \alpha_1+\alpha_2=1 \ : \ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{A}_i.$$

---

1)　古屋〔1〕p. 78の［1］，入江〔2〕p. 68 の定理3，佐武〔4〕p. 111 の定理10等，本稿の議論の組み立てからすると，入江〔2〕の証明法が最も利用し易い．

2)　$\sum_{i=1}^{\nu+1}\alpha_i=1\Rightarrow\exists i(1\leqq i\leqq\nu+1):\alpha_i\neq1$
であるから，一般性を失うことなく，$\alpha_{\nu+1}\neq1$ としてよい．

$\therefore\ \forall\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R},\ \ \alpha_1+\alpha_2=1\ :\ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{A}_i$. ||

定理18　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の（i）（ii）は同値である．

（i）　$\boldsymbol{S}$ は線形部分空間である．

（ii）　$\boldsymbol{S}$ は原点を含むアフィン集合である．

証明　（i）⇒（ii）は明らかであるので，（ii）⇒（i）を示す．

$$\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{S},\ \ \alpha_i\in\boldsymbol{R},\ \ i=1,\ 2\ \ \Rightarrow\ \ \alpha_i\boldsymbol{x}_i=\alpha_i\boldsymbol{x}_i+(1-\alpha_i)0\in\boldsymbol{S}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\frac{1}{2}\alpha_2\boldsymbol{x}_2=\frac{1}{2}(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)\in\boldsymbol{S}$$

$$\Rightarrow\ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2=2\cdot\frac{1}{2}(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)+(1-2)0\in\boldsymbol{S}.$$

$$\therefore\ \forall\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{S}\forall\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R}\ :\ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{S}.\ \|$$

定義15　アフィン包

集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{S}$ を含むすべてのアフィン集合 $\boldsymbol{A}_i\subset\boldsymbol{R}^n$ の族 $\{\boldsymbol{A}_i|i\in\boldsymbol{\Lambda}$(添数集合)$\}$ の共通部分 $\mathcal{A}\boldsymbol{S}=\bigcap_{i\in\Lambda}\boldsymbol{A}_i$ を $\boldsymbol{S}$ のアフィン包という．

定理19　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ のアフィン包 $\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ は $\boldsymbol{S}$ を含む最小のアフィン集合である．

証明　定理17により明らかである．||

定理20　集合 $\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{R}^n$ のアフィン包 $\mathcal{A}\boldsymbol{S}$ に対して，次の関係が成立する．

$$\mathcal{A}\boldsymbol{S}=\{\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\,|\,\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{S},\ \ \alpha_i\in\boldsymbol{R},\ \ \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1,\ \ k\in\boldsymbol{N}\}.$$

証明　上式右辺を $\boldsymbol{T}$ とおく．①$\boldsymbol{S}\subset\boldsymbol{T}$　②$\boldsymbol{T}$ はアフィン集合であること ③$\boldsymbol{S}$ を含む任意のアフィン集合は $\boldsymbol{T}$ を含むこと——を証明すればよいが，①は自明であり，③は定理16によって明らかであるので，②を示す．任意の $\boldsymbol{y}_j\in\boldsymbol{T}$ を

$$\boldsymbol{y}_j=\textstyle\sum_{i=1}^{kj}\alpha_{ij}\boldsymbol{x}_{ij},\ \ (\boldsymbol{x}_{ij},\ \alpha_{ij},\ k_j)=\psi_j(\boldsymbol{y}_j),$$

$$\boldsymbol{x}_{ij}\in\boldsymbol{S}\alpha_{ij},\ \ \in\boldsymbol{R},\ \ \textstyle\sum_{i=1}^{kj}\alpha_i=1,\ \ k_j\in\boldsymbol{N},$$

とおくと，

$$\forall\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2\in\boldsymbol{T}\forall\beta_1,\ \beta_2\in\boldsymbol{R},\ \ \beta_1+\beta_2=1\ :$$

$$\beta_1\boldsymbol{y}_1+\beta_2\boldsymbol{y}_2=\textstyle\sum_{i=1}^{k_1}(\beta_1\alpha_{i1})\boldsymbol{x}_{i1}+\sum_{i=1}^{k_2}(\beta_2\alpha_{i2})\boldsymbol{x}_{i2}\in\boldsymbol{T}.\ \|$$

系 $k(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

(i) $\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} = \{\sum_{i=1}^k \alpha_i \boldsymbol{x}_i \mid \alpha_i \in \boldsymbol{R},\ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1\}$.

(ii) $\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} = \mathcal{A}\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$.

証明 (i)．定理20から直ちに得られる．

(ii)．(i)，定理6系及び定理18から得られる．‖

定理21 $k+1(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} = \mathcal{A}\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0\} + \boldsymbol{x}_0 .$$

証明 上式左辺を $\boldsymbol{A}$，右辺を $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0$ とおく．定理18—定理20に注目して，任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ と任意の $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \quad \alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R}, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1,$$

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^k \beta_i (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0, \quad \beta_i = \beta_i(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}$$

とおくと，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{x}_0, \quad \text{i.e. } \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0,$$

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^k \beta_i \boldsymbol{x}_i, \quad \beta_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \beta_i, \quad \text{i.e. } \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}+\boldsymbol{x}_0 : \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}. \ \|$$

定義16 平行移動・平行

集合 $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{R}^n$ とベクトル $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，集合 $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{S}$ の $\boldsymbol{a}$ による平行移動という．また，集合 $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$\exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{a}$$

ならば，$\boldsymbol{S}_2$ は $\boldsymbol{S}_1$ に平行であるといい，$\boldsymbol{S}_2 /\!/ \boldsymbol{S}_1$ と書く．

注意7 関係 $/\!/$ は同値関係である．すなわち，集合 $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3 \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，

(i) $\boldsymbol{S}_1 /\!/ \boldsymbol{S}_1$（反射律），

(ii) $\boldsymbol{S}_1 /\!/ \boldsymbol{S}_2 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{S}_2 /\!/ \boldsymbol{S}_1$（対称律），

(iii) $S_1 /\!/ S_2,\ S_2 /\!/ S_3 \Rightarrow S_1 /\!/ S_3$ (推移律).

証明 (i). $S_1 = S_1 + 0$.

(ii). $\exists a \in R^n : S_1 = S_2 + a \Rightarrow \exists -a \in R^n : S_2 = S_1 - a$.

(iii). $\exists a, b \in R^n : S_1 = S_2 + a,\ S_2 = S_3 + b \Rightarrow$

$\exists a + b \in R^n : S_1 = S_3 + a + b$. ‖

定理22 アフィン集合 $A \subset R^n$ と集合 $S \subset R^n$ に対して，$S /\!/ A$ ならば S はアフィン集合である．

証明 $\exists a \in R^n : S = A + a$, i.e. $x \in S \Leftrightarrow x - a \in A$.

よって，上記ベクトル a を利用すると，

$$\therefore\ \forall x_1, x_2 \in S \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 :$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \{\alpha_1 (x_1 - a) + \alpha_2 (x_2 - a)\} + a \in A + a = S. \ \|$$

定理23 アフィン集合 $A \subset R^n$ は，任意の $x \in A$ によって定義される1意的な線形部分空間 $A - x \subset R^n$ に平行である．

証明 $A - x$ は原点を含み $A - x /\!/ A$ であるから，定理18及び定理22により，$A - x$ が線形部分空間であることは容易に分かる．そこで，以下においては，$A - x$ に平行な線形部分空間の1意性を示す．$L_1, L_2 \subset R^n$ を線形部分空間とする．注意7により，

$$L_2 /\!/ A,\ L_1 /\!/ A \Rightarrow L_2 /\!/ L_1.$$

$$\therefore\ \exists -a \in R^n : L_2 = L_1 - a, \text{ i.e. } x \in L_1 \Leftrightarrow x - a \in L_2.$$

特に，$0 \in L_1$ により，$-a \in L_2$，すなわち，$a \in L_2$．よって，

$$\forall x \in L_1 : x = (x - a) + a \in L_2. \text{ i.e. } L_1 \subset L_2.$$

全く同様にして，$L_1 \supset L_2$ が示されるので，結局，$L_1 = L_2$. ‖

定義17 アフィ集合の次元

アフィン集合 $A \subset R^n$ は，それと平行な線形部分空間 $L \subset R^n$ が $r(\in Z)$ 次元であるとき，r 次元であるといい，$\dim A = r$ と書く．例えば，0次元アフィ

ン集合は1点からなる集合であり，1次元アフィン集合は直線である.[1]

定義18　平面・超平面

アフィン集合 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{R}^n$ のことを($\boldsymbol{R}^n$ の)平面ともいう．また，$n-1$ 次元アフィン集合 $\boldsymbol{H}\subset\boldsymbol{R}^n$ を($\boldsymbol{R}^n$ の)超平面という.

定理24　集合 $\boldsymbol{H}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)は同値である.

(i)　$\boldsymbol{H}$ は超平面である.

(ii)　$\boldsymbol{H}$ は，スカラー倍を除いて1意的なあるベクトル $\boldsymbol{a}(\neq\boldsymbol{0})\in\boldsymbol{R}^n$ とある $\alpha\in\boldsymbol{R}$ に対して，$\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{x}\mid\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}\rangle=\alpha\}$と表される.

証明　(i)⇒(ii)．定理23に留意して，$\boldsymbol{H}$($=n-1$次元アフィン集合）に平行な $n-1$ 次元線形部分空間を $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$，すなわち,

$$\exists -\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{H}\ :\ \boldsymbol{L}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{z}\ ,\quad \dim\boldsymbol{L}=n-1\ ,$$

とする．定理12と注意4により，$\boldsymbol{L}$ の直交補空間 $\boldsymbol{L}^\perp$ は1次元線形部分空間であるから,

$$\exists\ 1\text{意的な}\ \boldsymbol{a}(\neq 0)\in\boldsymbol{R}^n\ :\ \boldsymbol{L}^\perp=\{\lambda\boldsymbol{a}\mid\lambda(\neq 0)\in\boldsymbol{R}\},\ \dim\boldsymbol{L}^\perp=1\ .$$

よって，定理13を考慮すると，上記ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $-\boldsymbol{z}$ に対して,

$$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{L}^\perp)^\perp=\{\boldsymbol{y}\mid\langle\boldsymbol{y},\ \lambda\boldsymbol{a}\rangle=0\ ,\quad \lambda(\neq 0)\in\boldsymbol{R}\}=\{\boldsymbol{y}\mid\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}\rangle=0\}\ ,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \ \boldsymbol{H}&=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{z}=\{\boldsymbol{y}\mid\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a}\rangle=0\}+\boldsymbol{z}=\{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}\mid\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a}\rangle=0\}\\&=\{\boldsymbol{x}\mid\langle\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{a}\rangle=0\}=\{\boldsymbol{x}\mid\langle\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{a}\rangle=\langle\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{a}\rangle\equiv\alpha\in\boldsymbol{R}\}\ .\end{aligned}$$

(ii)⇒(i).　$\forall\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{H}\ \forall\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R}\ ,\ \ \alpha_1+\alpha_2=1\ :$

$$\langle\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{a}\rangle=\alpha\ ,\quad \text{i.e.}\ \ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{H}$$

であるから，$\boldsymbol{H}$はアフィン集合である．次に,

$$\boldsymbol{S}=\{\lambda\boldsymbol{a}\mid\lambda(\neq 0)\in\boldsymbol{R}\}\ ,\quad \dim\boldsymbol{S}=1\ ,$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{S}^\perp=\{\boldsymbol{y}\mid\langle\boldsymbol{y},\ \lambda\boldsymbol{a}\rangle=0\ ,\quad \lambda(\neq 0)\in\boldsymbol{R}\}=\{\boldsymbol{y}\mid\langle\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{a}\rangle=0\}$$

とおく．注意4により，$\boldsymbol{L}$ は線形部分空間であり，また，定理12及び定理13

1)　空集合は -1 次元アフィン集合であると規約する.

により，$\dim \boldsymbol{L}=n-1$．最後に，

$$\exists \boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^n : \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle=\alpha .$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \exists \boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^n : \boldsymbol{H}&=\{\boldsymbol{x}\mid\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\rangle=\alpha\}=\{\boldsymbol{x}\mid\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}\rangle=\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle\}\\ &=\{\boldsymbol{x}\mid\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle=0\}=\{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b}\mid\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}\rangle=0\}\\ &=\{\boldsymbol{y}\mid\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}\rangle=0\}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{b}.\quad \text{i.e. } \boldsymbol{H}\,/\!/\,\boldsymbol{L}.\ \|\end{aligned}$$

定理25　集合 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i)　$\boldsymbol{A}$ は $r(\in \boldsymbol{Z}, r<n)$ 次元アフィン集合である．

(ii)　$\boldsymbol{A}$ は，あるベクトル $\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^{n-r}(r\in\boldsymbol{Z}, r<n)$ と $n-r$ 個の1次独立なベクトル $\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_{n-r}\in\boldsymbol{R}^n$ を行とする $(n-r, n)$ 型行列 M によって，$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{x}\mid M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$ と表される．

証明　(i)⇒(ii)．定理23に留意して，$\boldsymbol{A}$ に平行な r 次元線形部分空間を $\boldsymbol{L}\subset\boldsymbol{R}^n$，すなわち，

$$\dim \boldsymbol{L}=r,\quad \exists \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{a}$$

とする．定理12により，$\boldsymbol{L}$ の直交補空間 $\boldsymbol{L}^{\perp}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対しては，$\dim\boldsymbol{L}^{\perp}=n-r$ であるから，$\boldsymbol{L}^{\perp}$ の基底 $\{\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_{n-r}\}$ を構成するベクトルを行とする $(n-r, n)$ 型行列を M とすると，

$$\boldsymbol{L}=\{\boldsymbol{y}\mid\forall \boldsymbol{m}_i(1\leqq i\leqq n-r) : \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{m}_i\rangle=0\}=\{\boldsymbol{y}\mid M\boldsymbol{y}=0\}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \boldsymbol{A}&=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{a}=\{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}\mid M\boldsymbol{y}=0\}\\ &=\{\boldsymbol{x}\mid M(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0\}=\{\boldsymbol{x}\mid M\boldsymbol{x}=M\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{b}\}.\end{aligned}$$

(ii)⇒(i)．$\boldsymbol{A}$ がアフィン集合であることは明らかであるので，$\dim\boldsymbol{A}=r$ を示す．

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A}&=\{\boldsymbol{x}\mid M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}=\{\boldsymbol{x}\mid M\boldsymbol{x}=M\boldsymbol{a}\}=\{\boldsymbol{x}\mid M(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=0\}\\ &=\{\boldsymbol{y}+\boldsymbol{a}\mid M\boldsymbol{y}=0\}=\{\boldsymbol{y}\mid M\boldsymbol{y}=0\}+\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{L}+\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{L}$ は線形部分空間であるが，連立1次方程式に関する基本定理[1]により，$\dim\boldsymbol{L}=r$. ‖

---

1)　cf. p. 112.

系 $r(\in \boldsymbol{Z}, r<n)$ 次元アフィン集合 $\boldsymbol{A}\subset \boldsymbol{R}^n$ は $n-r$ 個の超平面の共通部分として表すことができる.

証明 定理25(ii)の記号をそのまま使用する. $\boldsymbol{b}=(\beta_1, \cdots, \beta_{n-r})'\in \boldsymbol{R}^{n-r}$ とすると,

$$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{x}\,|\,M\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}=\{\boldsymbol{x}\,|\,\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{m}_i\rangle=\beta_i,\ \ 1\leqq i\leqq n-r\}$$

$$=\cap_{i=1}^{n-r}\{\boldsymbol{x}\,|\,\langle \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{m}_i\rangle=\beta_i\}.\ \|$$

定義19 アフィン独立

$k+1(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in \boldsymbol{R}^n$ は, 集合 $\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ のアフィン包 $\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ の次元が $k(\in \boldsymbol{Z})$ であるとき, アフィン独立であるという.

定理26 $k+1(\in \boldsymbol{N})$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in \boldsymbol{R}^n$ に対して, 次の(i)(ii)(iii)は同値である.

(i) $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ はアフィン独立である.

(ii) $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0$ は1次独立である.

(iii) $\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ の各ベクトル $\boldsymbol{x}$ は, $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ の1意的なアフィン1次結合

$$\boldsymbol{x}=\textstyle\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i,\quad \alpha_i=\alpha_i(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{R},\quad \sum_{i=0}^{k}\alpha_i=1$$

として表すことができる.

証明 (i)⇔(ii). 定理21とアフィン集合の次元の定義により, 明らかである.

(ii)⇒(iii). 定理2及び定理21により, 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ は1意的なアフィン1次結合

$$\boldsymbol{x}=\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i,$$

$$\alpha_0=1-\textstyle\sum_{i=1}^{k}\alpha_i,\quad \alpha_i=\alpha_i(\boldsymbol{x})\in \boldsymbol{R}$$

として表すことができる.

(iii)⇒(ii). (ii)を否定すると(iii)に矛盾することを示す.

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)\neq\boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x}=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)$$

$$=\left(\alpha_0-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\right)\boldsymbol{x}_0+\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i+\lambda_i)\boldsymbol{x}_i, \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_k)\neq\boldsymbol{0}. \ \|$$

系 $k(\in\boldsymbol{Z})$ 次元アフィン集合 $A\subset\boldsymbol{R}^n$ と A の $k+1$ 個のアフィン独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}\subset\boldsymbol{R}^n$ に対して，次の関係が成立する．

$$A=\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}.$$

証明 定理23により，$A-\boldsymbol{x}_0$ は k 次元線形部分空間である．定理26により，k 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0\in A-\boldsymbol{x}_0$ は1次独立であるから，$\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0\}$ は $A-\boldsymbol{x}_0$ の基底であり，注意1及び定理20系により，

$$A-\boldsymbol{x}_0=\mathcal{L}\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0\}=\mathcal{A}\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0\}$$

である．よって，定理21により結論を得る．‖

定義20 アフィン変換・アフィン関数

関数 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ は，

$$\forall\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n\forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}, \quad \alpha_1+\alpha_2=1:$$

$$g(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)=\alpha_1 g(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 g(\boldsymbol{x}_2)$$

ならば，アフィン変換またはアフィン関数であるという．

注意8 アフィン変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ に対して，次の関係が成立する．

$$\forall k\in\boldsymbol{N}\forall\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^n\forall\alpha_1, \cdots, \alpha_k\in\boldsymbol{R}, \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1:$$

$$g\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i g(\boldsymbol{x}_i).$$

定理27 関数 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ に対して，次の(i)(ii)は同値である．

(i) g はアフィン変換である．

(ii) 関数 $h:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$, $h(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{0})$, は線形変換である．

証明 (i)⇒(ii)． $\forall\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n\forall\alpha_1, \alpha_2\in\boldsymbol{R}, \ \alpha_1+\alpha_2\neq 0:$

$$h(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)=g(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)-g(\boldsymbol{0})$$

$$=g\left[(\alpha_1+\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\boldsymbol{x}_1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\boldsymbol{x}_2\right)+(1-\alpha_1-\alpha_2)\boldsymbol{0}\right]-g(\boldsymbol{0})$$

$$=\alpha_1 g(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 g(\boldsymbol{x}_2)-(\alpha_1+\alpha_2)g(\boldsymbol{0})=\alpha_1 h(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 h(\boldsymbol{x}_2) .$$

なお，$\alpha_1+\alpha_2=0$ の場合は，

$$\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{R}^n : \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2=\alpha_1(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)\equiv\alpha_1\boldsymbol{y},\ \ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n$$

となるから，上記証明において $\alpha_2=0$ という場合に相当する．

（ii）⇒（i）．　$\forall \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2\in\boldsymbol{R}^n \forall\alpha_1,\ \alpha_2\in\boldsymbol{R},\ \ \alpha_1+\alpha_2=1$ ：

$$g(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)=h(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2)+g(\boldsymbol{0})$$
$$=\alpha_1[h(\boldsymbol{x}_1)+g(\boldsymbol{0})]+\alpha_2[h(\boldsymbol{x}_2)+g(\boldsymbol{0})]=\alpha_1 g(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 g(\boldsymbol{x}_2) . \ \|$$

定理28　それぞれが $k+1(\in\boldsymbol{N})$ 個からなる2組のアフィン独立なベクトル $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\in\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k\in\boldsymbol{R}^n$ に対して，$g(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0$，$g(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{y}_1, \cdots,$ $g(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{y}_k$ となるような，$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ の上への1対1（全単射）アフィン変換 $g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ が存在する．特に，$k=n$ ならば，g は1意的である．

証明　必要ならば所与のアフィン独立なベクトルに $n-k$ 個のベクトルを追加して，新しい $n+1$ 個のアフィン独立なベクトルを定義できるので，一般性を失うことなく，$k=n$ としてよい．さて，n 次の正則行列 A, B をそれぞれ $A=[\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0]$，$B=[\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_0, \cdots, \boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{y}_0]$ とし，$h:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ を

$$h(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x} ,\quad \text{ただし，}\ P\equiv BA^{-1}$$

とおくと，h は，$\boldsymbol{R}^n$ の基底を $\{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_0\}$ から $\{\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_0, \cdots, \boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{y}_0\}$ に変換し，

$$\forall \boldsymbol{x}_i(1\leqq i\leqq k)\ :\ h(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_0)=h(\boldsymbol{x}_i)-h(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{y}_0 ,$$
$$\text{i.e. } \boldsymbol{y}_i-h(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{y}_0-h(\boldsymbol{x}_0) ,$$

を満たす $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ の上への1意的な1対1線形変換である．そこで，定理27を考慮して，

$$g(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{y}_0-h(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0-P\boldsymbol{x}_0 ,\quad P=BA^{-1}$$
$$=\boldsymbol{y}_i-h(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{y}_i-P\boldsymbol{x}_i ,\quad 1\leqq i\leqq k=n ,$$

とおいて，$g:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ を

$$g(\boldsymbol{x})=h(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{0})=P(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{y}_0$$

によって定義すると，g は求めるアフィン変換である．‖

系　2つの $k(\in \boldsymbol{Z})$ 次元アフィン集合 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2 \subset \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$g(\boldsymbol{A}_1) \equiv \{\boldsymbol{y} \mid \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}_1 : \boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{x})\}=\boldsymbol{A}_2$$

となるような，$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ の上への1対1(全単射)アフィン変換 $g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ が存在する．

証明　$k+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \boldsymbol{A}_1$ と $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k \in \boldsymbol{A}_2$ をそれぞれアフィン独立なベクトルとすると，定理26系により，

$$\boldsymbol{A}_1=\mathcal{A}\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}, \quad \boldsymbol{A}_2=\mathcal{A}\{\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_k\}.$$

このとき，定理28によれば，

$$\forall \boldsymbol{x}_i (0 \leqq i \leqq k) : g(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{y}_i$$

となるような，$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ の上への1対1アフィン変換 $g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ が存在する．よって，この g に対して，$g(\boldsymbol{A}_1)=\boldsymbol{A}_2$ を示せばよい．そこで，任意の $\boldsymbol{y} \in g(\boldsymbol{A}_1)$ と任意の $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A}_2$ をそれぞれ

$$\boldsymbol{y}=g(\textstyle\sum_{i=0}^k \alpha_i \boldsymbol{x}_i), \quad \alpha_i=\alpha_i(\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R}, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i=1,$$

$$\boldsymbol{z}=\textstyle\sum_{i=0}^k \beta_i \boldsymbol{y}_i, \quad \beta_i=\beta_i(\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{R}, \quad \sum_{i=0}^k \beta_i=1,$$

とおくと，

$$\boldsymbol{y}=\textstyle\sum_{i=0}^k \alpha_i g(\boldsymbol{x}_i)=\sum_{i=0}^k \alpha_i \boldsymbol{y}_i, \quad \alpha_i \in \boldsymbol{R}, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i=1,$$

$$\boldsymbol{z}=\textstyle\sum_{i=0}^k \beta_i g(\boldsymbol{x}_i)=g(\sum_{i=0}^k \beta_i \boldsymbol{x}_i), \quad \beta_i \in \boldsymbol{R}, \quad \sum_{i=0}^k \beta_i=1.$$

$$\therefore \quad \forall \boldsymbol{y} \in g(\boldsymbol{A}_1) : \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}_2. \quad \forall \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A}_2 : \boldsymbol{z} \in g(\boldsymbol{A}_1).$$ ‖

参 考 文 献

〔1〕 古屋　茂『行列と行列式』培風館，1959年.
〔2〕 入江昭二『線形数学 I』共立出版，1966年.
〔3〕 Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

〔4〕 佐武一郎『行列と行列式』裳華房，1958年——改題増補『線型代数学』1974年——.
〔5〕 Stoer, J.-Witzgall, C., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions* I, Springer-Verlag, Berlin, 1970.