集計問題におけるマクロ係数の OLS 推定量について*

根　岸　紳

§0．マクロ計量経済モデルにおける係数推定には，最小二乗推定の方法が広く用いられている．このマクロモデルは，その基礎にミクロモデルをもち，ミクロモデルの類推によって，マクロ経済変数間の関係を示している．このとき，タイルによって示されたように，マクロ係数とミクロ係数との関係は複雑なものである．タイルは，ミクロモデルを集計することによって得られたマクロモデルのもとで，マクロ係数に「集計バイアス」が生じることを導出した[1)]．本稿では，ミクロ関係式がゼルナーの SUR モデル[2)]にしたがっていると想定したとき，タイルと同じ集計問題の枠組の中で，マクロ係数の最小二乗推定量（OLSE）がどのような性質をもつのかを考察する．また，集計バイアスがゼロになるための条件が成立しているとき，ミクロ係数の積み上げによって得られたマクロ係数から集計バイアスを除いた「真値」マクロ係数を想定するときにのみ，マクロ係数の OLSE の優位性が得られることを明らかにする．これらの考察は，ミクロ関係式の説明変数のデータが確定量であるという仮定と計量経済モデルでは妥当する場合の多い確率変数であるという興味のある仮定との 2 つのもとで行なう．しかし，確定量であるという仮定のもとに得た結果は，確率変数で

* 第46回日本統計学会での筆者報告「集計の斉合性に関する仮説検定方式」の中で，この問題に少ししかふれなかったので，本稿において，体系的なアプローチを試みる．なお，学会報告の中心は拙稿〔8〕にしたがっている．
1)　拙稿〔8〕pp. 106—107．参照．
2)　Zellner〔11〕．本稿の§1にこのモデルの説明がある．

ある場合にもその重要性を失わないことが示されるだろう.[1)]

本稿では，それぞれの経済変数は平均からの偏差であるとし，定数項を考察の対象からはずし，限界係数のみに注目する.[2)]

§1. 経済理論により，第 i ミクロ経済主体のミクロ関係式が次のように成立するとしよう.

$$y_i = X_i\beta_i + u_i \quad i=1,\cdots,m \tag{1-1}$$

y_i は被説明変数の $T\times1$ 観測値ベクトル，X_i は k 個の説明変数の $T\times k$ 観測値行列，β_i は推定されるべきミクロ係数の $k\times1$ ベクトル，u_i は観測不能な $T\times1$ 攪乱ベクトル，そして m はミクロ的な経済主体の数である.

(1-1)を次のようにかく.

$$y = X\beta + u$$

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_m \end{pmatrix} \quad \beta=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{1-2}$$

このモデルに次の仮定をおく.

$$\mathrm{rank}(X_i)=k \quad E(u)=0 \quad E(X_i'u_j)=0 \quad k<T \tag{1-3}$$

X_i：すべての要素が一様有界な確定変数行列

$$i,j=1,\cdots,m$$

さらに，攪乱項の共分散行列を次のように想定する.

$$\mathrm{Cov}(u)=\begin{pmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I\cdots & \sigma_{1m}I \\ \vdots & \ddots & \\ \sigma_{m1}I & & \sigma_{mm}I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots\ \ddots & \\ \sigma_{m1} & \sigma_{mm} \end{pmatrix} \otimes I_T$$

$$= \Sigma\otimes I_T \qquad \Sigma=(\sigma_{ij}) \tag{1-4}$$

これは標本 y がランダム標本であるので，攪乱項の系列相関は認めていない.

---

1) ただし，攪乱項は両仮定で大きく異なる. したがって，攪乱項の共分散行列の内容も違ってくる. これらは以下の節で明らかにされる.

2) 定数項を含めて集計問題を考えるとき，定数項と限界係数とのとり扱いが異なり，議論が複雑になる. また，多くの計量モデルの場合，限界係数が特に注目され，定数項はあまり関心の対象とはなっていない.

しかし，異なる経済主体で分散が不均一[1]であり，さらに異なる主体の攪乱項の間に同期の相関を認めている．これらの仮定は，より一般的でかつ現実的であり，この仮定の下での(1-2)のモデルは，ゼルナーの SUR モデル[2]として知られている．われわれは，本稿において，ミクロ関係式全体をこの枠組でとらえる．この SUR モデルでのミクロ係数 β の最小二乗推定量（OLSE）は，不偏で一致性をもつが有効推定量ではなく，有効推定量はエイトキン一般化最小二乗推定量として知られている[3]．

さて，マクロ変数は，通常の集計方法である単純和として得られるとする．

$$y_a=\sum^m y_i \quad , \quad X_a=\sum^m X_i \tag{1-5}$$

ミクロ関係式の類推より，マクロ変数に次のような経済関係を想定する．

$$y_a=X_a\beta_a+u_a \tag{1-6}$$

β_aは推定されるべきマクロ係数ベクトルで，u_a は $T\times1$ マクロ攪乱ベクトルである．(1-6)は実際的な手続きと一致しており，経済的に意味のある関係式として分析対象となるものである．

このとき，マクロ係数 β_a の OLSE はどんな性質をもつのであろうか．β_a の OLSE を $\hat{\beta}_a$ とし，(1-5)，(1-1)を利用すれば

$$\hat{\beta}_a=(X_a'X_a)^{-1}X_a'y_a=\sum B_i\beta_i+(X_a'X_a)^{-1}X_a'\sum u_i \tag{1-7}$$

ただし $B_i\equiv(X_a'X_a)^{-1}X_a'X_i$

となり，期待値をとれば

$$E(\hat{\beta}_a)=\sum B_i\beta_i \tag{1-8}$$

となる．また(1-7)の B_i の形より

$$X_i=X_aB_i+V_i \quad , \quad V_i=(I-X_a(X_a'X_a)^{-1}X_a')X_i \tag{1-9}$$

---

1) 設備投資関数を例にとると，各企業（あるいは各産業）の設備投資の規模が異なっているので，分散も異なると考えるのが現実的である．

2) Zellner〔11〕はこのモデルを “Seemingly Unrelated Regression” モデルと呼んでいる．

3) Dhrymes〔3〕pp. 150—167，Zellner〔11〕に詳しい．

が成り立ち，これと(1-5)，(1-1)より

$$y_a=\sum(X_i\beta_i+u_i)=X_a\sum B_i\beta_i+\sum V_i\beta_i+\sum u_i \tag{1-10}$$

となり，(1-6)と比較すれば

$$\begin{aligned}\beta_a&=\sum B_i\beta_i,\\ u_a&=\sum V_i\beta_i+\sum u_i\end{aligned} \tag{1-11}$$

となる．このことによって，(1-8)より，マクロ係数の OLSE $\hat{\beta}_a$ は不偏推定量であることがわかる．

ところが，(1-6) のマクロ関係式は少し奇妙なモデルとなっている．というのは，マクロ攪乱項 u_a の期待値が，通常とは異なって，つねにゼロベクトルにならないのである．すなわち(1-11)より

$$E(u_a)=\sum V_i\beta_i \tag{1-12}$$

である．しかし，$X_a'V_i$ が(1-9) よりゼロ行列になることを利用すれば，マクロの説明変数と攪乱項との相関が

$$E(X_a'u_a)=\sum X_a'V_i\beta_i+EX_a'\sum u_i=0 \tag{1-13}$$

となり，$\hat{\beta}_a$ は不偏推定量となっているのである．すなわち，(1-6)より，$\hat{\beta}_a$ は

$$\hat{\beta}_a=(X_a'X_a)^{-1}X_a'y_a=\beta_a+(X_a'X_a)^{-1}X_a'u_a \tag{1-14}$$

となり，期待値をとると

$$E\hat{\beta}_a=\beta_a+(X_a'X_a)^{-1}E(X_a'u_a)=\beta_a \tag{1-15}$$

となるのである．

次に一致性をみるため，次のような確率極限をとると

$$\operatorname{plim}(\hat{\beta}_a-\beta_a)=\operatorname{plim}\left[\left(\frac{X_a'X_a}{T}\right)^{-1}\left(\frac{X_a'u_a}{T}\right)\right] \tag{1-16}$$

となり，X_a は確定変数行列であるので

$$\operatorname{plim}(\hat{\beta}_a-\beta_a)=\lim\left(\frac{X_a'X_a}{T}\right)^{-1}\operatorname{plim}\left(\frac{X_a'u_a}{T}\right) \tag{1-17}$$

となる．X_a の要素は一様有界であるので[1)]，$\lim(X_a'X_a/T)^{-1}$ は存在し，plim

1) (1-3) の仮定より，X_i の要素は一様有界であるので，X_i の有限和である X_a の要素もまた一様有界である．

$(X_a'u_a/T)$も(1-13)よりゼロベクトルに収束する．よって

$$\text{plim}\hat{\beta}_a=\beta_a \tag{1-18}$$

が成立し，$\hat{\beta}_a$ は一致推定量である．

次に有効性をみるため，$\hat{\beta}_a$ の共分散行列を考えると

$$E(\hat{\beta}_a-\beta_a)(\hat{\beta}_a-\beta_a)'=E(X_a'X_a)^{-1}X_a'u_au_a'X_a(X_a'X_a)^{-1}$$
$$=(X_a'X_a)^{-1}X_a'E(\sum u_i\sum u_i')X_a(X_a'X_a)^{-1}$$
$$=\sum_{i,j}\sigma_{ij}(X_a'X_a)^{-1} \tag{1-19}$$

となり，マルコフ定理[1]にしたがって，$\hat{\beta}_a$ は有効推定量であるといえる．これは，マクロ攪乱項 u_a のゼロのまわりの第2次積率行列が

$$E(u_au_a')=E(\sum V_i\beta_i+\sum u_i)(\sum V_i\beta_i+\sum u_i)'$$
$$=(\sum V_i\beta_i)(\sum V_i\beta_i)'+\sum_{i,j}\sigma_{ij}I \tag{1-20}$$

である[2]にもかかわらず，(1-13)より，マクロの説明変数と攪乱項との無相関によって，(1-19)の2つめの等号が成立し，$\hat{\beta}_a$ は有効性をもつことができるのである．ここで注意することは，$E(u_au_a')$ がマクロ攪乱項 u_a の共分散行列ではないということである．この共分散行列は，(1-12)を利用することによって

$$\text{Cov}(u_a)=E[u_a-E(u_a)][u_a-E(u_a)]'=E(\sum u_i)(\sum u_i)'$$
$$=\sum_{i,j}\sigma_{ij}I \tag{1-21}$$

である．

以上によって，(1-11)のごとくマクロ係数 β_a が $\sum B_i\beta_i$ に等しいと想定したとき，β_a の OLSE が不偏で一致性をもち，そして有効な推定量であることが確認された．

§2. マクロ関係式の統計的な係数が，基礎となっているミクロ関係式におけ

---

1) 例えば，Dhrymes〔3〕p. 147 参照．

2) 2つめの等号は $E(\sum V_i\beta_i)(\sum u_i)'=\sum V_i\beta_i\sum E(u_i')=0$ による．また $(\sum V_i\beta_i)(\sum V_i\beta_i)'$ は非負定符号行列である．

る統計的な係数に対して持つ関係は，§1の(1-11)の上式より明らかなように，マクロ係数が，一般に，それに対応するミクロ係数と対応しないミクロ係数の両方に依存していることである．しかし，マクロ係数，例えばマクロの限界消費性向は，ミクロ経済主体（家計）の限界消費性向の集合のみから決定されると想定するのが合理的であろう．

そこで，(1-11)の上式を2つの部分に分け，対応しないミクロ係数に対する影響を集計バイアスと呼び，次のように定義する．

$$\beta_a = \sum \Lambda_i\beta_i + \sum (B_i - \Lambda_i)\beta_i \tag{2-1}$$

Λ_i は B_i の対角要素からなる対角行列とし，$\sum\Lambda_i = I$，$\sum(B_i - \Lambda_i) = 0$ である．右辺の第1項をマクロ係数の「真値」と考え，第2項を集計バイアスと定義する．

本節では，「真値」マクロ係数を想定し，マクロ係数 β_a を次のように変更する．

$$\beta_a = \sum \Lambda_i\beta_i \tag{2-2}$$

このとき，マクロ攪乱項 u_a は

$$u_a = X_a \sum (B_i - \Lambda_i)\beta_i + \sum V_i\beta_i + \sum u_i \tag{2-3}$$

となる．また，集計バイアスを統計的バイアスと解釈すれば，マクロ係数の OLSE $\hat{\beta}_a$ は(1-8)を利用して

$$E(\hat{\beta}_a) - \beta_a = \sum (B_i - \Lambda_i)\beta_i \tag{2-4}$$

なるバイアスをもつことになり，$\hat{\beta}_a$ は不偏推定量とはならない．$\hat{\beta}_a$ が不偏推定量になるためには，集計バイアスがゼロベクトルになる必要がある．このことが成立しているとき，「係数に関して集計が斉合的である」と表現されるのである．

この集計バイアスがゼロになる条件，あるいは，集計が斉合的になる条件には，通常，2種類が考えられている．

まず第1に，モデルの説明変数間にまったく制約のない場合

（Ⅰ） すべてのミクロ係数の傾き（限界係数）が等しい

というケースが，斉合的条件成立のための必要十分条件である.[1)]

第2に，説明変数間に制約を課した場合

（Ⅱ） すべてのミクロ単位（ミクロ経済主体）に対して，§1の（1-9)の特別ケースとして

$$X_i = X_a \Lambda_i + V_i,\quad \Lambda_i：\text{対角行列}$$

$$i = 1, \cdots, m$$

が成り立つ

というケースは，斉合的条件成立のための十分条件である.[2)]

この2つのケースが成立するとき，$\hat{\beta}_a$ は不偏推定量となる．また，一般に，$\hat{\beta}_a$ の共分散行列は

$$E(\hat{\beta}_a - \beta_a)(\hat{\beta}_a - \beta_a)' = (\sum(B_i - \Lambda_i)\beta_i)(\sum(B_i - \Lambda_i)\beta_i)' + \sum_{i,j}\sigma_{ij} I \quad (2\text{-}5)$$

となり,[3)] 右辺第1項の行列は非負定符号である．2つの斉合的条件(Ⅰ)(Ⅱ)が成立するとき，右辺第1項はゼロ行列になり，マルコフ定理にしたがい，$\hat{\beta}_a$ は有効性をもつ.

1) Green〔6〕pp. 39—40. 切片（定数項）は各ミクロ単位で異なっていても，斉合的条件は成立する．それゆえ，§0でふれたように，経済変数を平均からの偏差と変換し，限界係数のみに分析を限定したほうが良い.

2) Green〔6〕pp. 101—102. Green のいう斉合的条件は限界係数に関してだけではなく，確率モデルを想定している以上，$u_a = \sum u_i$ が成立するケースをつけ加えた．これが成立するためには，(2-3) より，(Ⅱ)の条件の他に，すべての i について $V_i\beta_i = 0$ の条件が必要となる．もっとも(Ⅰ)のケースではこの $u_a = \sum u_i$ は成立している．最近の研究において，係数の斉合性条件は厳しいのでこれには注目せず，ミクロ，マクロ攪乱項に目を向けて，マクロ被説明変数の予測（あてはまり）の良さに関する，ミクロ・レベルからの積み上げによるものとマクロ・レベルそのものからとの相対的な比較が，理論的にも実証的にも多く行なわれている．例えば，統計理論的あるいはシミュレーション実験による分析には Orcutt, Watts, & Edwards〔9〕, Edwards & Orcutt〔5〕, Aigner & Goldfeld〔1〕etc. があり，実証研究には Dunn, Williams, & DeChaine〔4〕がある.

3) 等号は $E(\sum(B_i - \Lambda_i)\beta_i)((X_a'X_a)^{-1}X_a'\sum u_i)'$ が仮定（1-4）よりゼロ行列になることによって成立する.

以上のような想定の下では，マクロ係数の OLSE $\hat{\beta}_a$ は一般的に不偏でなく，そして明らかに有効推定量ではない．この OLSE が不偏で一致そして有効性をもつのは，「集計が斉合的である」あるいは「集計バイアスがゼロである」ときに限るのである．ただし，マクロ攪乱項 u_a の共分散行列はこのことに関係なしに $\sum_{i,j}\sigma_{ij}I$ である．

このような分析の視角は，ミクロ係数が確率的である[1)]という仮定の下での，Akkina［2］が行なった，集計問題におけるマクロ係数の OLSE の分析と類似している．彼はこの仮定をもっと限定して，集計問題で一番やっかいな集計バイアスを取り除くため，すべてのミクロ係数が同一の期待値と同一の分散をもって独立に分布している確率変数であると想定している．そして，このとき，マクロ係数の OLSE は有効推定量であることを証明したのである．確かに，この場合，集計バイアスを考えることなしに集計問題の分析を進めることができ，この枠組の研究もある[2)]．しかし，同一期待値，同一分散の仮定（特に前者）は，本節の斉合的ケース（Ⅰ）と同程度に制約的であり，この仮定での分析は，多くの経済問題に対して満足のいく武器になりそうにない．

（Ⅱ）の斉合的条件は，§ 1，(1-9)の B_i がすべての i に対して対角行列になる場合であり，（Ⅰ）のケースほどではないにしても，かなり厳しい条件といえる．拙稿［8］において，この（Ⅱ）が成立するための，ミクロ説明変数間の関係を示す十分条件の1つを導出した．しかし，拙稿で注意したように，（Ⅱ）や§ 1 の (1-9) のケースは推定された標本回帰モデル[3)]であり，その関係は純粋に記述的な現象を示したものであるので，そのモデルの基礎となる母集団モデル

1) 係数が確率的である回帰モデルのことを RCR（Random Coefffficient Regression）モデルと呼び，Swamy〔10〕は一般的な RCR モデル下で体系的なアプローチを行なっており，集計問題にも多くの示唆を与えている．

2) Kuh〔7〕は RCR モデルの下で，ミクロの単位数 m が時間とともに増加する場合，マクロ係数の OLSE の分散が減少することを証明した．

3) X_i が確定変数行列であるという（1—3）の仮定より，B_i，Λ_i は推定値行列，V_i は残差行列であるが，ともに確定行列である．

を想定し分析をすすめる必要がある．もちろん，拙稿で導出した十分条件もこの母集団モデルを仮定している．この母集団モデルを構築するためには X_i が確率変数行列であると想定しなければならない．

さて，母集団モデルを次のように表わそう．

$$X_i = X_a \Gamma_i + W_i,\quad X_a = \sum X_i,\quad i=1,\cdots,m \tag{2-6}$$

ただし，Γ_i は定数行列，W_i は攪乱（確率変数）行列で，その期待値はゼロ行列であると仮定する．[1]

ここで，この (2-6) なるモデルとその仮定が妥当なものであるのか調べておこう．

$E(W_i)=0$ という仮定は $E(W_i|X_a)$ がゼロ行列と仮定できるかどうかを吟味しておけばよい．[2] しかし，やっかいなことに，一般的に $E(W_i|X_a)=0$ は成立しない．なぜなら，確率変数であるミクロ説明変数の，マクロ説明変数によって条件づけられた真なる平均関数は線形ではないから，W_i は想定バイアスを含み，ゼロの期待値をもたなくなる．そこで，ミクロ説明変数が多変量正規分布にしたがうことにすれば，正規分布の特性である「条件期待値の 1 次性」[3] によって，モデルは(2-6)のように線形関係で正しく特定化され，$E(W_i|X_a)=0$ が成立するのである．そこで，以下の展開で，(2-6)なるモデルを考えるとき，正規性が暗黙のうちに仮定されているものとする．

次に，(2-6) のモデルの説明変数となっているマクロ説明変数行列 X_a は確率変数行列の和であるが，この X_a の性質について考察する．(2-6) の両辺で期待値をとり，$E(W_i)=0$ を考慮すれば

$$E(X_i) = E(X_a \Gamma_i) \tag{2-7}$$

となる．さらに総和をとり，E オペレータの性質を使えば

1) Aigner & Goldfeld〔1〕p. 115. に，この (2—6) なるモデルの吟味がなされている．
2) $E(W_i|X_a)=0$ ならば当然 $E(W_i)=0$ であるが，逆は必ずしも成立しない．
3) x の条件分布の平均は，条件として指定された y の値の 1 次関数である．すなわち，$E(x|y)=\alpha+\beta y$ で，これは正規分布の非常に重要な特性である．

$$E(\sum X_i)=EX_a \sum \Gamma_i \tag{2-8}$$

となり，$X_a=\sum X_i$ と Γ_i の性質より

$$E(X_a)(I-\sum \Gamma_i)=0 \tag{2-9}$$

が成立する．

§1の(1-6)において，確定変数行列であるマクロ説明変数行列の階数は k（すなわちフルランク）であると暗黙のうちに仮定されている.[1] この仮定は，説明変数が確率的な場合にも少し表現をかえて維持される．すなわち，X_a の階数は，確率1をもって，フルランク（$=k<T$）であると仮定する．当然，この仮定によって，X_a の期待値もフルランクになる．$E(X_a)$ がフルランクであるとき，(2-9)が成立するためには，$(I-\sum\Gamma_i)$ がゼロ行列でなければならない．この理由は次のとおりである．

いま，AとBを，それぞれ $T\times k$，$k\times k$ なる行列と考え，Aの階数はフルランク（$=k<T$）であるとする．このもとで，$AB=0$ が成りたつとき，Bは要素がすべてゼロの行列でなければならない．なぜなら，Aはk個の $T\times 1$ ベクトルをもち，このベクトル間の関係は，仮定より，1次独立であるからである．このとき，Bの任意の列ベクトルがゼロベクトルになるのである．もっともA，Bともにゼロ行列でなくとも，$AB=0$ は成立する．しかし，このとき，A，Bの行列の階数はどちらもフルランクではない．

さて，$\sum\Gamma_i=I$ が成りたてば，(2-6)より $\sum W_i=0$ がえられ，$X_a=\sum X_i$ は退化した確率変数（あるいは確定変数）行列である．

次節では，この(2-6)なるモデルの下で，マクロ係数の OLSE は一体どんな性質をもつのか，また，拙稿［8］で導出した十分条件が成立する場合，マクロ係数の OLSE の性質はどのような変化をするのか，について分析する．

§3． ミクロ説明変数が確率的で前節の後半で展開した(2-6)の関係式をみたしているとき，マクロ係数の OLSE はいかなる性質をもってるのか，これが

1) ミクロ説明変数の階数については，(1—3) のごとく明示的に仮定されている．

本節のテーマである．

ミクロ説明変数が確率変数である場合にも，§1の(1-3)，(1-4)の仮定のかわりに次の仮定をおけば，SUR モデル下で，ミクロ説明変数が確定量であるときに得られたミクロ係数βの推定量の結果[1]と同一になる．

仮定(1)

確率1をもって，行列 $X_i, i=1, \cdots, m$, の階数は k である．

次に，u_i の条件分布は条件 X_j のいかんによらず

仮定(2)

$$E(u_i|X_j)=0 \quad i, j=1, \cdots, m$$

をもち[2]，共分散行列は§1の(1-4)のようにまとめて表現すると

仮定(3)

$$E(uu'|X)=\Sigma\otimes I_T \quad \Sigma=(\sigma_{ij})$$

をもつ．なお，X_j のいかんにかかわらず $E(u_i|X_j)=0$ ならば，u_i と X_j との共分散は0になる．

さて，(2-6)の関係式を再述すると

$$X_i=X_a\Gamma_i+W_i, \ E(W_i)=0 \quad i=1, \cdots, m \tag{3-1}$$

X_a：確定変数行列 Γ_i：係数行列

である．このとき，(3-1)，(1-1)，(1-5)，(1-6)より，マクロ関係式は

$$\begin{aligned} y_a &= \sum(X_i\beta_i+u_i)=X_a\sum\Gamma_i\beta_i+\sum W_i\beta_i+\sum u_i \\ &=X_a\beta_a+u_a \end{aligned}$$

となり，§1と同じ枠組にしたがえば

$$\begin{aligned} \beta_a &= \sum\Gamma_i\beta_i \\ u_a &= \sum W_i\beta_i+\sum u_i \end{aligned} \tag{3-2}$$

---

1) ミクロ係数βの OLSE は不偏で一致性をもつが有効性はえられず，有効推定量はエイトキン推定量である，という「結果」である．

2) X_j のいかんにかかわらず仮定(2)が成立するということは，ミクロ回帰方程式 (1—1) あるいは (1—2) の推論にとって基本的である．なぜなら，この仮定がみたされないときには，ミクロ係数βの OLSE にバイアスが生じる．

となる．このことより $E(u_a)=0$ が成りたち，§1の(1-12)とは異なり，通常のマクロモデルの想定に一致している．そして，マクロ係数 β_a の OLSE は

$$\hat{\beta}_a=(X_a'X_a)^{-1}X_a'y_a=\beta_a+(X_a'X_a)^{-1}X_a'u_a$$
$$=\beta_a+(X_a'X_a)^{-1}X_a'(\sum W_i\beta_i+\sum u_i) \tag{3-3}$$

となる．またマクロ関係式の説明変数行列 X_a は，X_a の分布が前節より明らかなように退化しているので，すなわち X_a がただ1組の値だけしかとれないので，確定的な回帰変数という想定に戻ったことになる．そこで $\hat{\beta}_a$ の期待値は

$$E(\hat{\beta}_a)=\beta_a+(X_a'X_a)^{-1}X_a'(\sum E(W_i)\beta_i+\sum E(u_i))$$
$$=\beta_a \tag{3-4}$$

となり，$\hat{\beta}_a$ は不偏推定量である．

次に一致性をみるため，[1] 確率極限をとると

$$\text{plim}(\hat{\beta}_a-\beta_a)=\text{plim}\left[\left(\frac{X_a'X_a}{T}\right)^{-1}\left(\frac{X_a'u_a}{T}\right)\right] \tag{3-5}$$

となり，X_a は確定変数行列であるので

$$\text{plim}(\hat{\beta}_a-\beta_a)=\lim\left(\frac{X_a'X_a}{T}\right)^{-1}\text{plim}\left(\frac{X_a'u_a}{T}\right) \tag{3-6}$$

となる．X_a の要素は有限な定数によって一様有界であると仮定すれば $\lim(X_a'X_a/T)^{-1}$ は存在し，$\text{plim}(X_a'u_a/T)$ は要素がマクロ説明変数とマクロ撹乱項の間の交叉積率の確率極限であるベクトルである．

$$E(X_a'u_a)=X_a'E(\sum W_i\beta_i+\sum u_i)=0 \tag{3-7}$$

より，$\text{plim}(X_a'u_a/T)=0$ と結論でき，(3-5)より

$$\text{plim}\hat{\beta}_a=\beta_a \tag{3-8}$$

といえる．すなわち $\hat{\beta}_a$ は一致推定量である．

次に，以下の展開に必要であるので，(3-1)の撹乱行列 W_i，$i=1,\cdots,m$，について仮定を追加する．このために(3-1)の X_i，Γ_i，W_i の第 l 列のみをとり

1) §1の方法と全く同じである．

だす．すなわち

$$x_{li}=X_a\gamma_{li}+w_{li} \quad l=1,\cdots,k \quad i=1,\cdots,m \tag{3-9}$$

であり，ただし x_{li}, w_{li} は $T\times1$ ベクトル，γ_{li} は $k\times1$ ベクトルである．ここで x_{li} はランダム標本であると考えれば

$$E(w_{li})=0, \qquad E(w_{li}w_{li}')=\sigma_{li}I \tag{3-10}$$

と想定でき，w_{li} は異時点間で無相関であり，（l，i）の組が異なれば分散は不均一であると仮定している．この(3-10)より

$$E(W_iW_i')=\sum_{l,i}\sigma_{li}I \tag{3-11}$$

となり，(3-1)の Γ_i の OLSE $\hat{\Gamma}_i$ はマルコフの定理より有効推定量であることがわかる．[1)]

攪乱ベクトル w_{li} について，さらにより多くの仮定を行なう．異なるミクロ単位（経済主体）間，また異なる説明変数間での相関について

$$E(w_{li}w_{hj}')=\sigma_{lhij}I \qquad \begin{matrix} l,h=1,\cdots,k \\ i,j=1,\cdots,m \end{matrix} \tag{3-12}$$

と仮定する．[2)] この仮定は，もちろん $l=h$, $i=j$ も含み，(3-11)の σ_{li} と(3-12)の σ_{llii} は同値である．この仮定は，(3-10)の仮定の他に，次の 3 ケースを想定している．1 つは，同一ミクロ単位内で異なる説明変数間に相関がある，例えば，1 家計の消費がその家計の所得と流動資産によって決定されると想定したとき，同一家計の所得の動きと流動資産の動きとに相関がある，というケースである．次に，異なったミクロ単位間で同じ説明変数どおしに相関が認められるケースで，例えば，ある家計の所得と他の家計の所得との間に相関がある場合である．最後は，異なったミクロ単位間で異なる説明変数間でも相関があるケースで，ある家計の所得と他の家計の流動資産とが従属して動いているケ

---

1) $\hat{\Gamma}_i=(X_a'X_a)^{-1}X_a'X_i=\Gamma_i+(X_a'X_a)^{-1}X_a'W_i$ より $E(\hat{\Gamma}_i)=\Gamma_i$，$E(X_a'W_i)=0$，$E(\hat{\Gamma}_i-\Gamma_i)(\hat{\Gamma}_i-\Gamma_i)'=E(X_a'X_a)^{-1}X_a'W_iW_i'X_a(X_a'X_a)^{-1}=\sum_{l,i}\sigma_{li}(X_a'X_a)^{-1}$ となり明らか．

2) (3—10) と同じく，異時点間の相関は認めていない．

ースである．

次に，マクロ攪乱項 u_a の共分散行列を考えよう．(3-2)，仮定(3)を利用すれば

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(u_a)=E(u_a u_a')&=E(\sum W_i\beta_i+\sum u_i)(\sum W_i\beta_i+\sum u_i)'\\&=E(\sum W_i\beta_i)(\sum W_i\beta_i)'+2E(\sum u_i)(\sum W_i\beta_i)'\\&\quad+\sum_{i,j}\sigma_{ij}I\end{aligned}\tag{3-14}$$

となる．攪乱行列 W_i に関する仮定より，最終式の第1項は非対角要素がすべてゼロになり，対角要素はすべて同一の値をもつことがわかる．このことを証明しよう．

いま第1項を次のように書きなおすと

$$\begin{aligned}E(\sum W_i\beta_i)(\sum W_i\beta_i)'&=E(\sum_{i,j} W_i\beta_i\beta_j'W_j')\\&=\sum_{i,j}E(W_i\beta_i\beta_j'W_j')\end{aligned}\tag{3-15}$$

となる．このとき，(3-15)の任意の行列 $W_i\beta_i\beta_j'W_j'$ の期待値に注目し，$\beta_i'=(\beta^1{}_i,\cdots,\beta^k{}_i)$，$w_{li}$ なるベクトルの t 番目の要素を $w_{li}(t)$ とすると，この行列の対角要素と非対角要素は次のようになる．

〔I〕 対角要素

$$E\left[\sum_{l=1}^{k}\beta^l{}_i w_{li}(t)\sum_{l=1}^{k}\beta^l{}_j w_{lj}(t)\right]\qquad t=1,\cdots,T\tag{3-16}$$

〔II〕 非対角要素

$$E\left[\sum_{l=1}^{k}\beta^l{}_i w_{li}(t)\sum_{l=1}^{k}\beta^l{}_j w_{lj}(s)\right]\qquad \begin{matrix}t\neq s\\ t,s=1,\cdots,T\end{matrix}\tag{3-17}$$

標本はランダムであるので，非対角要素はすべてゼロである．また，対角要素は(3-13)の仮定より

$$\sum_{l,h}^{k}\beta^l{}_i\beta^h{}_j\sigma_{lhij}\tag{3-18}$$

となり，すべての対角要素は同一の値をとる．以上より，(3-15)は

$$E(\sum W_i\beta_i)(\sum W_i\beta_i)'=\sum_{i,j}^{m}\sum_{l,h}^{k}\beta^l{}_i\beta^h{}_j\sigma_{lhij}I\tag{3-19}$$

となる．

次に(3-14)における最終式の第2項を吟味しよう．第2項を書きなおすと

$$E(\sum u_i)(\sum W_i\beta_i)' = \sum_{i,j} E(u_i\beta_j'W_j') \tag{3-20}$$

となり，行列 $u_i\beta_j'W_j'$ の期待値は，β_j の要素表示と w_{lj} を使えば

$$E(u_i\beta_j'W_j') = \sum_{l=1}^{k} \beta^l{}_j E(u_i w_{lj}') \tag{3-21}$$

となる．仮定(2)より u_i と X_j の共分散がゼロ，すなわち X_j の第 l 行の x_{lj} を使えば

$$E(u_i x_{lj}') = 0 \tag{3-22}$$

が成り立つ．(3-21)の $E(u_i w_{lj}')$ は(3-9)より

$$E(u_i w_{lj}') = E(u_i x_{lj}') - E(u_i \gamma_{lj}' X_a')$$

となり，右辺第1項は(3-22)よりゼロ行列，第2項は γ_{lj}，X_a が非確率的であるのでゼロ行列になる.[1] それゆえ

$$E(u_i w_{lj}') = 0 \tag{3-23}$$

がえられる．このことによって，(3-14)の最終式の第2項はゼロ行列であることが判明した．

以上より，(3-14)は

$$\mathrm{Cov}(u_a) = \sum_{i,j}^{m} \left(\sum_{l,h}^{k} \beta^l{}_i \beta^h{}_j \sigma_{lhij} + \sigma_{ij} \right) I \tag{3-24}$$

となり，スカラーを σ_* で表わすと

$$\mathrm{Cov}(u_a) = \sigma_* I \tag{3-25}$$

となる．ゆえに $\hat{\beta}_a$ の共分散行列は

$$E(\hat{\beta}_a - \beta_a)(\hat{\beta}_a - \beta_a)' = \sigma_*(X_a'X_a)^{-1} \tag{3-26}$$

となる．このことによって，ミクロ説明変数が確率的であるとき，(3-1)なる関係式のもとで，マクロ係数 β_a を $\sum \Gamma_i\beta_i$ とする限り，マクロ係数の OLSE

---

1) $E(u_i\gamma_{lj}'X_a')$ は γ_{lj}，X_a が非確率的であることを利用しなくても，(3—22) からゼロ行列であることを導出できる．なぜなら，$\gamma_{lj}' = (\gamma_{lj}{}^1, \cdots, \gamma_{lj}{}^k)$ とすればこの行列は $\sum_{h=1}^{k} \gamma_{lj}{}^h \sum_{j=1}^{m} E(u_i x_{hj}')$ となりゼロ行列になる．

は有効推定量であることが明らかにされた.

次に，§2と同じようにマクロ係数を対応しているミクロ係数の関数（加重平均）と定義したとき，(3-1)なる関係式のもとで，マクロ係数の OLSE はどんな性質をもつか考察しよう.

§2と同様，Λ_i を Γ_i の対角要素からなる対角行列とすれば，集計バイアスは

$$E(\hat{\beta}_a)-\beta_a=\sum(\Gamma_i-\Lambda_i)\beta_i \tag{3-27}$$

となり，このときマクロ係数の OLSE は不偏ではなく，もちろん，有効推定量とはならない．不偏で一致性をもち，そして有効性をもつ推定量は(3-27)なる集計バイアスがゼロになるとき得られる．一致性は(3-4)から(3-8)の展開より，有効性も(3-14)から(3-26)の展開と同様にして容易に得られる．以下において，このケースでのマクロ攪乱項 u_a とマクロ係数の OLSE $\hat{\beta}_a$ のそれぞれの共分散行列のみを示しておく.

集計バイアスがゼロになるための条件，すなわち斉合的条件は，前述のごとく，2種類が考えられるが，すべてのミクロ係数が等しい場合の u_a と $\hat{\beta}_a$ の共分散行列は $\sum_{i,j}\sigma_{ij}I$ と $\sum_{i,j}\sigma_{ij}(X_a'X_a)^{-1}$ であり，容易に導出できる.

次に，Γ_i が対角行列 Λ_i になる場合を考えよう．拙稿[8]において，このケースが成立するための十分条件を導出した．この条件とは

$$E(X_i'X_j)=S_{ij}\quad S_{ij}:\text{対角行列}\quad i,j=1,\cdots,m \tag{3-28}$$

である．これと(3-1)とを考慮すれば

$$\begin{aligned}E(X_i'X_j)&=E(\Gamma_i'X_a'+W_i')(X_a\Gamma_j+W_j)\\&=\Gamma_i'(X_a'X_a)\Gamma_j+E(W_i'X_a\Gamma_j)+E(\Gamma_i'X_a'W_j)+E(W_i'W_j)\end{aligned}$$

と展開でき，最終式の第2，3項はゼロ行列になるので[1]

$$E(W_i'W_j)=E(X_i'X_j)-\Gamma_i'(X_a'X_a)\Gamma_j$$

となる．(3-28)が成立しているとき，Γ_i は対角行列 Λ_i になるので

1) $E(W_i')X_a\Gamma_j=\Gamma_i'X_a'E(W_j)=0$ より明らか.

$$E(W_i'W_j)=S_{ij}-\Lambda_i'(X_a'X_a)\Lambda_j=T_{ij} \tag{3-29}$$
T_{ij}：対角行列

が成立する．この条件は w_{li} で表わせば

$$E(w_{li}'w_{hj})=0 \quad l \neq h,\ l, h=1, \cdots, k \tag{3-30}$$

である．w_{li} に関する一般的な仮定(3-12)と w_{li} の要素 $w_{li}(t)$ を用いれば，(3-30)は

$$E\left[\sum_{t=1}^{T} w_{li}(t)w_{hj}(t)\right]=\sum_{t=1}^{T} E[w_{li}(t)w_{hj}(t)]$$
$$=T\sigma_{lhij}$$

となり，(3-30) は

$$\sigma_{lhij}=0 \quad l \neq h \tag{3-31}$$

が成立することである．これは，各経済主体の説明変数間に相関がなかったり[1)]，2つの経済主体間でも異なった説明変数間に相関がないケースである．前例を使えば，ある家計で所得の動きと流動資産の動きとは無相関であり，ある家計の所得と他の家計の流動資産とは独立に動いているのである．このとき σ_{llij} を σ_{lij} と書くとすると，(3-18)は

$$\sum_{l=1}^{k} \beta^l{}_i \beta^l{}_j \sigma_{lij} \tag{3-32}$$

となり，u_a の共分散行列は

$$\mathrm{Cov}(u_a)=\sum_{i,j}^{m}\sum_{l=1}^{k} \beta^l{}_i \beta^l{}_j \sigma_{lij} I \tag{3-33}$$

になる．また $\hat{\beta}_a$ の共分散行列は(3-33)に $(X_a'X_a)^{-1}$ が乗ぜられた行列である．

参考文献

〔1〕 Aigner, D. J. and S. M. Goldfeld, "Estimation and Prediction from Aggregate Data when Aggregates Are Measured More Accurately Than Their Components," *Econometrica*, Vol. 42, No. 1, 1974, pp. 113—134.

1) 多重共線性のないケースである．

〔2〕 Akkina, K. R., "Application of Random Coefficient Regression Models to the Aggregation Problem," *Econometrica*, Vol. 42, No. 2, 1974, pp. 369—375.

〔3〕 Dhrymes, P. J., *Econometrics*, Harper & Row, 1970.

〔4〕 Dunn, D. M., Williams, W. H. and T. L. Dechaine, "Aggregate Versus Subaggregate Model in Local Area Forecasting," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 71, No. 353, 1976, pp. 68—71.

〔5〕 Edwards, J. B. and G. H. Orcutt, "Should Aggregation Prior To Estimation Be the Rule?", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 4, 1969, pp. 409—420.

〔6〕 Green, H.A.J., *Aggregation in Economic Analysis*, Princeton University Press, 1964.

〔7〕 Kuh, E., "An Essay on Aggregation Theory and Practice," *Econometrics and Economic Theory*, 1974, pp. 57—99.

〔8〕 根岸紳,「集計の斉合性に関する仮説検定方式」,『経済学論究』第32巻第1号, 1978年4月, pp. 101—118.

〔9〕 Orcutt, G. H., Watts, H. W. and J. B. Edwards, "Data Aggregation and Information Loss," *The American Economic Review*, Vol. 58, No. 4, 1968, pp. 773—787.

〔10〕 Swamy, P.A.V.B., "Efficient Inference in a Random Coefficient Regression Model," *Econometrica*, Vol. 38, No. 2, 1970, pp. 311—323.

〔11〕 Zellner A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias," *Journal of the American Statistical Association*, LVII, June, 1962, pp. 348—368.