研　究

集計の斉合性に関する仮説検定方式

根　岸　　　紳

§1.　マクロ経済変数の，換言すると，集計的な経済変数の間にある種の関係があるという仮定にたって，マクロ・モデルは設定される．しかし，個々の消費者，あるいは企業によって，ミクロ的な経済主体の行動なり決意に関する議論が経済理論の基礎にあるとするなら，マクロ・モデルの諸関係は，ミクロ的な諸関係から導出される構造式であると考えられる．例えば，一家計の消費需要がその家計の所得と流動資産の関数であるなら，類推によって，一国全体の消費需要が国民所得と一国の家計全体の流動資産の，ミクロ関係式と同種類の関数としてマクロ関係式が設定される．この方法が最も単純なものであるし，実際的にもこの方法が採用されている．ここで，マクロ関係式の統計的なパラメターが，基礎となっているミクロ関係式における経済的なパラメターに対して持つ関係はどんなものであろうか，ということが重要な問題となる．この問題に関する最初の体系的な研究は Theil〔14〕による．本稿は主としてこの Theil の先駆的な研究に基づいて，マクロ・パラメターとミクロ・パラメターの「斉合性」に関する仮説検定の定式化を行なおうとするものである．

ここでは，問題は単一のマクロ関係式が一組のミクロ関係式から，集計によって，導出される場合についてのみ扱う．[1] 接近方法には2種類ある．[2]

注）この論文は，レフリーから多くの有益な示唆をえた．謝意を表わすとともに，なお不十分な点があるとすれば，それら一切の責めは，もちろん筆者にあることをおことわりしておきたい．

1）同時方程式体系での集計に関する問題は Theil〔14〕§5. と Theil〔15〕で考察されている．Theil〔15〕の結果は，Theil〔14〕での単一モデルの結果とよく似ている．

2）Theil〔14〕pp. 4—7.

第1の接近方法は，ミクロ関係式とそれに対応する形をもったマクロ関係式とが与えられたものとして，ミクロ変数からマクロ変数をつくるいかなる集計方法が，ミクロ関係式とマクロ関係式との数学的な斉合性[1]をもたらすものであるか，というものである．しかし，この方法では，集計されたマクロ変数が「自然な」集計ではないという点で大きな難点がある．[2]

第2の接近方法は Theil の採用した方法であり，所与のミクロ関係式の下で，ミクロ変数からマクロ変数の集計方法が「自然な」形[3]で規定されているとき，ミクロ関係式に対応するマクロ関係式を統計的方法によってあてはめることは適切であろうか，というものである．このとき，Theil はひとつの統計的規準を採用してこの問題に対処している．

われわれは，この第2の接近方法を採用する．なぜなら，マクロ・モデルの実証分析では，例えば『国民所得統計年報』にあるマクロ・データのように，マクロ変数の集計は「自然な」集計方法によって与えられたものと考えられるからである．

本稿での展開は次のとおりである．

§2. では，Theil の枠組でミクロ・パラメターとマクロ・パラメターの関係を示し，Theil の用いた統計的規準の解釈を少し変えて，マクロ・パラメターとミクロ・パラメターの「斉合性」があるのはどういう場合かを考える．そして，この「斉合性」が満たされるケースに2種類が考えられ，これらを仮説検定問題の枠組に導入して検定方式の定式化を行なおうとするのが本稿の主題である．§3. と §4. で2つのケースをそれぞれ扱う．本稿は「自然な」線形集計法を前提にして，線形ミクロ関係式の類推による線形マクロ関係式に関するものであ

1) マクロ関係式がミクロ関係式から数学的に完全に導出されるケース．

2) ミクロ変数の特別な加重平均の和としてマクロ変数を導いているからである．詳しくは Allen〔1〕pp. 954—955（邦訳）参照．

3) マクロ変数は，通常，ミクロ変数の単純和の形をとり，指数については固定加重和の形をとる．

る．

§2．経済理論により，第 i ミクロ経済主体のミクロ関係式が次のように成立するとしよう．

$$y_i = X_i\beta_i + u_i \quad i=1,\cdots,m \tag{2-1}$$

y_i は被説明変数の $T\times 1$ 観測値ベクトル，X_i は k 個の説明変数の $T\times k$ 観測値行列，β_i は推定されるべきミクロ・パラメターの $k\times 1$ ベクトル，u_i は観測不能な $T\times 1$ 攪乱ベクトル，そして m はミクロ的な経済主体の数である．

(2-1)を次のようにかく．

$$y = X\beta + u$$

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} X_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & X_m \end{pmatrix} \quad \beta=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \quad u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{2-2}$$

このモデルに次の仮定をおく．

$$\mathrm{rank}(X_i)=k \quad E(u)=0 \quad E(X'u)=0 \quad k<T \tag{2-3}$$

X_i：確定変数行列[1)]

さらに，攪乱項の共分散行列について次の２つのケースを想定する．

$$(C\text{-}1) \quad \mathrm{Cov}(u)=\sigma^2 I_{mT}$$

$$(C\text{-}2) \quad \mathrm{Cov}(u)=\begin{pmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \cdots & \sigma_{1m}I \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{m1}I & & & \sigma_{mm}I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \\ \sigma_{m1} & & \sigma_{mm} \end{pmatrix}\otimes I_T$$

$$=\Sigma\otimes I_T \qquad \Sigma=(\sigma_{ij})$$

どちらのケースも，標本 y が無作為標本であって，攪乱項の系列相関は認めていない．一方，異なる主体で分散が不均一かどうか，さらに，異なる主体の攪乱項の間に同期の相関を認めるかどうかで，(C-1)と(C-2)を区別する．所得

1) X_i が確率変数であることを前提にしても，u_i と X_i が統計的に独立でありさえすれば，X_i を定数として仮定する通常の議論とくらべて，議論が多少まわりくどくなるだけ（条件付分布を導入する）で，本質的な差異は生じない．§4．では X_i を確率変数として議論する．

階層別の消費関数を例にとれば，説明変数である可処分所得のレベルが階層ごとに異なっているので，分散も異なると考えられる．また，体系の攪乱項は個々には説明できない多くの要因を表わしているものと考えられるので，同期の u_i と u_j に相関があると仮定する方がより一般的であろう．[1] この2つの想定をとり入れたのが$(C\text{-}2)$のケースである．

さて，マクロ変数を単純集計で得られるとする．[2]

$$y_a = \sum^{m} y_i, \quad X_a = \sum^{m} X_i \text{ [3]} \tag{2-4}$$

ミクロ関係式の類推より，マクロ変数につぎのような経済関係を想定する．これは実際的な手続きと一致している．

$$y_a = X_a\beta_a + u_a \tag{2-5}$$

β_a は推定されるべきマクロ・パラメターで，u_a は $T\times 1$ マクロ攪乱ベクトルである．あとで示すように，いつも $E(u_a)=0$ とは限らない．[4] (2-5)のマクロ関係は(2-1)のミクロ関係の類推より導かれるものであるが，経済的に意味のある関係式として分析対象となるものである．

このとき，Theil により提出された問題は次のとおりである．

マクロ・パラメターと定義される[5](2-5)における β_a の最小二乗推定量[6]の数

1) 分散の不均一性だけを考慮する場合は，$(C\text{-}2)$で $\sigma_{ij}=0$ $(i \neq j)$ とすればよい．

2) 単純和集計量は固定加重集計量（例えば指数）でおきかえても一般性を失わない．Theil〔14〕p. 12.

3) X_i に定数項を含んでいるなら，X_i の第1列を $\mathbf{1}$ ではなく $(1/m)\mathbf{1}$ とする必要がある．それゆえ，β_i の第1要素は定数項の m 倍として考える必要がある．ただし，$\mathbf{1}'=(1,\cdots,1)$．

4) $u_a=\sum^{m} u_i$ として，ミクロ・パラメターとマクロ・パラメターとの関係を考察する立場 Zellner〔16〕〔17〕があるが，これは，ある条件を付加しないかぎり，誤りである．

5) ミクロ関係式での仮定 $E(X'u)=0$ (2-3) の拡張より $E(X_a'u_a)=0$ が成立することによって，$\beta_a=E\hat{\beta}_a$ が成り立つ．

6) Theil〔14〕は，最小二乗法だけでなく，一般の線形不偏推定方法でも考察している．Theil〔14〕pp. 116—125.

学的期待値は，ミクロ・パラメターにどのように依存するのか，という問題である．つまり，β_a の OLSE を $\hat{\beta}_a$ として

$$\hat{\beta}_a=(X_a'X_a)^{-1}X_a'y_a=(X_a'X_a)^{-1}X_a'\sum y_i \tag{2-6}$$

であり，これに(2-1)を代入して数学的期待値をとると

$$\begin{aligned} E\hat{\beta}_a&=E(X_a'X_a)^{-1}X_a'\sum(X_i\beta_i+u_i)=\sum(X_a'X_a)^{-1}X_a'X_i\beta_i \\ &=\sum B_i\beta_i \end{aligned} \tag{2-7}$$

$$B_i\equiv(X_a'X_a)^{-1}X_a'X_i \tag{2-8}$$

となる．

(2-7)より，(2-5)のマクロ・パラメター β_a とミクロ・パラメター β_i との関係は

$$\beta_a=E\hat{\beta}_a=\sum B_i\beta_i \tag{2-9}$$

となる．β_a の一要素，例えば，マクロの限界消費性向は，一般に，対応するミクロ・パラメター，この場合，各経済主体（家計あるいは所得階層グループ）の限界消費性向と，対応しないミクロ・パラメター（各経済主体の流動資産の消費に対する影響）とに依存する．そしてこのミクロ・パラメターのウェイトを表わしているのが行列 B_i であり，$X_a=\sum X_i$ より次式が成りたつ．

$$\sum B_i=(X_a'X_a)^{-1}X_a'\sum X_i=I_k \tag{2-10}$$

これは，対応するミクロ・パラメターにかかるウェイトを合計すると1になり，対応しないミクロ・パラメターにかかるウェイトの合計は0になる都合のよい状態を示している．

(2-8)の B_i の形より

$$X_i=X_aB_i+V_i,\quad V_i=X_i-X_a(X_a'X_a)^{-1}X_a'X_i \tag{2-11}$$

が成り立ち[1]，V_i は残差行列といえる[2]．

(2-1)，(2-4)，(2-11)より

1) モデルに定数項を含むのなら，B_i の第1列は $(1/m)(1,0,\cdots,0)'$ に等しく，V_i の第1列はゼロベクトルである．

2) X_a，X_i は確定変数なので，V_i も確定的である．

$$y_a=\sum(X_aB_i+V_i)\beta_i+\sum u_i=X_a\beta_a+\sum V_i\beta_i+\sum u_i \qquad (2\text{-}12)$$

となる．この式より

$$u_a=\sum V_i\beta_i+\sum u_i \qquad (2\text{-}13)$$

となり，$E(u_a)=\sum V_i\beta_i$ が成りたち，u_a の期待値はゼロとは限らない．

しかし，もし X_i，X_a が確率変数であるとすると，(2-11)は

$$X_i=X_a\Gamma_i+U_i,\quad i=1,\cdots,m \qquad (2\text{-}14)$$

なる回帰モデルとして考えられ，U_i は攪乱行列で $E(U_i)=0$ かつ$E\ (X_a'U_i)=0$ であると想定する．このとき，(2-11)の V_i は

$$V_i=(I-X_a(X_a'X_a)^{-1}X_a')X_i=(I-X_a(X_a'X_a)^{-1}X_a')U_i \qquad (2\text{-}15)$$

となり

$$E(V_i)=0,\ i=1,\cdots,m \qquad (2\text{-}16)$$

が成りたつ．このとき，(2-13)より $E(u_a)=0$ である．

これまでの考察より，マクロ・パラメターに関して，マクロ切片についていえばミクロ切片の単純な和でないし，マクロの限界係数では，対応するミクロ限界係数の平均（単純平均あるいは加重平均）とはならないことが示された．ここで，Theil はひとつの統計的規準である集計バイアスという概念を導入した．Theil が考えた集計バイアスとは次の式の右辺第２項である．

$$\begin{aligned}\beta_a&=\sum(1/m)\beta_i+\sum\{B_i-(1/m)I\}\beta_i\\&=\sum(1/m)\beta_i+\mathrm{Cov}(B_i,\beta_i)\end{aligned} \qquad (2\text{-}17)$$
[1]

彼は，第１項を「真の」マクロ・パラメターと考え，それ以外を集計バイアスと呼んでいる.[2] Theil〔14〕の定理７によれば，統計的手法（いまの場合，最小

1) Theil〔14〕でこの表現が使われているが，B_i，β_i は確定量であるので，これはあくまで疑似表現である．X_i，β_i が確率変数であるなら，この表現は妥当である．なお β_i が確率的であるときの集計問題は Klein〔10〕，Zellner〔17〕で考察されている．

2) Theil の枠組で集計バイアスを実際に推計したものに Boot & de Wit〔２〕の投資関数，Gupta〔７〕〔８〕の賃金調整関数，そして Lovell〔13〕の CES 生産関数などがある．

二乗法）に影響される部分を集計バイアスと考え，この手法から独立している部分を「真の」値と考えている．たしかにマクロ切片についてはこのことがいえるが，[1] 限界係数についてはすべて統計的手法に依存するので，「真の」値だと考えられるものをそこからひきだす，すなわち(2-17)の形をとるしかない．各経済主体がみんな同じ規模であるなら単純平均もうなずけるが，規模に格差がある場合，あるウェイトを想定し，加重平均をとる必要があろう．このように「真の」値をどのように考えるかは一定しない．

そこで，本稿では次のように考える．このモデルのマクロ・パラメターは推定されるわけであるから，当該推定期間内での情報を少しでも多く利用したほうがよい．ここで対応するミクロ・パラメターにかかるウェイトを積極的に使う．このウェイトは，大まかにいって，第 i 経済主体のある説明変数値が対応するマクロの説明変数値に占める相対的な大きさを示すものである．そして都合のよいことには，このウェイトの和は1である．[2] このウェイトは当該推定期間での「真の」値に近いウェイトと考えられる．このミクロとマクロをつなぐ情報を利用するのである．

さて，このウェイトは B_i の対角要素である．われわれは，次のように，「真の」値と集計バイアスを定義しよう．

$$\beta_a=\sum W_i\beta_i+\sum(B_i-W_i)\beta_i \tag{2-18}$$

W_i は B_i の対角要素からなる対角行列とし，$\sum W_i=I$，$\sum(B_i-W_i)=0$ である．(2-18)の右辺第1項を「真の」値と考え，第2項を集計バイアスと定義する．われわれは，集計バイアスがないケースを集計が斉合的であるといい，逆に，集計が斉合的であれば集計バイアスがないといおう．[3]

1) Green〔6〕p. 102—103.

2) 対応しないミクロ・パラメターにかかるウェイトの和が0になるという都合の良いことも前に本文でのべた．

3) Green〔6〕のいう斉合性条件は(2-13)で $u_a=\sum u_i$ になるとき，すなわち，①すべての $i\neq j$ について，$\beta_i=\beta_j$，②すべての i について，$V_i=0$，③ $\sum V_i\beta_i=0$，であり，Theil のいう集計バイアスが存在しても斉合的であるケースが②と③の場合

斉合性の条件でまず考えられるのは，すべてのミクロ・パラメターが等しいケースである．当然この場合，ミクロ・パラメターとマクロ・パラメターとは等しくなる．このケースでの仮説検定の定式化を，先の(C-1)と(C-2)にわけて，§3. で行なう．

次に考えられる斉合性条件は，B_i が対角行列になることである．しかし，これは標本に関する規定であるので，いま X_i，X_a を確率変数であると想定すれば，(2-18)は

$$\beta_a = \sum E(W_i)\beta_i + \sum E(B_i - W_i)\beta_i \tag{2-19}$$

となり，斉合性条件は，B_i の期待値が対角行列である，といい直さなければならない．この検定を§4. で行なう．

上述の2つの検定方式のために，攪乱項の分布型を定める必要があり，§3.，§4. で正規分布を想定する．

§3.　この§では次の定理を用いる．[1]

〔定理〕

Xをk個の変数からなる $T\times k$ 観測値行列，X^* をh個の変数からなる $T\times h$ 観測値行列とし，$X^*=XA$ が成りたつ行列Aが存在するとする．ただし，$\mathrm{rank}(X)=k$，$\mathrm{rank}(X^*)=h$ で $h<k$ である．このとき

(T-1)　$M=I-X(X'X)^{-1}X'$，$M^*=I-X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}$

と定義すれば，M と M^* はベキ等行列で，

$M^*M=M$ が成立する．ここで $\varepsilon=Mu$，$\varepsilon^*=M^*u$

考えられるのである．この Green の斉合性条件はマクロ・パラメターに注目するのではなく，マクロの被説明変数の動きを基準に考えるものであり，この考えは Grunfeld & Griliches〔9〕と同じ枠組に属する．彼らはマクロ被説明変数のあてはまりの良さをミクロ・レベルとマクロ・レベルから比較するとき，必ずしも集計されたマクロ・レベルからの事後予測力が相対的に悪くはなく，むしろあてはまりの良いケースがありうることを分析した．

1)　〔定理〕の証明は付録に記した．

と定義すれば，統計量

$$(T\text{-}2)\quad F=\frac{(\varepsilon^{*\prime}\varepsilon^{*}-\varepsilon'\varepsilon)/(trM^{*}-trM)}{\varepsilon'\varepsilon/trM}$$

は自由度 $(trM^{*}-trM)$ と trM の F 分布にしたがう．ただし，u は平均ゼロ，共分散行列 $\sigma^2 I$ の正規分布にしたがう $T\times 1$ 確率変数ベクトルである．

この〔定理〕の内容は次のとおりである．経済関係を線形回帰方程式で表わすとき，この関係が2つの期間で安定しているかどうか，あるいは，2つの経済主体，または，経済グループが同じ行動をとっているか否かという問題がしばしば考察される．このような問題の検定法は Chow〔3〕によって論じられたが，〔定理〕は，もっと統一的に解説した Fisher の覚書〔5〕にしたがって，パラメターの相等性検定方式のために必要な数学的事実を述べている．

ミクロ・パラメターの相等性検定の定式化を $(C\text{-}1)$，$(C\text{-}2)$ のケースにわけ考察する．その前に(2-18)よりすべてのミクロ・パラメターが等しければ

$$\beta_a=\beta_i\sum B_i=\beta_i \tag{3-1}$$

で，B_i のならび方には β_a は全く独立である．

帰無仮説は次のように表わされる．

$$H_0:\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_m=\beta_0 \tag{3-2}$$

このとき，(2-2)は

$$y=X^{*}\beta_0+u$$

$$X^{*}=XJ\quad X^{*\prime}=[X_1',\cdots,X_m']\quad J'=[\overbrace{I_k,\cdots,I_k}^{k\text{個}}] \tag{3-3}$$

となる．

I．$(C\text{-}1)$のケース：$u\sim N(0,\sigma^2 I_{mT})$[1]

ε と ε^{*} を

1) u は正規分布にしたがい，期待値がゼロ，共分散行列が $\sigma^2 I_{mT}$ であることを示している．

$$\varepsilon = y - X\hat{\beta} = [I - X(X'X)^{-1}X']y = My = Mu$$
$$\varepsilon^* = y - X^*\hat{\beta}_0 = [I - X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}]y = M^*y = M^*u$$

とおく．M, M^* ともにベキ等行列であり，$\varepsilon'\varepsilon/\sigma^2$, $(\varepsilon^{*\prime}\varepsilon^* - \varepsilon'\varepsilon)/\sigma^2$ は，それぞれ，自由度 $trM = mT - mk$, $trM^* - trM = mk - k$ の χ^2 分布をし，たがいに独立である．また $X^* = XJ$ を用いれば，$M^*M = M$ が成立するので,〔定理〕より，H_0 が真であれば

$$F = \frac{(\varepsilon^{*\prime}\varepsilon^* - \varepsilon'\varepsilon)/(trM^* - trM)}{\varepsilon'\varepsilon/trM} \tag{3-4}$$

が自由度 $mk-k$, $mT-mk$ をもつ F 分布にしたがい，H_0 の検定を行なうことができる．

通常，パラメターの相等性テストは2つの方程式間で行なわれている[1]が，このケースのように，m個の方程式での相等性テストに拡張して適用することができる．

II．(C-2)のケース：$u \sim N\ (0,\ \Sigma \otimes I_T)$

異なる経済主体で分散が不均一であり，その上，攪乱項に相関関係が存在しているので，OLSE は BLUE (最良線形不偏推定量) にならない．このケースでの BLUE はエイトキン推定量[2]として知られている．

(C-2)での共分散行列をいま一度示すと

$$\mathrm{Cov}(u) = \Sigma \otimes I_T = \Phi \tag{3-5}$$

であり，Σ と I_T どちらも正定値であることより，Φ も正定値 行列となる．このとき

$$P\Phi P' = I_{mT},\ P'P = \Phi^{-1} \tag{3-6}$$

なる正則行列Pが存在する．このとき(2-2)の両辺に左からPを乗ずると

---

1) Chow〔3〕も Fisher〔5〕もともに，2方程式間でのパラメター相等性を考えている．

2) Dhrymes〔4〕pp. 150—167, Zellner〔13〕に詳しい．OLSE は不偏で一致性を有する推定量であるが，有効性（最小分散）がそこなわれる可能性がある．

$$w=Z\beta+v,\ w=Py\quad Z=PX\quad v=Pu \tag{3-7}$$

となり，この攪乱項vは

$$E(v)=0,\ E(Z'v)=0,\ E(vv')=I_{mT} \tag{3-8}$$

となるので，(3-7)に最小二乗法を適用すれば，BLUEがえられる．(3-7)でのβの OLSE を$\hat{\beta}$とすると，$(Z'Z)^{-1}Z'w$ より

$$\hat{\beta}=(X'\Phi^{-1}X)^{-1}X'\Phi^{-1}y \tag{3-9}$$

となる．H_0 でのモデルは次のようになる．

$$w=Z^*\beta_0+v,\ Z^*=ZJ \tag{3-10}$$

ここで，それぞれの残差ベクトルは

$$\varepsilon=w-Z\hat{\beta}=[I-Z(Z'Z)^{-1}Z']w=Mw=Mv$$

$$\varepsilon^*=w-Z^*\hat{\beta}_0=[I-Z^*(Z^{*\prime}Z^*)^{-1}Z^{*\prime}]w=M^*w=M^*v$$

となり，M, M^* は〔定理〕の条件をみたすので，H_0 の検定を行なうことができる．ところが，この検定を実際に行なうにはΦの要素が既知でないとできない．既知でなければ(3-9)の$\hat{\beta}$は推定量とはならない．また，PはΦより定められるから，Φが未知であれば，(3-10)のモデルでの β_0 を最小二乗推定できない．Φはふつう未知である．そこで，(2-2)より，それぞれのミクロ方程式より OLSE 残差を推定し，標本共分散行列をつくれば，これはΣの一致推定量になることが知られている[1)]ので，この推定量を用いる．そして，この一致推定量を用いた検定が，Φでの検定と漸近的に同等であることもわかっている[2)]ので，H_0 の検定が可能となる．

さて，いまΣの一致推定量を$\hat{\Sigma}$とすると，(3-9)の推定量は $(X'(\hat{\Sigma}\otimes I_T)^{-1}X)^{-1}X'(\hat{\Sigma}\otimes I_T)^{-1}y$ となり，この推定量は漸近的に BLUE となる．Zellner〔16〕や Lovell〔11〕の実証分析[3)]で，この推定量の有効性がえられており，

1) Dhrymes〔4〕pp. 157—158, Zellner〔16〕p. 352.

2) Dhrymes〔4〕pp. 161—167, Zellner〔16〕pp. 352—356.

3) Zellner は Boot & de Wit〔2〕の扱った投資関数を，Lovell は前述のごとく CES 生産関数を漸近的に BLUE となる推定量を用いて推計している．

Kmenta & Gilbert〔12〕によって，この推定量は小標本でも非常にうまくいくことがモンテカルロ法で確かめられている[1)].

§4. 第2の斉合性条件に関する検定方式の定式化を試みる．§2.の最後のところで，この斉合性条件を次の帰無仮説で表現した．

H_0：すべての i に対して，$E(B_i)$は対角行列である (4-1)

X_i，X_a が確率変数であると想定すれば，(2-14)より

$$X_i=X_a\Gamma_i+U_i,\quad i=1,\cdots,m \qquad (4\text{-}2)$$
$$E(U_i)=0,\quad E(X_a'U_i)=0$$

であり，(4-2)の OLSE は

$$\hat{\Gamma}_i=(X_a'X_a)^{-1}X_a'X_i\equiv B_i,\quad i=1,\cdots,m \qquad (4\text{-}3)$$

となり，期待値をとると

$$\begin{aligned}E(\hat{\Gamma}_i)=E(B_i)&=\Gamma_i+E(X_a'X_a)^{-1}X_a'U_i\\&=\Gamma_i \qquad i=1,\cdots,m\end{aligned} \qquad (4\text{-}4)$$

となる．ゆえに，帰無仮説(4-1)は

H_0：すべての i に対して，Γ_i は対角行列である (4-5)

ともかける．

ここで，直接に H_0 を検定する方式を定式化することは困難であるので，以下において，H_0 が成りたつ2，3の十分条件を設定し，その下での検定方法を考察する．まず考えられる十分条件は次の形をとる．

(H_0-1)：すべての i に対して，$X_i=X_a\Lambda_i$，Λ_i は対角行列である

これが十分条件であることは明らかである．この検定方法は，X_i，X_a が時系

---

1) 分散の不均一性のみのケースにふれておく．このケースは $\sigma_{ij}=0$，$i\neq j$ で異なる経済主体間の同時の相関がゼロであるケースである．このケースでのエイトキン推定量は OLSE と同等であることが容易にわかり，エイトキン推定量の有効性はえられない．しかし，パラメターの相等性テストでは，同一の分散になるように体系を変換しなければならない．すなわち，(C-2)のケースと同様，一致推定量（この場合は分散のみでよいが）を用いなければならない．

列データである場合には，次のように定式化される．いま t 期における j 番目のミクロ説明変数を $x_{ij}(t)$，$i=1, \cdots, m$ とし，対応するマクロ変数を $x_j(t)$ $(=\sum_{i=1}^{m} x_{ij}(t))$ としよう．このとき，(H_0-1) の検定は

$$x_{ij}(t)/x_j(t)=\alpha_i+\beta_i t+u_i(t), \quad i=1, \cdots, m \tag{4-6}$$

の回帰モデルで，説明変数 t（時間）のパラメター β_i がゼロであるかどうかの有意性検定であり，β_i がすべてのミクロ単位でゼロであると有意に受容されるなら，第2の斉合性条件が満たされていることになる．(H_0-1) に関するもっと一般的な検定方法は，あるミクロ説明変数を，モデルにあらわれるすべてのマクロ説明変数で回帰させ，ミクロ説明変数に対応しないマクロ説明変数にかかる係数がすべてゼロである[1]という仮説の有意性検定である[2]．

次に，われわれはその他の十分条件を導出するため，単純な3変数モデルを設定する．ただし，それぞれの変数を平均からの偏差とし，定数項をモデルからはずす．多くの計量モデルの場合，限界係数が特に注目され，定数項はあまり関心の対象とはなっていない．そこで，ミクロの被説明変数を z_i，説明変数を y_i，x_i とすると，ミクロ関係式は

$$z_i=[y_i, x_i]\beta_i+u_i, \quad i=1, \cdots, m \tag{4-7}$$

となり，z_i，y_i，x_i は確率変数の $T\times 1$ 観測値ベクトルである．$y=\sum y_i$，$x=\sum x_i$ と定義して(4-4)を導くと

$$\begin{aligned} &E(\hat{\Gamma}_i) \\ &=\Gamma_i=E\left\{\frac{1}{y'yx'x-x'yy'x}\begin{pmatrix} x'xy'y_i-y'xx'y_i & x'xy'x_i-y'xx'x_i \\ y'yx'y_i-x'yy'y_i & y'yx'x_i-x'yy'x_i \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

$$i=1, \cdots, m \tag{4-7}$$

となり，斉合性条件として次の式が成立する．

$$\left.\begin{aligned} &E(x'xy'y_i-y'xx'x_i)=0 \\ &\text{かつ } E(y'yx'y_i-x'yy'y_i)=0, \quad i=1, \cdots, m \end{aligned}\right. \tag{4-8}$$

---

1) 当然であるが，定数項もゼロであることが要求される．

2) この仮説が満たされれば，Klein〔10〕の集計アプローチと一致する．

$E(x'x)\neq 0$, $E(y'y)\neq 0$ など考慮すると，(4-8)が成りたつ1つの十分条件は次のようになる．

$$E(x_i'y_i)=0 \text{ かつ } E(x_j'y_i)=0 \quad i\neq j,\ i,j=1,\cdots,m \tag{4-9}$$

上述の推論を，一般性をもたせるために，行列表示で展開しよう．すべての変数は平均からの偏差であることにはかわりないとして，(4-9)は

$(H_0\text{-}2)$：すべての i,j に対して，$E(X_i'X_j)=S_{ij}$, S_{ij} は対角行列である

これが(4-5)なる H_0 を成立させる十分条件であることを以下にみていく．

(4-2)[1]の両辺に左から X_a' をかけ，期待値をとると

$$\begin{aligned}E(X_a'X_i)&=E(X_a'X_a)\Gamma_i+E(X_a'U_i)\\&=E(X_a'X_a)\Gamma_i\end{aligned} \tag{4-10}$$

となる．$(H_0\text{-}2)$より

$$E(X_a'X_a)=E\{\sum X_i'\sum X_j\}=\sum_{i,j}S_{ij}\equiv S \tag{4-11}$$

となり，S は対角行列である．また$(H_0\text{-}2)$より

$$E(X_a'X_i)=E\{\sum X_k'X_i\}=\sum_k S_{ik} \tag{4-12}$$

となり，(4-10)，(4-11)，(4-12)より

$$\Gamma_i=\{E(X_a'X_a)\}^{-1}E(X_a'X_i)=S^{-1}\sum_k S_{ik} \tag{4-13}$$

となる．S は対角行列であるので，S^{-1} も対角行列になり，その結果，Γ_i も対角行列である．つまり$(H_0\text{-}2)$が(4-5)の十分条件であることがわかった．

(4-9)，$(H_0\text{-}2)$が生じるケースは，各経済主体の説明変数間に相関が無かったり[2]，2つの経済主体間でも異なった説明変数間に相関がないケースである．例えば，ある家計で所得の動きと流動資産の動きとは無相関であり，ある家計の所得と他の家計の流動資産とは独立に動いているのである．

このケースの検定方法を設定しよう．

2変数が独立かどうかの検定は，周知のように，その2変数の相関係数がゼロ

---

1) (4-2)に現われている変数は，すべて，平均からの偏差に変換されているとする．

2) 多重共線性のないケースである．

という仮説の検定と同等である．また，変数間の回帰係数がゼロであるという仮説の検定を行なえばよい．例えば，(4-7)の3変数モデルで

$$\text{すべての}\, i \neq j \,\text{に対して，}\quad \begin{aligned} x_i(t) &= \alpha_i y_i(t) + u_i(t) \\ x_i(t) &= \beta_i y_i(t) + u_j(t) \end{aligned} \tag{4-14}$$

の回帰係数 α_i，β_i がゼロであるという仮説検定である．

最後に，今までの展開で残された問題点を指摘しておこう．まず第1に，この§4.で明らかなように，斉合性条件の第2番目について，2つの十分条件しかあげられていない．(4-1)あるいは(4-5)の帰無仮説の必要・十分条件をさらに検討しなければならない．次に，われわれは§2.で $\sum(B_i-W_i)\beta_i$ なる集計バイアスがないケースを集計が斉合的であるとした．そこでは，β_i がいかなる値であっても，すなわち，いかなる構造であっても，集計バイアスがない条件として $B_i=W_i$ を考えた．しかしながら，モデルの相違，あるいは同一モデルであっても，ある特定の構造の下で，$\sum(B_i-W_i)\beta_i=0$ が成立する可能性がある．これが第2の問題点であり，われわれの考えた斉合性条件以外にまだ十分条件が存在するのかもしれない．

問題点の最後として考えたいのは，それぞれのパラメターの「安定性」という問題である．マクロ・モデルの政策手段という役割から，そのモデルの構造が安定的に持続しなければならない．しかも，このモクロ・モデルの「安定性」が保証されるためには，ミクロ・パラメターの「安定性」，そしてミクロ・パラメターにかかるウェイト行列の「安定性」が確保される必要がある，と考えられる．ところが，斉合性条件の1番目の考察にあったように，すべての i に対して，B_i はいかに変化しても，ミクロ・パラメターが安定しているかぎり，マクロ・パラメターも安定しているのである．また，第2の問題点とも関連するが，B_i，W_i，β_i が不安定であっても，$\sum(B_i-W_i)\beta_i=0$ さえ満たされていれば，集計バイアスはないと考えられる．しかし，集計の斉合性が満たされたとしても，B_i，β_i が変化する場合に，マクロ・モデルが「真に」安定的とい

えるかどうかは検討を要する.

以上に述べたいくつかは，集計の斉合性に関する重要な問題点であろう.

付　録

（証明）

Mは対称行列であるので，$M=P'\Lambda P$，$P'P=I$ なるPが存在する．ただしΛは対角行列で，その対角要素にはMの固有根がならんでいる．この固有根は，Mがベキ等行列であるので，1か0である．そこでΛは次のように表わせる.

$$(P\text{-}1)\quad \Lambda=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rはMの階数であり，Mのベキ等性より，$r=trM$ である.

ここで $v=Pu$ とすると，vも正規変数ベクトルとなり，次のことも成りたつ.

$$(P-2)\quad E(v)=0 \quad E(vv')=PE(uu')P'=\sigma^2PP'=\sigma^2I$$

以上より

$$(P\text{-}3)\quad \varepsilon'\varepsilon/\sigma^2=u'Mu/\sigma^2=u'P'\Lambda Pu/\sigma^2=v'\Lambda v/\sigma^2=\sum_{i=1}^{r}(v_i/\sigma)^2$$

となり，$\varepsilon'\varepsilon/\sigma^2$ は自由度 trM の χ^2 分布にしたがう.

次に

$$(P\text{-}4)\quad \varepsilon^{*\prime}\varepsilon^*-\varepsilon'\varepsilon=u'M^{*\prime}M^*u-u'M'Mu=u'(M^*-M)u$$

となり，M と M^* の対称性と $M^*M=M$ が成りたつことによって，$(M^*-M)^2=M^*-M$ が成立する．これによって，$(P\text{-}4)$は

$$(P\text{-}5)\quad \varepsilon^{*\prime}\varepsilon^*-\varepsilon'\varepsilon=u'(M^*-M)'(M^*-M)u$$

となり，$(P\text{-}3)$と同様にして，$(P\text{-}5)$を σ^2 で割った統計量は自由度（trM^*-trM）の χ^2 分布にしたがう.

さらに，$(M^*-M)u=\varepsilon^*-\varepsilon$ と $\varepsilon=Mu$ はともに平均ゼロの正規変数ベクトルであり

$$(P\text{-}6)\quad E(M^*-M)u\varepsilon'=(M^*-M)E(uu')M=\sigma^2(M^*-M)M=0$$

が成り立つので，$(M^*-M)u$ と ε は独立である．このことより，$\{(M^*-M)u\}'(M^*-M)u=\varepsilon^{*\prime}\varepsilon^*-\varepsilon'\varepsilon$ と $\varepsilon'\varepsilon$ も独立である．

以上で定理が証明された．

参考文献

〔1〕 Allen, R. G. D., *Mathematical Economics*, Macmillan & Co. Ltd., 1956. 安井琢磨，木村健康監訳『数理経済学』，紀伊国屋書店，1970.

〔2〕 Boot, J. C.G. and G. M. de Wit, "Investment Demand : An Empirical Contribution to the Aggregation Problem," *International Economic Review*, Vol. 1, No. 1, January, 1960, pp. 3—30.

〔3〕 Chow, G. C., "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions," *Econometrica*, Vol. 28, July, 1960, pp. 591—605.

〔4〕 Dhrymes, P. J., *Econometrics*, Harper & Row, 1970.

〔5〕 Fisher, F. M., "Tests of Equality Between Sets of Coefficients in Two Linear Regressions : An Expository Note," *Econometrica*, Vol. 38, No. 2, March, 1970, pp. 361—366.

〔6〕 Green, H. A. J., *Aggregation in Economic Analysis*, Princeton University Press, 1964.

〔7〕 Gupta, K. L., *Aggregation in Economics*, Rotterdam University Press, 1969.

〔8〕 ――――――, "Aggregation Bias in Linear Economic Model," *International Economic Review*, Vol. 12, No. 2, June, 1971, pp. 293—305.

〔9〕 Grunfeld, Y. and Z. Griliches, "Is Aggregation Necessarily Bad?," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 42, No. 1, February, 1960, pp. 1—15.

〔10〕 Klein, L. R., *A Textbook of Econometrics*, Row, Peterson & Co., 1953.

〔11〕 Kloek, T., "Note on Convenient Matrix Notations in Multivariate Statistical Analysis and in the Theory of Linear Aggregation," *International Economic Review*, Vol. 2, No. 3, September, 1961, pp. 351—360.

〔12〕 Kmenta, J. and R. F. Gilbert, "Small Sample Properties of Alternative Estimators of Seemingly Unrelated Regressions," *Journal of the American Statistical Associations*, LXIII, December, 1968, pp. 1180—1200.

〔13〕 Lovell, C. A. K., "A Note on Aggregation Bias and Loss," *Journal of Econometrics*, Vol. 1, 1973, pp. 301—311.

〔14〕 Theil, H., *Linear Aggregation of Economic Relations*, North-Holland, 1954.

〔15〕 ———, "The Aggregation Implications of Identifiable Structural Macrorelations," *Econometrica*, Vol. 27, No. 1, January, 1959, pp. 14—29.

〔16〕 Zellner, A., "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias," *Journal of the American Statistical Association*, LVII, June, 1962, pp. 348—368.

〔17〕 ———, "On the Aggregation Problem : A New Approach to a Troublesome Problem," *Lecture Note in Operations Research & Mathematical Economics*, Vol. 15, Springer-Verlag, 1969, pp. 365—374.