多部門経済の最適成長理論

福　尾　洋　一

1　序

拙稿〔4〕においては，マランボー（Malinvaud. E.）の一連のモデルを手掛かりとして，多部門経済の無限期間域における競争均衡と効率性の問題が離散型時刻の下に考察された.[1] そこでの分析は，それ自体，動学的厚生経済学の非常に興味深い1つの対象を取り扱っていたわけであるが，それは，社会的厚生関数やそれに基づく社会的選択という視点から最適性概念を規定した分析ではなかった．そこで，本稿では，社会的厚生関数に基づく最適性概念に立脚する多部門・無限期間域最適経済成長の問題を離散型時刻の下に考察する.

ところで，〔4〕では，生産可能性集合は考察期間域を通じて自給自足的であることが仮定された.[2] このような技術状態は，労働用役の供給もまた生産過程の中に内生化されているという意味でマルサス的性質を持っている．そして，このような特徴は，それはそれとして，経済学的説得力に関する適格審査に十分に耐え得るものと思われる．しかし，労働力の供給は生産過程にとって外生的なものであるという意味において，そしてこの限りにおいて，生産可能性集合は自給自足的ではない，という考え方もまた説得力に関する適格審査に耐え得るであろう．そこで，本稿では，労働用役という財は，そしてその財のみが，生産可能性集合上で生産不能であることを前提とし，その供給条件をモデル経

1）〔4〕には加筆修正したい部分が多くあることを断っておきたい.
2）ct.〔4〕の仮定（7）.

済内に明示的に導入するであろう.[1)]

さて，多部門・無限期間域最適経済成長分析の下においても，1部門・無限期間域最適経済成長分析の場合と同様，社会厚生関数を定義するに際して，各世代に対する処遇の在り方が極めて重要な問題点となるであろう.[2)] そのため，我々は，最初は各世代を平等処遇するという意味でのラムゼイ (Ramsey, F. P.)〔14〕型経済――モデルA――を考え，次いで近接将来世代を優遇するという意味でのキャス (Cass, D.)〔3〕型経済――モデルB――を考えることにする.ラムゼイ型経済の多部門最適成長分析としては，ゲール (Gale, D.)〔6〕，ブロック (Brock, W. A.)〔1〕，及び高山 (Takayama, A.)〔17〕等のモデルが随時参照され，キャス型経済の多部門最適成長分析としては，ラドナー (Radner, R.)〔13〕，サザーランド (Sutherland, W. R. S.)〔16〕，ペレッグ (Peleg, B.)〔11〕及びペレッグ-ライダー (Peleg, B.-Ryder, Jr. H. E.)〔12〕等のモデルが随時参照されるであろう.

第2節では，モデル経済における，生産の技術的関係を規定する生産可能性集合と厚生状態を規定する社会厚生汎関数とについて，その一般的特徴が仮定される．第3節では，最適均斉経路の特性と存在の問題が考察される．第4節と第5節では，モデルA及びモデルBのそれぞれについて，その最適成長経路の特性と存在の問題が考察される．第6節は結びに充てられる.

2 生産可能性集合と社会厚生

以後，時刻tは離散型時刻を表すものとし，それは自然数で表示される．すなわち，$t \in \boldsymbol{N}$ とする.

定義1 生産対応

$\boldsymbol{R}_{\oplus}^{n_1}$ 及び $\boldsymbol{R}_{\oplus}^{n_2}$ はそれぞれ n_1 及び n_2 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^{n_1}$ 及び $\boldsymbol{R}^{n_2}$ の

1) 本稿の分析は，自給自足型生産技術状態の事例についてもほぼ同様に進めることが可能である．いずれの技術状態を仮定するかは分析対象や分析者の嗜好によって左右されるであろう.

2) この点については，cf.〔5〕pp. 92-93.

非負象限とし，$R_{\oplus}^{n_1}$ の集合 Ω^{n_1} を投入物投入の集合とする．時刻 t において，投入物の任意の投入に対して，技術的に生産可能な産出物産出の集合——$R_{\oplus}^{n_2}$ の部分集合——が経済の技術状態として対応していると，ここに投入物の投入と産出物の産出との間に1つの対応が定められる．この対応を

$$\Gamma_t : \Omega^{n_1} \longrightarrow R_{\oplus}^{n_2}$$

と書き，(時刻 t)の生産対応と呼ぶ．

仮定1　経済に存在する異質な財の個数は $n+1 \in N$ であり，それは考察する全期間域 N にわたって不変である．すべての財は連続的に分割可能である．これら $n+1$ 個の異質な財はすべての時刻に対して(技術的に)生産可能な n 個の財とすべての時刻に対して生産不能な労働力と呼ばれる同質的な1個の財とに分類される．この生産不能な労働力という財の存在量は，総消費者数＝人口と常に一定の関係を保ち，両者は共に外生的に付与される一定率 $\lambda(\geqq 0)$ で毎時刻成長する．また，この経済における技術進歩は純粋に労働力増大的であり，労働効率は外生的に付与される一定率 $\tau(\geqq 0)$ で毎時刻成長する．$\lambda+\tau>0$ とする．更に，適当な制度的状況により，労働力は完全雇用される．

仮定1は，①生産対応 Γ_t が時刻 t に無関係な対応

$$\Gamma : R_{\oplus} \times R_{\oplus}^{n} \longrightarrow R_{\oplus}^{n}$$

と書けること㋺労働力存在量と人口とを同一視して差し支えないこと㋩時刻 t において外生的に供給される効率労働力存在量を l_t とすると，それは，その初期値を1として，

$$l_t = \zeta^{t-1}，\ ただし，\zeta \equiv 1+\lambda+\tau+\lambda\tau>0$$

によって与えられること㊁労働力存在量と労働力投入量が常に一致すること——を意味している．

仮定2　投入と産出はいずれもストック概念に基づいて構成されており，生産期間は1単位期間とする．更に，非効率的生産の事例を排除しない．

以後，時刻 t の生産可能財投入量を $\bar{x}_t \in R_{\oplus}^{n}$，時刻 t の産出量を $\bar{y}_t \in R_{\oplus}^{n}$ によって表示する．

定義 2　生産可能性集合，工程

時刻 t の投入 $(l_t, \overline{x}_t)$ とその投入から技術的に生産可能な時刻 $(t+1)$ の産出 $\overline{y}_{t+1}$ との組 $(l_t, \overline{x}_t, \overline{y}_{t+1})$——これを工程という——を要素とする集合

$$\overline{T}=\{(l_t, \overline{x}_t, \overline{y}_{t+1})\,|\,(l_t, \overline{x}_t)\in\overline{R}_{\oplus}\times\overline{R}_{\oplus}{}^n,\ \overline{y}_{t+1}\in\Gamma(l_t, \overline{x}_t)\}$$

を生産可能性集合という．生産可能性集合はすべての時刻 t にわたって不変である．

定義 3　無償生産の不可能性

生産可能性集合 $\overline{T}$ は，

$$(l_t, \overline{x}_t, \overline{y}_{t+1})\in\overline{T},\ l_t=0,\ \overline{y}_{t+1}\neq 0\Rightarrow\overline{y}_{t+1}<\zeta\overline{x}_t$$

を満たすとき，無償生産が不可能であるという．

定義 3 は，退蔵活動だけでは効率労働力 1 単位当たりのストック水準を維持することが不可能であることを意味している．

定義 4　無償処分の可能性

生産可能性集合 $\overline{T}$ は，

$$(l_t, \overline{x}_t, \overline{y}_{t+1})\in\overline{T},\ \overline{x}_t'\geqq\overline{x}_t,\ 0\leqq\overline{y}_{t+1}'\leqq\overline{y}_{t+1}\Rightarrow(l_t, \overline{x}_t, \overline{y}_{t+1})\in\overline{T}$$

を満たすとき，無償処分が可能であるという．

定義 3 は，任意の工程に対して，投入は下回ることがなく産出は上回ることのない投入と産出の組もまた工程となることを意味している．

仮定 3　生産可能性集合 $\overline{T}$ は，閉凸錐，無償生産不可能，無償処分可能である．

仮定 4　生産可能性集合 $\overline{T}$ は次の性質を持つ．すなわち，

$$\exists(l_t, \overline{x}_t, \overline{y}_{t+1})\in\overline{T}:\zeta\overline{x}_t<<\overline{y}_{t+1}$$

仮定 4 は，労働力と生産可能財との間にある程度——場合によっては非常に緩い程度であってもよい——の代替可能性を容認しておけば，不自然なものとは思われないであろう．

ここで，$x_t\equiv\overline{x}_t/l_t$，$y_t\equiv\overline{y}_t/l_t$ とおくと，$\overline{T}$ の代わりに

$$T=\{(x_t, \zeta y_{t+1})\,|\,(1, x_t, \zeta y_{t+1})\in\overline{T}\}$$

を用いてもよいであろう．したがって，集合$\boldsymbol{T}$をも生産可能性集合と呼ぶことにする．また，$\boldsymbol{T}$または$\overline{\boldsymbol{T}}$の任意の要素については，以前と同様に，これを工程と呼ぶことにする．

定義 5　技術的経路，実行可能経路，効率経路

純産出＝消費の経路の集合 $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E_Z}$ 及び $\boldsymbol{E_F}$ を

$$\boldsymbol{Z}=\{\langle \boldsymbol{z}_t\rangle \mid \boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{x}_t,\ (\boldsymbol{x}_t,\ \zeta\boldsymbol{y}_{t+1})\in\boldsymbol{T}\},$$

$$\boldsymbol{F}=\{\langle \boldsymbol{z}_t\rangle \mid \langle \boldsymbol{z}_t\rangle\in\boldsymbol{Z},\ \boldsymbol{z}_t\geqq 0\},$$

$$\boldsymbol{E_Z}=\{\langle \boldsymbol{z}_t\rangle \mid \langle \boldsymbol{z}_t\rangle\in\boldsymbol{Z}\ ;\ \forall\langle \hat{\boldsymbol{z}}_t\rangle\in\boldsymbol{Z}:\langle \hat{\boldsymbol{z}}_t\rangle\not>\langle \boldsymbol{z}_t\rangle\},$$

$$\boldsymbol{E_F}=\boldsymbol{E_Z}\cap\boldsymbol{F}$$

によって定義し，$\boldsymbol{Z}$ の点列を技術的経路，$\boldsymbol{F}$ の点列を実行可能経路，$\boldsymbol{E_Z}$ の点列を効率経路，$\boldsymbol{E_F}$ の点列を効率的実行可能経路という．また，外生的に与えられる初期生産可能財 $\boldsymbol{y}>0$ に対して，集合$\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)$ を

$$\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)=\{\langle \boldsymbol{z}_t\rangle \mid \boldsymbol{z}_t=\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{x}_t,\ (\boldsymbol{x}_t,\ \zeta\boldsymbol{y}_{t+1})\in\boldsymbol{T},\ \overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1\geqq\boldsymbol{y}_1\geqq 0\}$$

によって定義し，更に，$\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)$ を基礎にして，上と同様に，集合 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}_1)$, $\boldsymbol{E_Z}(\boldsymbol{y}_1)$ 及び $\boldsymbol{E_F}(\boldsymbol{y}_1)$ を定義する．そして，各集合の点列については上と同様に技術的経路，実行可能経路，効率経路及び効率的実行可能経路と呼ぶ．しばしば，経路 $\langle \boldsymbol{z}_t\rangle$ とそれに対応する工程の経路 $\langle(\boldsymbol{x}_t,\ \zeta\boldsymbol{y}_{t+1})\rangle$ の組を一まとめにして $\langle \boldsymbol{z}_t,\ \boldsymbol{x}_t,\ \zeta\boldsymbol{y}_{t+1}\rangle$ と書いた方が便利な場合がある．そこで，このような経路の集合に対しては，$\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{T}^N$, $\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)\times\boldsymbol{T}^N$; $\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{T}^N$, $\boldsymbol{F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)\times\boldsymbol{T}^N$; $\boldsymbol{E_Z}\times\boldsymbol{T}^N$, $\boldsymbol{E_Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)\times\boldsymbol{T}^N$; $\boldsymbol{E_F}\times\boldsymbol{T}^N$, $\boldsymbol{E_F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)\times\boldsymbol{T}^N$ と書くことにする．各集合の点列の呼称については，上記のそれを再び使用する．

補助定理 1　仮定１—仮定３の下では，集合$\boldsymbol{F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)$ は集合 $(\boldsymbol{m})$

$$(\boldsymbol{m})=\{\langle \boldsymbol{x}_t\rangle \mid \boldsymbol{x}_t=(x_{1t},\cdots,\ x_{nt})\in\boldsymbol{R}^n,\ \sup_{t\in N}(\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu t}{}^2)^{\frac{1}{2}}<\infty\}$$

の点列収束トポロジーに関して，集合 $(\boldsymbol{m}_\oplus)$

$$(\boldsymbol{m}_\oplus)=\{\langle \boldsymbol{x}_t\rangle \mid \boldsymbol{x}_t\geqq 0,\ \langle \boldsymbol{x}_t\rangle\in(\boldsymbol{m})\}$$

の空でない有界閉集合である．

証明　$\boldsymbol{F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)$ が空でない閉集合であることは明らかであるので，ここでは，

$\boldsymbol{F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}_1}})$ の有界性を示す．今，$\boldsymbol{F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}_1}})$ が有界でないとすれば，任意の $\nu\in\boldsymbol{N}$ に対して，次の性質を満たすある実行可能経路 $\langle z_t^{\nu}\rangle\in\boldsymbol{F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}_1}})$ が存在する．すなわち，ある $t(\nu)\in\boldsymbol{N}$ が存在し，$1\leqq t<t(\nu)$ なるすべての $t\in\boldsymbol{N}$ に対して，$\|\boldsymbol{y}_{t+1}^{\nu}\|\leqq\nu$ かつ $\|\boldsymbol{y}_{t(\nu)+1}^{\nu}\|>\nu$ が成立する．$t(\nu)=1$ ならば $\|\boldsymbol{x}_{t(\nu)}^{\nu}\|=\|\boldsymbol{x}_1^{\nu}\|\leqq\|\boldsymbol{y}_1\|\leqq\|\overline{\overline{\boldsymbol{y}_1}}\|$ である．一方，$t(\nu)>1$ならば，$\|\boldsymbol{x}_{t(\nu)}^{\nu}\|\leqq\|\boldsymbol{y}_{t(\nu)}^{\nu}\|\leqq\nu<\|\boldsymbol{y}_{t(\nu)+1}^{\nu}\|$ であるから，$\overline{\boldsymbol{T}}$ の ν に関する点列$\langle(1/\|\boldsymbol{y}_{t(\nu)+1}^{\nu}\|,\ \boldsymbol{x}_{t(\nu)}^{\nu}/\|\boldsymbol{y}_{t(\nu)+1}^{\nu}\|,\ \zeta\boldsymbol{y}_{t(\nu)+1}^{\nu}/\|\boldsymbol{y}_{t(\nu)+1}^{\nu}\|)\rangle$ を考えると，仮定3により，その極限点 $(0,\ \boldsymbol{x}^{\infty},\ \boldsymbol{y}^{\infty})$ は $\overline{\boldsymbol{T}}$ の要素である．ところが，このとき，$\|\boldsymbol{x}^{\infty}\|\leqq 1$，$\|\boldsymbol{y}^{\infty}\|=\zeta$ により，$\zeta\|\boldsymbol{x}^{\infty}\|\leqq\|\boldsymbol{y}^{\infty}\|$ となっているが，これは無償生産不可能の仮定に矛盾する．（証了）

仮定 5　時刻 t における一時的社会厚生指標を，同時刻の平均的消費者の一時的効用指標によって定義する．それは，平均的消費者の消費＝純産出 $\mathring{\boldsymbol{z}}$ によって定義される時を通じて不変な実数値関数

$$u=u(\mathring{\boldsymbol{z}}),\quad \mathring{\boldsymbol{z}}\in\boldsymbol{R}_{\oplus}^{n},\quad u\in\boldsymbol{R}$$

によって与えられる．u は $\boldsymbol{R}_{\oplus}^{n}$ の正象限 $\boldsymbol{R}_{+}$ 上で連続かつ $-\infty<u(0)=\lim_{\mathring{\boldsymbol{z}}\to+0}u(\mathring{\boldsymbol{z}})<\infty$ なる $\gamma(0<\gamma\leqq1)$ 次同次凹関数であり，

$$\mathring{\boldsymbol{z}}\geqq\mathring{\boldsymbol{z}}'\Rightarrow u(\mathring{\boldsymbol{z}})\geqq u(\mathring{\boldsymbol{z}}'),\quad \mathring{\boldsymbol{z}}>\mathring{\boldsymbol{z}}'\Rightarrow u(\mathring{\boldsymbol{z}})>u(\mathring{\boldsymbol{z}}')$$

という意味で（単調）増加関数である．

一時的社会厚生関数に基づいて，期間域$\boldsymbol{N}$を通じての社会厚生汎関数を定義するわけであるが，その定義の仕方については，大別して2つの相異なる立場があるように思われる．その1つは，ラムゼイ〔14〕のように，全世代を平等に処遇するという立場であり，もう1つは，キャス〔3〕のように，近接将来世代を優遇するという立場である．いずれの立場にもそれぞれの存在理由があり，我々にはその優劣を判定することはできない．そこで，本稿では，相異なる2つの立場を平等に取り上げることにする．すなわち，全世代平等処遇の仮定と近接将来世代優遇の仮定のそれぞれに基づいて，多部門経済における2つの最適成長モデルを整理するであろう．前者の仮定を採るモデル分析はゲール〔6〕，マックファーデン〔8〕，ブロック〔1〕等によって，また，後者の仮定を採

るモデル分析はラドナー〔13〕，サザーランド〔16〕，ペレッグ-ライダー〔12〕等によって継承されてきた．

さて，関数 u は γ 次同次関数であるから，独立変数の平均的消費者の消費 $\mathring{z}$ を効率労働力1単位当たりの純産出 $z=\mathring{z}/(1+\tau)^{t-1}$ に置き換えると，時刻 t の一時的社会厚生関数は

$$u=(1+\tau)^{\gamma(t-1)}u(z),\ z\in R_{\oplus}^{n},\ u\in R$$

と書くことができる．ここで，$(1+\tau)^{\gamma}$ は技術進歩が将来世代に及ぼす優遇度であると解釈すると，全世代平等処遇の仮定は，一時的社会厚生の現在価値が $u(z)$ で与えられることを意味し，近接将来世代優遇の仮定は，一時的社会厚生の現在価値が $u(z)\delta^{t-1}$，$0<\delta<1$，で与えられることを意味するであろう．このことを考慮して，2つのモデルにおける最適性概念を次のように定義する．

定義6A　A-最適経路

各世代平等処遇の多部門最適経済成長モデル——モデル A——においては，任意の実行可能経路 $\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して，社会的厚生汎関数 $\sum_{t=1}^{\infty}u(z_t)$ を考える．この汎関数は（有限値には）収束しないかもしれない．そこで，$\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ は，

$$(1)\quad \forall\langle\tilde{z}_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1):\sum_{t=1}^{\infty}[u(z_t)-u(\tilde{z}_t)]\geqq 0$$

——追付き基準 (overtaking criterion)[1]——ならば，A-最適経路であるという．

定義6B　B-最適経路

近接将来世代優遇の多部門最適経済成長モデル——モデル B——においては，任意の実行可能経路 $\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して，社会的厚生汎関数を

$$(2)\quad W=\sum_{t=1}^{\infty}u(z_t)\delta^{t-1},\ 0<\delta=\text{const.}<1$$

によって定義する．ここで，$(1-\delta)/\delta$ は技術進歩が将来世代に及ぼす優遇度をも考慮に入れた一時的社会厚生指標の時間割引率を意味している．$\langle z_t\rangle\in$

1）追い付き基準のより厳密な取り扱いについては，cf. ゲール〔6〕，マックファーデン〔8〕及びブロック〔1〕〔2〕等．

$F(\overline{\overline{y}}_1)$ は，（2）を最大化するとき，B-最適経路であるという．

3 最適均斉経路

定義 7 均斉経路，最適均斉経路

実行可能経路 $\langle z_t,\ x_t,\ \zeta y_{t+1}\rangle \in F\times T^N$ は，すべての時刻 t に関して，

$$z_{t+1}=z_t,\quad x_{t+1}=x_t,\quad y_{t+1}=y_t$$

となっているとき，均斉経路であるといい，以下においては，添字 t を省略して，$\langle z,\ x,\ \zeta y\rangle$ で表すことにする．均斉経路 $\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y^*\rangle$ は，任意の均斉経路 $\langle z,\ x,\ \zeta y\rangle$ に対して，$u(z^*)\geqq u(z)$ となるとき，最適均斉経路であるという．

定理 1 仮定1一仮定5の下では，最適均斉経路が存在する．

証明 上記仮定の下では，補助定理1の証明手続をより簡略にした手続きにより，均斉経路 $\langle z,\ x,\ \zeta y\rangle$ に対応する z の全体の集合は $R_{\oplus}{}^n$ の空でないコンパクト集合であることが分かり， また，関数 u は $R_{\oplus}{}^n$ 上で連続である．したがって，最大値の定理により証明は完了する． （証了）

次の仮定は，関数 u の線形の可能性を排除し，また，固定的生産係数の可能性をも排除する．後者の点において，それは厳しい仮定ではあるが，最適均斉経路の一意性を保証するであろう．

仮定 6 （a）関数 u は $R_+{}^n$ 上で狭義凹関数である．すなわち，

$$\mathring{z}\neq\mathring{z}'\Rightarrow{}^{\forall}\alpha(0<\alpha<1):u[\alpha\mathring{z}+(1-\alpha)\mathring{z}']>\alpha u(\mathring{z})+(1-\alpha)u(\mathring{z}').$$

（b）生産可能性集合 T は産出の狭義凸性を満たす．すなわち，任意の相異なる2つの工程 $(x_t{}^1,\ \zeta y_{t+1}{}^1)\neq(x_t{}^2,\ \zeta y_{t+1}{}^2)$ とある正数 $\beta(<1)$ に対して，

$$^{\exists}(x_t,\ \zeta y_{t+1})\in T:x_t\leqq\beta x_t{}^1+(1-\beta)x_t{}^2,\ y_{t+1}>>\beta y_{t+1}{}^1+(1-\beta)y_{t+1}{}^2.$$

定理 2 仮定1一仮定6の下では，最適均斉経路 $\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y^*\rangle$ は一意的であり，かつ，$z^*>>0$ である ．

証明 仮定4により，均斉経路 $\langle\tilde{z},\ \tilde{x},\ \zeta\tilde{y}\rangle$，$\tilde{z}>>0$ が存在する．ゆえに，仮定5により，$z^*>>0$ である．次に，$\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y\rangle$ と $\langle z^\circ,\ x^\circ,\ \zeta y^\circ\rangle$ とを

相異なる2つの最適均斉経路とする．$z^*\neq z^\circ$ ならば，$\frac{1}{2}\langle z^*+z^\circ,\ x^*+x^\circ,\ \zeta(y^*+y^\circ)\rangle$ もまた均斉経路となるが，仮定6により，$\frac{1}{2}[u(x^*)+u(x^\circ)]=u(x^*)<u[\frac{1}{2}(z^*+z^\circ)]$ となる．これは矛盾である．よって，$z^*=z^\circ$．次に，$x^*\neq x^\circ$ ならば，仮定6により，ある正数 $\beta(<1)$ に対して，ある均斉経路$\langle z,\ x,\ \zeta y\rangle$ が存在して，$x\leqq\beta x^*+(1-\beta)x^\circ$，$y>>\beta y^*+(1-\beta)y^\circ$ かつ $z=y-x>>\beta(y^*-x^*)+(1-\beta)(y^\circ-x^\circ)=z^*$ となるが，これも矛盾であって，$x^*=x^\circ$．最後に，$z^*+x^*=y^*=z^\circ+x^\circ=y^\circ$． （証了）

定理3　仮定1—仮定5の下では，最適均斉成長経路 $\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y^*\rangle$ に対して，すべての実行可能経路 $\langle z_t,\ x_t,\ \zeta y_{t+1}\rangle\in F\times T^N$ に関して，

（3）　$u(z_t)-u(z^*)\leqq p^*(z_t-z^*)$,

（4）　$p^*(y_{t+1}-x_t)\leqq p^*(y^*-x^*)=p^*z^*$

を満たす $p^*>>0$ が存在する．特に，仮定6の（b）が追加されると，$(x_t,\ \zeta y_{t+1})\neq(x^*,\ \zeta y^*)$ の場合には，（4）の不等号は狭義不等号となる．

証明　**段階1**　集合 A, B 及び $A-B$ を

$$A=\{a_t\,|\,a_t=y_{t+1}-x_t,\ (x_t,\ \zeta y_{t+1})\in T\},$$

$$B=\{z\,|\,z\in R_\oplus{}^n,\ u(z)\geqq u(z^*)\},$$

$$A-B=\{a_t-z\,|\,a_t\in A,\ z\in B\}$$

とおくと，$y^*-x^*-z^*=0\in A-B$ であるから，$(A-B)\cap R_\oplus{}^n\neq\phi$ (空集合) であるが，$a_t-z(\neq 0)\in(A-B)\cap R_\oplus{}^n$ とすると，仮定5により，$\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y^*\rangle$ が最適均斉経路であることに反する．ゆえに，$(A-B)\cap R_+{}^n\neq\phi$ であるから，二階堂〔10〕の p. 210 の系2(i) を利用すると，

①　$\exists p>0\ \forall a_t-z\in A-B:\ p(a_t-z)\leqq 0$

となって（4）が成立する．特に，仮定6の（b）の下では，ある工程 $(x_t,\ \zeta y_{t+1})$ に対して（4）が等号で成立すれば，ある正数 $\beta(<1)$ に対して，$x_t{}^\triangledown\leqq\beta x^*+(1-\beta)x_t$ かつ $y_{t+1}{}^\triangledown>>\beta y^*+(1-\beta)y_{t+1}$ を満たすある工程 $(x_t{}^\triangledown,\ \zeta y_{t+1}{}^\triangledown)$が存在して，$p(y_{t+1}{}^\triangledown-x_t{}^\triangledown)>p[(1-\beta)(y_{t+1}-x_t)+\beta(y^*-x^*)]=pz^*$ となるが，これは矛盾であるから，（4）の不等号は狭義不等号となる．

段階 2　次に，先にその存在が示された（4）を満たす $\boldsymbol{p}>0$, $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{R}^n$, を所与として，

② $\left\{\begin{array}{l}\text{制約条件 } g(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{z})\geqq 0,\ \boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}_\oplus{}^n, \text{ の下で } u(\boldsymbol{z}) \text{ を最大化すると}\\ \text{いう問題}\end{array}\right.$

を考えると，$\boldsymbol{z}^*$ はこの問題の解となっていることを示す．$\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{B}$ ならば $\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ であるから，①により，$g(\boldsymbol{z})\leqq 0$ である．したがって，この対偶により，$g(\boldsymbol{z})>0$ かつ $\boldsymbol{z}\geqq\boldsymbol{0}$ ならば，$u(\boldsymbol{z})<u(\boldsymbol{z}^*)$ である．また，仮定 4 及び①により，ある $\hat{\boldsymbol{a}}_t=\hat{\boldsymbol{y}}_{t-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_t\in\boldsymbol{A}$ に対して，$\hat{\boldsymbol{x}}_t<<\hat{\boldsymbol{y}}_{t+1}$ かつ $0<\boldsymbol{p}(\hat{\boldsymbol{y}}_{t+1}-\hat{\boldsymbol{x}}_t)\leqq\boldsymbol{p}\boldsymbol{z}^*$ であること，つまり $g(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{p}\boldsymbol{z}^*>0$ であることに留意すると，$g(\boldsymbol{z})=0$ かつ $\boldsymbol{z}\geqq\boldsymbol{0}$ ならば，任意の非負数 $\omega(<1)$ に対して $g(\omega\boldsymbol{z})>0$ となって，$u(\omega\boldsymbol{z})<u(\boldsymbol{z}^*)$ となる．したがって，u の連続性により，$\lim_{\omega\to 1}u(\omega\boldsymbol{z})=u(\boldsymbol{z})\leqq u(\boldsymbol{z}^*)$ となる．

段階 3　$\boldsymbol{z}^*$ は問題②の解であり，かつ，$g(\boldsymbol{0})>0$ であることから，ある正数 μ が存在して，すべての $\boldsymbol{z}_t\in\boldsymbol{R}_\oplus{}^n$ に対して，

$$u(\boldsymbol{z}^*)+\mu g(\boldsymbol{z}^*)=u(\boldsymbol{z}^*)\geqq u(\boldsymbol{z}_t)+\mu g(\boldsymbol{z}_t)=u(\boldsymbol{z}_t)+\mu\boldsymbol{p}(\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{z}_t)$$

となるから，[1] ここで改めて，$\mu\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p}^*$ と書くことによって，（3）が得られる．もちろん，$\boldsymbol{p}^*$ に対して，（4）の成立は明らかである．

段階 4　$\boldsymbol{p}^*>>0$ を示すために，ある $\hat{\nu}(1\leqq\hat{\nu}\leqq n)$ に対して，$p_{\hat{\nu}}{}^*=0$ ならば矛盾することを示す．段階 1—段階 3 の結果により，$\boldsymbol{p}^*>0$ であるから，ある $\tilde{\nu}(1\leqq\tilde{\nu}\leqq n,\ \tilde{\nu}\neq\hat{\nu})$ に対して，$p_{\tilde{\nu}}{}^*>0$ である．そこで，今，$\boldsymbol{c}$——$c_{\hat{\nu}}=1$, $\nu\neq\hat{\nu}$ に対して $c_\nu=0$——及び $\boldsymbol{c}'$——$c_{\tilde{\nu}}'=1$, $\nu\neq\hat{\nu}$ に対して $c_\nu'=0$—— を考えると，仮定 5 により，十分小さい正数 θ に対して，$\boldsymbol{z}\equiv\boldsymbol{z}-\theta\boldsymbol{c}'+\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{p}^*\breve{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{z}^*-\theta\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{c}'<\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{z}^*$ となる．しかし，これは（3）に矛盾する．　（証了）

系　任意の $\tau\in\boldsymbol{N}$ と任意の実行可能経路 $\langle\boldsymbol{z}_t\rangle\in\boldsymbol{F}(\bar{\bar{\boldsymbol{y}}}_1)$ に対して，ある実数 $\bar{r}$ が存在して，

1）二階堂（Nikaido）〔9〕の定理 3.17（p. 52），または，杉山〔15〕の定理 4.4（Kuhn-Tucker）（p. 28）の帰結が利用されている．

（5）　$\sum_{t=1}^{\tau}[u(z_t)-u(z^*)]\leqq\bar{r}$

が成立する．

証明　（3）（4）及び補助定理1により，

$$\sum_{t=1}^{\tau}[u(z_t)-u(z^*)]\leqq\sum_{t=1}^{\tau}p^*(z_t-z^*)$$

$$=p^*y_1+\sum_{t=1}^{\tau}[p^*(y_{t+1}-x_t)-p^*(y^*-x^*)]-p^*y_{\tau-1}-p^*z^*$$

$$\leqq p^*y_1-p^*y_{\tau+1}\leqq\bar{r}.$$

（証了）

（4）は，最適均斉経路 $\langle z^*, x^*, \zeta y^*\rangle$ に対応する競争的均衡価格系の存在を主張し，（3）は，z^* が予算制約 $p^*z^*\geqq p^*z$ の下で一時的社会厚生指標 u を最大化することを意味している．また，（5）は，$\langle z^*\rangle$ よりも無限に優れているような実行可能経路 $\langle z_t\rangle\in F(\bar{\bar{y}}_1)$ は存在しないことを主張している．しかし，任意の非最適均斉経路のように，ある実行可能経路は $\langle z^*\rangle$ よりも無限に悪化し得る．

なお，上記の競争的均衡価格系については，一般に次のように定義される．

定義8　競争経路，競争的実行可能経路，競争的均衡価格系

技術的経路 $\langle\tilde{z}_t, \tilde{x}_t, \zeta\tilde{y}_{t+1}\rangle\in Z\times T^N$ は任意の $t\in N$ と任意の工程 $(x_t, \zeta y_{t+1})\in T$ に対して

$$\tilde{p}_{t+1}y_{t+1}-\tilde{p}_tx_t\leqq\tilde{p}_{t+1}\tilde{y}_{t+1}-\tilde{p}_t\tilde{x}_t$$

が成立するような $R_{\oplus}{}^n$ の点列 $\langle p_t\rangle\neq\langle 0\rangle$ が存在するとき，競争経路であるという．特に，競争経路が実行可能経路であるとき，それを競争的実行可能経路という．競争経路 $\langle\tilde{z}_t, \tilde{x}_t, \zeta\tilde{y}_{t+1}\rangle$ に対応する $\langle\tilde{p}_t\rangle$ を（競争経路に）同伴する競争的均衡価格系という．

4　ラムゼイ型多部門経済の最適成長モデル——モデルA——

補助定理2　仮定1—仮定5の下では，$\bar{\bar{y}}_1\in R_+{}^n$ ならば，任意の有界な実行可能経路 $\langle z_t\rangle\in F$, $\|z_t\|<\infty$, に対して，それに収束するような $\bar{\bar{y}}_1$ から出発する実行可能経路 $\langle z_t\rangle\in F(\bar{\bar{y}}_1)$ が存在する．

証明　**段階1**　仮定4及び $\bar{\bar{y}}_1>>0$ により，$y>>z$ かつ $\bar{\bar{y}}_1>>x$ を満た

す均斉経路 $\langle z, \ x, \ \zeta y\rangle$ が存在する．したがって，この $\langle z, \ x, \ \zeta y\rangle$ と任意に与えられた実行可能経路 $\langle\tilde{z}_t, \ \tilde{x}_t, \ \zeta\tilde{y}_{t+1}\rangle \in F(\bar{\bar{y}}_1)\times T^N$ に対しては，ある正数 $\alpha(<1)$ に対して，

① $x_1 \equiv (1-\alpha)\tilde{x}_1 + \alpha x << y \equiv y_1, \ x << \bar{\bar{y}}_1$

が成立する．これだけの準備の下に，以下においては

② $x_t \equiv (1-\alpha^t)\tilde{x}_t + \alpha^t x, \ y_t \equiv (1-\alpha^{t-1})\tilde{y}_t + \alpha^{t-1} y$

によって定義される $z_t = y_t - x_t$ に対して，$\langle z_t\rangle \in F(y_1)$，$\lim\limits_{t\to\infty} z_t = z_t$ となることを示す．

段階 2　①により $x_1 << y_1$ であることと，②により

$$x_t = (1-\alpha)\tilde{x}_t + \alpha[(1-\alpha^{t-1})\tilde{x}_t + \alpha^{t-1} x] = (1-\alpha)\tilde{x}_t + \alpha x_{t-1},$$

$$y_t = (1-\alpha)\tilde{y}_t + \alpha[(1-\alpha^{t-2})\tilde{y}_t + \alpha^{t-2} y] = (1-\alpha)\tilde{y}_t + \alpha y_{t-1}$$

となることに注目し，$x_{t-1} << y_{t-1}$ と仮定して数学的帰納法を適用すると，$\tilde{z}_t > 0$ により，

$$z_t = y_t - x_t = (1-\alpha)(\tilde{y}_t - \tilde{x}_t) + \alpha(y_{t-1} - x_{t-1}) >> 0$$

となり，$\langle z_t\rangle \in F(\bar{\bar{y}}_1)$ であることが分かる．次に，②により，すべての t に対して，$z_t - \tilde{z}_t = \alpha^{t-1}[(y - \tilde{y}_t) - \alpha(x - \tilde{x}_t)]$ となるが) 補助定理 1 及び $0 < \alpha < 1$ により，

$$\lim_{t\to\infty} \|z_t - \tilde{z}_t\| = \lim_{t\to\infty} \alpha^{t-1} \|(y - \tilde{y}_t) - \alpha(x - \tilde{x}_t)\| = 0. \qquad \text{（証了）}$$

定義 9　*A*-候補経路

実行可能経路 $\langle z_t\rangle \in F(\bar{\bar{y}}_1)$ は，最適均斉経路 $\langle z^*, \ x^*, \ \zeta y^*\rangle$ に対して

$$\exists_{\underline{r}\in R} \forall_{\tau\in N} : \sum_{t=1}^{\tau} [u(z_t) - u(z^*)] \geqq \underline{r}$$

が成立するとき，*A*-候補経路という．

補助定理 3　仮定 1 —仮定 5 の下では，実行可能経路 $\langle z_t\rangle \in F(\bar{\bar{y}}_1)$ が *A*-候補経路でないならば，次の関係が成立する．

$$\sum_{t=1}^{\infty} [u(z_t) - u(z^*)] = -\infty.$$

証明　*A*-候補経路ではない任意の実行可能経路 $\langle z_t\rangle \in F(\bar{\bar{y}}_1)$ に対しては，

すべての実数 r_1 に対して，ある $\tau_1=\tau_1(r_1)\in \boldsymbol{N}$ が存在して，$\sum_{t=1}^{\tau_1}[u(z_t)-u(z^*)]<r_1$ となる．したがって，（3）（4）及び補助定理1から，（5）を導出したときと同じ手続きにより，すべての $\tau(>\tau_1)$ に対して，

$$\sum_{t=1}^{\tau}[u(z_t)-u(z^*)]=\sum_{t=1}^{\tau_1}[u(z_t)-u(z^*)]+\sum_{t=\tau_1+1}^{\tau}[u(z_t)-u(z^*)]<r_1+r_2,$$

ただし，$r_2\in \boldsymbol{R}$ は τ や τ_1 とは無関係，

となるが，r_1 の選び方は任意であったから，$r_1\to-\infty$ とすることによって結論を得る．（証了）

既述の議論では，A-候補経路の存在はまだ完全には保証され得ない．次の2つの仮定が追加されると，初期生産可能財存在量 $\overline{\overline{y}}_1$ に対して，A-候補経路の存在が保証されるであろう．

仮定7　ある時刻 τ に対して $y_\tau>>0$ となるような実行可能経路 $\langle z_t,\ x_t,\ \zeta y_{t+1}\rangle\in \boldsymbol{F}(y_1)\times \boldsymbol{T}^N$ が存在する．

仮定8　一時的社会厚生関数 u は次の性質――最適均斉経路 $\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y^*\rangle$ における有界勾配性 (steepness)――を持つ．すなわち，

$$\exists L\in \boldsymbol{R}_+\forall z\in \boldsymbol{R}_{\oplus}^n:|u(z)-u(z^*)|\leqq L\|z-z^*\|.$$

仮定4を考慮すれば，$\overline{\overline{y}}_1>>0$ ならば仮定7は常に成立し，不要となる．一方，仮定8は，関数 u がいわゆるリプシッツ (Lipschitz) の条件を満たしておれば，常に成立する．[1)]

定理4　仮定1―仮定5，仮定7及び仮定8の下では，A-候補経路が存在する．

証明　ある実行可能経路 $\langle z_t\rangle\in \boldsymbol{F}(\overline{\overline{y}}_1)$ が A-候補経路であるか否かということとは，有限期間域内における $z_t=y_t-x_t$ の数値には無関係であるから，一般性を失うことなく，仮定7を $\overline{\overline{y}}_1>>0$ と解釈しても差し支えない．そうすると，補助定理2の証明中の $\langle \tilde{z}_t,\ \tilde{x}_t,\ \zeta\tilde{y}_{t+1}\rangle$ を $\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y^*\rangle$ に置き換えて全く同じ手続きに従うことにより，適当な均斉経路 $\langle z,\ x,\ \zeta y\rangle$ と適当な正

1）今の場合，リプシッツの条件は次のように書かれるであろう．

$$\exists L\in \boldsymbol{R}_+\forall z_1,\ z_2\in \boldsymbol{R}_{\oplus}^n:|u(z_1)-u(z_2)|\leqq L\|z_1-z_2\|.$$

数 $\alpha(<1)$ に対して，実行可能経路 $\langle z_t\rangle=\langle z^*+\alpha^{t-1}[(y-y^*)-\alpha(x-x^*)]\rangle \in F(\overline{\overline{y}}_1)$，$\lim_{t\to\infty} z_t=z^*$，が存在する．したがって，仮定 8 により，ある正数 L が存在して，

$$|u(z_t)-u(z^*)|\leqq L\|z-z^*\|\equiv L\alpha^{t-1}\beta,\ \beta=\text{const.}>0,$$

$$\therefore\ \left|\sum_{t=1}^{\tau}[u(z_t)-u(z^*)]\right|\leqq\sum_{t=1}^{\tau}|u(z_t)-u(z^*)|<L\beta/(1-\alpha)$$

となるから，$\langle z_t\rangle$ は A-候補経路である． (証了)

定理 5[1] 仮定 1 —仮定 8 の下では，すべての A-候補経路は一意的最適均斉経路 $\langle z^*,\ x^*,\ \zeta y^*\rangle$ に収束する．

証明 （3）及び（4）を考慮して，任意の実行可能経路 $\langle\overset{\square}{z}_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して

$$(6)\quad\begin{cases}\varepsilon_t\equiv p^*(\overset{\square}{z}_t-z^*)-[u(\overset{\square}{z}_t)-u(z^*)]\geqq 0,\\ \varepsilon_t'\equiv p^*(y^*-x^*)-p^*(\overset{\square}{y}_{t+1}-\overset{\square}{x}_t)\geqq 0\end{cases}$$

とおくと，任意の A-候補経路 $\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して，（3）（4）及び補助定理 1 により，ある実数 $\underline{r}$ と r' が存在して，任意の時刻 τ に対して，

$$\underline{r}\leqq\sum_{t=1}^{\tau}[u(z_t)-u(z^*)]=p^*y_1-\sum_{t=1}^{\tau}\varepsilon_t'-p^*y_{\tau+1}-\sum_{t=1}^{\tau}\varepsilon_t$$

$$<r'-\sum_{t=1}^{\tau}\varepsilon_t,\ \text{i.e.,}\ \sum_{t=1}^{\tau}\varepsilon_t<r'-\underline{r}$$

が成立する．かくして，単調非減少数列 $\langle\sum_{t=1}^{\tau}\varepsilon_t\rangle_{\tau\in N}$ は，上に有界であるから，収束する．換言すると，級数 $\sum_{t=1}^{\infty}\varepsilon_t$ は収束し，$\lim_{t\to\infty}\varepsilon_t=0$ となる．ここで，仮定 4 をす考慮すると，もし z_t が収束しないとすれば，関数 u は $\lim_{t\to\infty} z_t$ のとる領域 $\{z\,|\,z=\lim_{t\to\infty} z_t\}$ に関して，$u(z)-p^*z=u(z^*)-p^*z^*=\text{const.}=0$，すなわち，$u(z)=p^*z$ となる．しかし，これは仮定 6 と矛盾する．ゆえに，$\langle z_t\rangle$ は収束する．そこで，$\lim_{t\to\infty} z_t=z_\infty$ とおくと，$\langle z_t\rangle$ は A-候補経路であるから，$u(z_\infty)=u(z^*)$ である．あとは，定理 2 の証明法をそのまま踏襲すれば，証明が完了する． (証了)

1） この定理は，任意の A-候補経路のある種のターンパイク性を示している．

定理 6　仮定 1 —仮定 8 の下では，A-最適経路 $\langle z_t,\ x_t,\ \zeta y_{t+1}\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)\times T^N$ が存在する．

証明　段階 1 と 2 において，任意の実行可能経路 $\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して，(6) によって ε_t と ε_t' を定義し，更に，$\theta_t\equiv\varepsilon_t+\varepsilon_t'$ とおくと，ある $\langle\hat{z}_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ が存在し，すべての $\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して，$\sum_{t=1}^{\infty}\hat{\theta}_t\leqq\sum_{t=1}^{\infty}\theta_t$，ただし，$\hat{\theta}_t$ は $\hat{z}_t$ に対応している，となることを示す．

段階 1　定理 4 により A-候補経路は必ず存在し，しかも定理 5 のときと全く同様にすれば，すべての A-候補経路 $\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して，$\sum_{t=1}^{\infty}\theta_t$ は有限値となることが分かる．そこで，$\alpha\equiv\inf_{\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)}\sum_{t=1}^{\infty}\theta_t$ とおくと，

$$① \quad \forall_{\nu\in N}\exists\langle z_t\rangle^{(\nu)}\in F(\overline{\overline{y}}_1):\sum_{t=1}^{\infty}\theta_t^{(\nu)}\leqq\alpha+\frac{1}{\nu}$$

となる．補助定理 1 により，$F(\overline{\overline{y}}_1)$ は (m_+) 上のコンパクト集合であるから①によって得られる実行可能経路の列 $\langle z_t\rangle^{(\nu)}$ に対して，その適当な収束部分列 $\langle z_t\rangle^{(\nu')}$，$\lim_{\nu'\to\infty}\langle z_t\rangle^{(\nu')}=\langle\hat{z}_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$，が存在する．一方，任意の $t\in N$ に対して，$\langle z_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対応する z_t は有界であり，関数 u は連続であるから，θ_t は有界である．したがって，任意の t に対して $\langle\theta_t^{(\nu')}\rangle$ は有界数列であり，収束部分列 $\langle\theta_t^{(\nu'')}\rangle$，$\lim_{\nu''\to\infty}\theta_t^{(\nu'')}=\hat{\theta}_t$，が存在する．もちろん，$u$ の連続性と θ_t の定義から，数列 $\langle\hat{\theta}_t\rangle$ は実行可能経路 $\langle\hat{z}_t\rangle\in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対応しており，$\beta\equiv\sum^{\infty}\hat{\theta}_t\geqq\alpha$ である．

段階 2　次に，$\beta>\alpha$ とはなり得ないことを示す．$\beta>\alpha$ ならば，$\beta>\mathring{r}>\alpha$ なる実数 $\mathring{r}$ を固定すると，

$$② \quad \exists_{\mathring{\tau}=\mathring{\tau}(\mathring{r})\in N}\forall_{\tau\geqq\mathring{\tau}}:\beta>\sum_{t=1}^{\tau}\hat{\theta}_t>\mathring{r}>\alpha$$

が成立する．一方，$\lim_{\nu''\to\infty}\theta_t^{(\nu'')}=\hat{\theta}_t$ であったから，

$$③ \quad \exists_{\mathring{\nu}''=\mathring{\nu}''(\mathring{r})\in N}\forall_{\nu''\geqq\mathring{\nu}''}:\sum_{t=1}^{\mathring{\tau}}\theta_t^{(\nu'')}\geqq\mathring{r}$$

が成立する．したがって，①と③により，

$$\forall_{\nu''} \geqq \overset{\circ}{\nu}'' : \alpha + \frac{1}{\nu''} \geqq \sum_{t=1}^{\infty} \theta_t^{(\nu'')} \geqq \sum_{t=1}^{\overset{\circ}{\tau}} \theta_t^{(\nu'')} \geqq \overset{\circ}{r}$$

となるが，これは②に矛盾する．

段階 3　段階1と2によってその存在が示された $\langle z_t \rangle \in F(\overline{\overline{y}}_1)$ がA-最適経路であること，すなわち，

④　$\forall \langle z_t \rangle \in F(\overline{\overline{y}}) : \sum_{t=1}^{\infty} [u(\hat{z}_t) - u(z_t)] \geqq 0$

であることを示す．$\langle \hat{z}_t \rangle$ に対しては

$$\exists \overline{r} \in R \, \forall \tau \in N : \sum_{t=1}^{\tau} [u(z_t) - u(z^*)] = p^* y_1 - p^* y_{\tau+1} - \sum_{t=1}^{\tau} \hat{\theta}_t$$

$$\geqq p^* y_1 - p^* y_{\tau+1} - \alpha > \overline{r}$$

となるから，$\langle \hat{z}_t \rangle$ は A-候補経路である．したがって，補助定理2により，A-候補経路ではない任意の実行可能経路 $\langle z_t \rangle \in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対しては，④の不等式の成立は明らかである．一方，段階1，段階2及び定理5により，任意の A-候補経路 $\langle z_t \rangle \in F(\overline{\overline{y}}_1)$ に対して，

$$\sum_{t=1}^{\infty} [u(\hat{z}_t) - u(z_t)] = -\lim_{t \to \infty} p^* (\hat{y}_{t+1} - y_{t+1}) - \sum_{t=1}^{\infty} \hat{\theta}_t + \sum_{t=1}^{\infty} \theta_t \geqq 0$$

となる．　　　　（証了）

5　キャス型多部門経済の最適成長モデル——モデルB——

前節においては，仮定1—仮定8の下では，初期生産可能財存在量 $\overline{\overline{y}}_1$ に対して，一意的最適均斉経路に収束する最適成長経路の存在が明らかにされた．しかし，仮定6（b）の産出の狭義凸性の仮定は，生産可能財の投入と産出に関して，フォン・ノイマン (von Neumann)=レオンチェフ (Leontief)=スラッファ (Sraffa) 型の固定的生産係数の事例を排除しており，その意味において不都合な仮定である．しかも，この仮定を外してしまうと，最適均斉経路の一意性は保証されなくなり，定理5及び定理6を主張することができなくなってしまう．そしてこのことは，追付き基準——全世代平等処遇の仮定——での分析によって最適経済成長経路の存在を示すことが数学的に困難であることを示

唆すると同時に，ひいては，割引率基準——近接将来世代優遇の仮定——の下での分析へと導くことになる.[1]

定理 7　仮定 1—仮定 5 の下では，初期生産可能財存在量 $\overline{\overline{y}}_1$ に対して，B-最適経路が存在する.[2]

証明　仮定 5 により関数 u は連続であり，補助定理 1 により $F(\overline{\overline{y}}_1)$ は (m) の点列収束トポロジーに関して空でないコンパクト集合である．したがって，(2) によって定義される汎関数 W は $F(\overline{\overline{y}}_1)$ 上で連続となり，最大値の定理により，証明は完了する.

(証了)

以下においては，定理 7 によってその存在が保証された B-最適経路の特性，換言すれば，B-最適経路と競争的均衡価格系との関係が検討される．しかし，そのためには若干の準備が必要である.

定義10　効率経路，効率価格系

R^n の所与の点列 $\langle a_t\rangle\in(l^1)$，ただし，$a_t<<0$,

$$(l^1)=\{\langle x_t\rangle\,|\,x_t=(x_{1t},\cdots,x_{nt})\in R^n,\ \sum_{t=1}^{\infty}(\sum_{\nu=1}^{n}x_{\nu t}{}^2)^{\frac{1}{2}}<\infty\},$$

に基づいて，集合 $Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)$ 及び $E_Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)$ を

$$Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)=\{\langle z_t\rangle\,|\,\langle z_t\rangle\in Z(\overline{\overline{y}}_1),\ z_t\geqq a_t,\ \langle a_t\rangle\in(l_1),\ a_t<<0\},$$

$$E_Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)=\{\langle z_t\rangle\,|\,\langle z_t\rangle\in Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)\ ;\ \forall\langle\hat{z}_t\rangle\in Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t):\langle\hat{z}_t\rangle\ngtr\langle z_t\rangle\}$$

によって定義し，$E_Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)$ の点列を ($Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)$ の) 効率経路と呼ぶことにする．また，以前と同様に，$E_Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)\times T^N$ の点列についても，これを効率経路ということにする．所与の効率経路 $\langle\hat{z}_t\rangle\in E_Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)$ に対して，点列 $\langle\hat{p}_t\rangle\in(l^1)$，$\langle\hat{p}_t\rangle>\langle 0\rangle$，が存在して，

$$(7)\quad \forall\langle z_t\rangle\in Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t):\sum_{t=1}^{\infty}\hat{p}_t\hat{z}_t\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\hat{p}_t z_t$$

が成立するとき，$\langle p_t\rangle$ は効率経路 $\langle\hat{z}_t\rangle$ に同伴する効率価格系であるという.

補助定理 1 と同一の証明法により，$Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t)$ は，点列収束トポロジーに関

1)　本節では，仮定 6 と仮定 8 は不要である.
2)　仮定 6 が追加されると，定理 2 を証明したときと同じ手続きにより，B-最適経路の一意性が示される.

して，(m) の空でないコンパクト凸集合であり，$\bar{\bar{Z}}(y_1,\ a_t)\cap(m_{\oplus})=F(\bar{\bar{y}}_1)$ となっている．

さて，（2）によって定義される汎関数Wは，(m) の点列収束トポロジーに関して，$F(\bar{\bar{y}}_1)$ 上では連続であるが，$(m_{\oplus})$ 上のすべての点列に対して連続であるとは限らない．この点は数学上の操作に支障を来す．そこで，ここでは，$(m_{\oplus})$ 上で連続かつ $F(\bar{\bar{y}}_1)$ 上ではWと一致する $(m_{\oplus})$ を定義域とするある適当な関数$\breve{W}$が次の方法によって導入される．

補助定理1によれば，所与の $\bar{\bar{y}}_1>>0$ に対して，$F(\bar{\bar{y}}_1)$ は有界であるから，

$$\exists\breve{r}=\breve{r}(\bar{\bar{y}}_1)\in R\ \forall\langle z_t\rangle\in F(\bar{\bar{y}}_1):\|z_t\|\leqq\breve{r}$$

となる．そこで今，定数 $\breve{\alpha}$ 及び関数 $\breve{u}:R_{\oplus}{}^n\to R$ を

$$\breve{\alpha}=\max\{u(\mathring{z})\,|\,\mathring{z}\geqq 0,\ \|\mathring{z}\|\leqq 2\breve{r}\},$$

$$\breve{u}(\mathring{z})=\min\left[u(\mathring{z}),\ \alpha+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\mathring{z}_\nu}{1+\mathring{z}_\nu}\right]$$

によって定義すると，仮定5により，$\breve{u}$ は，$R_+{}^n$ 上で $\breve{u}(\mathring{z})\leqq\breve{\alpha}+n$，かつ，$\|\mathring{z}\|\leqq\breve{r}$ に対して，$\breve{u}(\mathring{z})=u(\mathring{z})$ となっている．次に，関数 u に基づいて，関数$\breve{W}:(m_{\oplus})\to R$ を

$$(2')\quad \breve{W}(z_t)=\sum_{t=1}^{\infty}\breve{u}(\breve{z}_t)\delta^{t-1},\ 0<\delta<1$$

と定義すると，$\breve{W}$ は $(m_{\oplus})$ 上で凹連続関数となる．更に，$\langle z_t\rangle\in F(\bar{\bar{y}}_1)$ に対しては $W(z_t)=\breve{W}(z_t)$ となっている．

定理8　仮定 1―仮定5 及び $\bar{\bar{y}}_1>>0$ の下では，効率経路 $\langle z_t\rangle\in E_Z(\bar{\bar{y}}_1)\subset E_Z(\bar{\bar{y}}_1,\ a_t)$ がB-最適経路であるための必要十分条件は，次の関係 (i) 及び (ii) が成立するような $\langle z_t\rangle$ に同伴するある効率価格系 $\langle\hat{p}_t\rangle\in(l^1)$ が存在することである．すなわち，

$$(8)\quad\begin{cases}\text{(i)}\quad \langle p_t\rangle>>\langle 0\rangle,\\ \text{(ii)}\quad \sum_{t=1}^{\infty}\hat{p}_t z_t\leqq\sum_{t=1}^{\infty}\hat{p}_t\hat{z}_t,\ \langle z_t\rangle\in(m_{\oplus})\Rightarrow\breve{W}(z_t)\leqq\breve{W}(\hat{z}_t).\end{cases}$$

証明　十分性は明らかであるので，必要性のみを証明すればいい．そのため，

$\langle z_t^* \rangle \in E_Z(\overline{\overline{y}}_1)$ を B-最適経路としておく．

段階 1　集合 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ 及び $\boldsymbol{R}^n$ の点列 $\langle e_t \rangle$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{B}=\{\langle b_t \rangle \mid \langle b_t \rangle \in (m_\oplus),\ \breve{W}(b_t) \geqq \breve{W}(z_t^*)\},$$

$$\boldsymbol{B}(\varepsilon)=\{\langle b_t^\varepsilon \rangle \mid b_t^\varepsilon = b_t + \varepsilon e_t,\ \langle b_t \rangle \in \boldsymbol{B},\ \varepsilon = \text{const.} > 0\},$$

$$e_1=(1, 0, \cdots, 0)\ ;\ {}^\forall t>1 : e_t=0.$$

そうすると，明らかに，$\boldsymbol{B}$ 及び $\boldsymbol{B}(\varepsilon)$ は $(m_\oplus)$ の閉凸（部分）集合であり，

$$\langle b_t^\varepsilon \rangle \in \boldsymbol{B}(\varepsilon),\ \langle b_t' \rangle \in (m_\oplus),\ \langle b_t' \rangle \subset \langle b_t^\varepsilon \rangle \Rightarrow \langle b_t' \rangle \in \boldsymbol{B}(\varepsilon),$$

$$\boldsymbol{B}(\varepsilon) \cap \boldsymbol{Z}(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t) = \phi(\text{空集合}),\ \boldsymbol{B}(\varepsilon) \subset \boldsymbol{B}$$

である．したがって，竹之内〔18〕の例30.3，系33.1，定理33.1，補題33.1，定理33.4，及び竹之内〔19〕の練習問題6 B-13により，ある $\langle p_t \rangle \in (l_1)$, $\langle p_t \rangle \neq \langle 0 \rangle$ が存在して，

$$① \quad {}^\forall \langle b_t^\varepsilon \rangle \in \boldsymbol{B}(\varepsilon)\ \&\ \langle z_t \rangle \in \boldsymbol{Z}(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t) : \sum_{t=1}^\infty p_t b_t^\varepsilon > \sum_{t=1}^\infty p_t z_t,$$

ゆえに，$p_{11}>0$, となる．このとき，もしある $\tau \in \boldsymbol{N}$ とある $\nu \in (1, \cdots, n)$ に対して $p_{\nu\tau}<0$ ならば，十分大きな $b_{\nu\tau}^\varepsilon>0$ を持つ $\langle b_t^\varepsilon \rangle \in b(\varepsilon)$ に対して，①は成立しない．したがって，$\langle p_t \rangle > \langle 0 \rangle$ である．

ここで，$\langle p_t^\cdot \rangle = \langle p_t/p_{11} \rangle$ とおくと，①は

$$② \quad {}^\forall \langle b_t \rangle \in \boldsymbol{B}\ \&\ \langle z_t \rangle \in \boldsymbol{Z}(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t) : \sum_{t=1}^\infty p_t^\cdot b_t > \sum_{t=1}^\infty p_t^\cdot z_t - \varepsilon$$

と書かれる．一方，仮定5及び関数 $\breve{u}$ の定義の仕方から，

$${}^\forall \mathring{z} \in \boldsymbol{R}_\oplus{}^n : -\breve{u}(0) \leqq u(\mathring{z}) - u(0) \leqq \breve{\alpha} + n - u(0)$$

$$\therefore \quad {}^\exists \tilde{\tau} \in \boldsymbol{N} : \sum_{t=\tilde{\tau}+1}^\infty [\breve{u}(z_t^*) - \breve{u}(0)]\delta^{t+1} < \breve{u}(z_1^* + e_1) - \breve{u}(z_1^*)$$

となるから，$b_1^{\tilde{\tau}} = z_1^* + e_1$, すべての $t(1<t \leqq \tilde{\tau})$ に対して $b_t^{\tilde{\tau}} = z_t^*$, すべての $t(t>\tilde{\tau})$ に対して $b_t^{\tilde{\tau}}=0$, によって定義される点列 $\langle b_t^{\tilde{\tau}} \rangle \in (m_\oplus)$ について，

$$③ \quad \begin{cases} \breve{W}(z_t^* + e_t) \geqq \breve{W}(b_t^\tau) > \breve{W}(z_t^*), \\ {}^\exists \varepsilon_0 > 0\ {}^\forall \varepsilon (0<\varepsilon<\varepsilon_0) : \langle b_t^{\tilde{\tau}} \rangle \in \boldsymbol{B}(\varepsilon) \subset \boldsymbol{B} \end{cases}$$

が成立している．ここで，正数 $\varepsilon(<\varepsilon_0)$ に対して，集合 $\boldsymbol{P}(\varepsilon)$ を

$$④\quad \boldsymbol{P}(\varepsilon)=\left\{\langle \boldsymbol{p}_t\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l}\langle \boldsymbol{p}_t\rangle\in(l^1),\ \langle \boldsymbol{p}_t\rangle>\langle 0\rangle,\ \sum_{t=1}^{\bar{\tau}}\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}}=1\,;\\ \forall\langle \boldsymbol{b}_t\rangle\in\boldsymbol{B}\,\&\,\langle z_t\rangle\in\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1,\ \boldsymbol{a}_t):\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{b}_t\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t z_t-\varepsilon\end{array}\right\}$$

によって定義すると，$p_{11}{}^{\cdot}=1$，$b_{11}{}^{\bar{\tau}}\geqq 1$ であるから，$\boldsymbol{P}(\varepsilon)\neq\phi$ である．また，明らかに，

$$0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_0\Rightarrow\boldsymbol{P}(\varepsilon_1)\subset\boldsymbol{P}(\varepsilon_2)$$

が成立している．

段階 2　この段階では，$\boldsymbol{P}(\varepsilon)$ は (l^1) のコンパクト集合となることを示す．仮定 4 及び $\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1>>0$ により，ある均斉経路 $\langle\bar{\boldsymbol{z}},\ \bar{\boldsymbol{x}},\ \zeta\bar{\boldsymbol{y}}\rangle\in\boldsymbol{F}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1)\times\boldsymbol{T}^N\subset\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1,\ \boldsymbol{a}_t)\times\boldsymbol{T}^N$，$\bar{\boldsymbol{z}}>>0$，が存在する．それゆえ，③及び④により，

$$\forall\langle \boldsymbol{p}_t\rangle\in\boldsymbol{P}(\varepsilon):\sum_{t=1}^{\bar{\tau}}\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}}+\varepsilon=1+\varepsilon\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t\bar{\boldsymbol{z}}$$

であるから，$\boldsymbol{P}(\varepsilon)$ は (l^1) の有界（部分）集合である．次に，$\langle \boldsymbol{p}_t{}^i\rangle\in\boldsymbol{P}(\varepsilon)$，$i\in\boldsymbol{N}$，とし，$\lim_{i\to\infty}\langle \boldsymbol{p}_t{}^i\rangle\equiv\langle \boldsymbol{p}_t{}^\infty\rangle$ とおく．明らかに，$\langle \boldsymbol{p}_t{}^\infty\rangle>\langle 0\rangle$ かつ $\sum_{t=1}^{\bar{\tau}}\boldsymbol{p}_t{}^\infty\boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}}=1$ である．一方，$\langle \boldsymbol{a}_t\rangle$ の定め方により，任意の正数 $r_\varepsilon(\geqq p_{\nu t}{}^\infty,\ \nu=1,\cdots,n)$ と任意の正数 $\bar{\theta}$ とに対して，

$$⑥\quad \exists\bar{\mu}\in\boldsymbol{N}:\sum_{t=\bar{\mu}+1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{n}a_{\nu t}>-\bar{\theta}/r_\varepsilon,\qquad \text{ただし，}a_{\nu t}<0,$$

が成立する．また，③を得たときと全く同様にして，任意の所与の $\langle \boldsymbol{b}_t\rangle\in\boldsymbol{B}$ に対して，ある番号 $\bar{\tau}=\bar{\tau}(\theta)\in\boldsymbol{N}$ が定まり，$\boldsymbol{b}_1^{\bar{\tau}}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{e}_1$，すべての $t(1<t\leqq\bar{\tau})$ に対して $\boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}}=\boldsymbol{b}_t$，すべての $t(t>\bar{\tau})$ に対して $\boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}}=0$，によって定義される点列 $\langle \boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}}\rangle\in(m_\oplus)$ について，

$$\breve{W}(\boldsymbol{b}_t+\boldsymbol{e}_t)\geqq\breve{W}(\boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}})>\breve{W}(\boldsymbol{b}_t),\ \langle \boldsymbol{b}_t^{\bar{\tau}}\rangle\in\boldsymbol{B}$$

とすることができる．したがって，④及び⑥により，任意の $i\in\boldsymbol{N}$ と任意の $\mu(\geqq\bar{\mu})\in\boldsymbol{N}$ について，

$$\forall\langle \boldsymbol{b}_t\rangle\in\boldsymbol{B}\,\&\,\langle z_t\rangle\in\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1,\ \boldsymbol{a}_t):\boldsymbol{p}_{11}{}^i\bar{\theta}+\sum_{t=1}^{\bar{\tau}}\boldsymbol{p}_t{}^i\boldsymbol{b}_t$$

$$\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^i z_t-\varepsilon\geqq\sum_{t=1}^{\mu}\boldsymbol{p}_t{}^i z_t+\sum_{t=\mu+1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^i\boldsymbol{a}_t-\varepsilon\geqq\sum_{t=1}^{\mu}\boldsymbol{p}_t{}^i z_t-\bar{\theta}-\varepsilon$$

が成立する．ここで，$\mu\to\infty$ とすると，すべての $\tau[>\max(\bar{\tau},\bar{\mu})]\in\boldsymbol{N}$ について，

$$\forall\langle \boldsymbol{b}_t\rangle\in\boldsymbol{B}\ \&\ \langle \boldsymbol{z}_t\rangle\in\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1,\ \boldsymbol{a}_t):$$
$$\sum_{t=1}^{\tau}\boldsymbol{p}_t{}^{\infty}\boldsymbol{b}_t\geqq\sum_{t=1}^{\tau}\boldsymbol{p}_t{}^{\infty}\boldsymbol{z}_t-\varepsilon-\bar{\theta}(1+p_{11}{}^{\infty})$$

となるが，正数 $\bar{\theta}$ の選び方は任意であったから，結局，$\langle \boldsymbol{p}_t{}^{\infty}\rangle\in\boldsymbol{P}(\varepsilon)$ であることが判明した．

段階 3　$\boldsymbol{P}(\varepsilon)$ はコンパクト集合であることと⑤とにより，

$$\exists\langle \boldsymbol{p}_t{}^*\rangle\in(l^1),\ \langle \boldsymbol{p}_t{}^*\rangle>\langle 0\rangle\ \forall\varepsilon(0<\varepsilon<\varepsilon_0):\langle \boldsymbol{p}_t{}^*\rangle\in\boldsymbol{P}(\varepsilon),$$

i.e. $\exists\langle \boldsymbol{p}_t{}^*\rangle\in(l^1),\ \langle \boldsymbol{b}_t{}^*\rangle>\langle 0\rangle\ \forall\langle \boldsymbol{p}_t\rangle\in\boldsymbol{B}\ \&\ \langle \boldsymbol{z}_t\rangle\in\boldsymbol{Z}(\overline{\overline{\boldsymbol{y}}}_1,\ \boldsymbol{a}_t):$

$$\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{b}_t\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{z}_t,\ \text{esp.}\ \sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{z}_t{}^*\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{z}_t,$$

が成立している．次に，$\langle \boldsymbol{p}_t{}^*\rangle>>\langle 0\rangle$ を示す．そのために，ある $\tau^\circ\in\boldsymbol{N}$ とある $\nu^\circ\in(1,\cdots,n)$ に対して，$p_{\nu^\circ\tau^\circ}{}^*=0$ ならば矛盾することを示す．$\langle \boldsymbol{p}_t{}^*\rangle\neq\langle 0\rangle$ であるから，ある $\tau'\in\boldsymbol{N}$ とある $\nu'\in(1,\cdots,n)$ に対して，$p_{\nu'\tau'}{}^*>0$ である．そこで，今，$c_{\nu^\circ\tau^\circ}{}^\circ=1$，すべての t と $\nu(t\neq\tau^\circ,\ \nu\neq\nu^\circ)$ に対して $c_{\nu t}{}^\circ=0$ によって定義される点列 $\langle \boldsymbol{c}_t{}^\circ\rangle$，及び，$c_{\nu'\tau'}{}'=1$，すべての t と $\nu(t\neq\tau',\ \nu\neq\nu')$ に対して $c_{\nu t}{}'=0$ によって定義される点列 $\langle \boldsymbol{c}_t{}'\rangle$ を考えると，十分小さい正数 θ' に対して，仮定 5 により，$\langle \boldsymbol{z}_t{}^*-\theta'\boldsymbol{c}_t{}'+\boldsymbol{c}_t{}^\circ\rangle\in\boldsymbol{B}$ であるが，

$$\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*(\boldsymbol{z}_t{}^*-\theta'\boldsymbol{c}_t{}'+\boldsymbol{c}_t{}^\circ)=\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{z}_t{}^*-\theta'p_{\nu'\tau'}<\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{z}_t{}^*$$

となる．明らかに，これは矛盾である．

段階 4　次に(ii) を否定すると，

$$\exists\langle \boldsymbol{b}_t\rangle\in\boldsymbol{B}:\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{b}_t=\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{z}_t{}^*,\ \breve{W}(\boldsymbol{b}_t)>\breve{W}(\boldsymbol{z}_t{}^*)$$

となる．したがって，関数 $\breve{u}$ の連続性と（単調）増加性により，この $\langle \boldsymbol{b}_t\rangle$ に対して，

$$\exists\theta''>0:\langle \boldsymbol{b}_t-\theta''\boldsymbol{e}_t\rangle\in\boldsymbol{B},\ \sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*(\boldsymbol{b}_t-\theta''\boldsymbol{e}_t)<\sum_{t=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_t{}^*\boldsymbol{z}_t{}^*$$

となる．しかし，これは，明らかに段階３で示された $\langle p_t^* \rangle$ の性質に矛盾する．　（証了）

定理９　仮定１—仮定５及び $\overline{\overline{y_1}}>>0$ の下では，効率経路 $\langle z_t \rangle \in E_Z(\overline{\overline{y_1}})$ が B-最適経路であるための必要十分条件は，$\langle z_t \rangle$ に同伴する効率価格系 $\langle \hat{p}_t \rangle >> \langle 0 \rangle$ が存在し，かつ，この $\langle p_t \rangle$ に対して，

$$(9)\quad \forall \langle b_t \rangle \in (m_\oplus) : W(z_t) - \sum_{t=1}^{\infty} \hat{p}_t \hat{z}_t \in W(b_t) - \sum_{t=1}^{\infty} \hat{p}_t b_t$$

が成立することである．

証明　十分性は明らかである．必要性を示すには，$\langle z_t^* \rangle \in E_Z(\overline{\overline{y_1}})$ を B-最適経路とするとき，（７）を満たす $\langle p_t^* \rangle \in (m_\oplus)$，$\langle p_t^* \rangle \neq \langle 0 \rangle$，に対して，

$$① \quad \forall \langle b_t \rangle \in (m_\oplus) : \breve{W}(z_t^*) - \sum_{t=1}^{\infty} p_t^* z_t^* \geqq \breve{W}(b_t) - \sum_{t=1}^{\infty} p_t^* b_t$$

が成立することを示した後に，①が関数Wについても成立することを示せばいい．

段階１　定理８により，$\langle z_t^* \rangle$ に対しては（８）を満たす効率価格系 $\langle \tilde{p}_t \rangle \in (m_\oplus)$ が存在する．そこで，この $\langle \tilde{p}_t \rangle$ に対して，集合 A° 及び A' を

$$A^\circ = \{(\alpha_1^\circ,\ \alpha_2^\circ) \in R^2 \mid \exists \langle b_t \rangle \in (m_\oplus) : \alpha_1^\circ \leqq \breve{W}(b_t),\ \alpha_2^\circ \leqq \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{p}_t z_t^* - \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{p}_t b_t\},$$

$$A' = \{(\alpha_1',\ \alpha_2') \in R^2 \mid \alpha_1' > \breve{W}(z_t^*),\ \alpha_2' \geqq 0\}$$

によって定義すると，$\breve{W}$は凹関数であるから，A° 及び A' は凸集合であり，また，定理８の段階４と同様の考察により，$A^\circ \cap A' = \phi$（空集合）となるが，今の場合，（８）により，$(A^\circ - A') \cap R_+^2 = \phi$，ただし，$R_+^2$ は R^2 の正象限，となっている．したがって，二階堂〔10〕§30の定理１により，

$$\exists (\beta_1,\ \beta_2) > (0,\ 0)\ \forall (\alpha_1^\circ - \alpha_1',\ \alpha_2^\circ - \alpha_2') \in A^\circ - A' :$$
$$\beta_1(\alpha_1^\circ - \alpha_1') \leqq \beta_2(\alpha_2^\circ - \alpha_2')$$

が成立する．そして，A° 及び A' の定め方を考えると，実は，$\beta_1 > 0$ となっている．そこで，②の両辺を β_1 で割り，更に，$\alpha_1' = \breve{W}(z_t^*) + \varepsilon'$，$\alpha_2' = 0$，$\alpha_1^\circ = \breve{W}(b_t)$，$\alpha_2^\circ = \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{p}_t z_t^* - \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{p}_t b_t$ とおくと，②は

$$\forall \varepsilon'>0 : \breve{W}(z_t^*)-\frac{\beta_2}{\beta_1}\sum_{t=1}^{\infty}\tilde{p}_t z_t^* \geqq \breve{W}(b_t)-\frac{\beta_2}{\beta_1}\sum_{t=1}^{\infty}\tilde{p}_t b_t-\varepsilon'$$

と書かれる．したがって，$(\beta_2/\beta_1)\langle\tilde{p}_t\rangle\equiv\langle p_t^*\rangle$ とおくことにより，①が証明される．

段階 2　①が関数 W については成立しないとすると，

③　$\exists\langle\hat{b}_t\rangle\in(m_{\oplus}) : W(z_t^*)-\sum_{t=1}^{\infty}p_t^* z_t^* < W(\hat{b}_t)-\sum_{t=1}^{\infty}p_t^*\hat{b}_t$

となる．この $\langle\hat{b}_t\rangle$ に対して，十分小さい正数 $\hat{\theta}$ を考えて，$\langle\check{z}_t\rangle\equiv\langle(1-\hat{\theta})z_t^*+\hat{\theta}\hat{b}_t\rangle$, $\|\check{z}_t\|<2\breve{r}(\overline{\overline{y_1}})$，となるようにすると，$\breve{W}(\check{z}_t)=W(\check{z}_t)$ である．もちろん，$\breve{W}(z_t^*)=W(z_t^*)$ である．それゆえ，

$$\begin{aligned} W(z_t^*)-\sum_{t=1}^{\infty}p_t^* z_t^* &\geqq W(\check{z}_t)-\sum_{t=1}^{\infty}p_t^*\check{z}_t \\ &\geqq(1-\hat{\theta})[W(z_t^*)-\sum_{t=1}^{\infty}p_t^* z_t^*]+\hat{\theta}[W(\hat{b}_t)-\sum_{t=1}^{\infty}p_t^*\hat{b}_t] \\ &> W(z_t^*)-\sum_{t=1}^{\infty}p_t^* z_t^* \qquad (\because ③) \end{aligned}$$

となるが，これは矛盾である．　　　　(証了)

定理10　仮定 1 —仮定 5 及び $\overline{\overline{y_1}}>>0$ の下では，実行可能経路 $\langle\hat{z}_t, \hat{x}_t, \zeta\hat{y}_{t+1}\rangle\in F(\overline{\overline{y_1}})\times T^N$ が B-最適経路であるための必要十分条件は，$R_+{}^n$ の点列 $\langle\hat{p}_t\rangle>>\langle 0\rangle$ が存在して，次の諸関係が成立することである．

(10)　$\forall t\in N \ \&\ c\in R_{\oplus}{}^n : \delta^{t-1}u(\hat{z}_t)-\hat{p}_t\hat{z}_t\geqq\delta^{t-1}u(c)-\hat{p}_t c,$

(11)　$\forall t\in N\&(x_t,\ \zeta y_{t+1})\in T : \hat{p}_{t+1}\hat{y}_{t+1}-\hat{p}_t\hat{z}_t\geqq p_{t+1}y_{t+1}-p_t x_t,$

(12)　$\forall y_1\leqq\overline{\overline{y_1}} : \hat{p}_1\hat{y}_1\geqq\hat{p}_1 y_1,\ \ \hat{y}_1=\overline{\overline{y_1}},$

(13)　$\lim_{t\to\infty}\hat{p}_t\hat{x}_t=0.$

証明　十分性　任意の $\langle z_t,\ x_t,\ \zeta y_{t+1}\rangle\in F(y_1)\times T^N$ に対して，(10) により，

①　$W(\hat{z}_t)-W(z_t)=\sum_{t=1}^{\infty}[u(\hat{z}_t)-u(z_t)]\delta^{t-1}\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\hat{p}_t(\hat{z}_t-z_t)$

$$=\lim_{\tau\to\infty}[\hat{p}_t(\hat{y}_1-y_1)+\sum_{t=1}^{\tau-1}\{\hat{p}_{t+1}(\hat{y}_{t+1}-y_{t+1})-\hat{p}_t(\hat{x}_t-x_t)\}+\hat{p}_\tau(\hat{x}_\tau-x_\tau)]$$

となるが，ここで，(10)(11)(12) 及び $\hat{p}_\tau x_\tau \geqq 0$ を考慮すると，$W(\hat{z}_t) \geqq W(z_t)$ を得る．

必要性 $\langle z_t^*,\ x_t^*,\ \zeta y_{t+1} \rangle \in F(\overline{\overline{y}}_1) \times T^N$ を B^- 最適経路とすると，定理8及び定理9により，同伴する効率価格系 $\langle p_t^* \rangle \in (l^1)$ が存在して，任意の $\langle z_t,\ x_t,\ \zeta y_{t+1} \rangle \in Z(\overline{\overline{y}}_1) \times T^N$, $\langle z_t \rangle \in (m_\oplus)$, に対して，①が成立する．したがって，任意の $\tau \in N$ に対して，$z_\tau = c$, すべての $t(\neq\tau)$ について $z_t = z_t^*$, によって定義される点列 $\langle z_t \rangle \in (m_\oplus)$ を考えると，(10) が成立する．また，任意の$\tau \in N$ に対して，$y_1' = y_1^*$, $x_\tau' = x_\tau$, $y_{\tau+1}' = y_{\tau+1}$, $(x_\tau,\ \zeta y_{\tau+1}) \in T$, $y_\tau^* - x_\tau >> a_\tau$, $y_{\tau+1} - x_{\tau+1}^* >> a_{\tau+1}$, すべての $t(\neq\tau)$ に対して，$x_t' = x_t^*$, $y_{t+1}' = y_{t+1}^*$, によって定義される点列 $\langle z_t',\ x_t',\ \zeta y_{t+1}' \rangle \in Z(\overline{\overline{y}}_1,\ a_t) \times T^N$ を考えると，(7) により，$y_\tau^* - x_\tau >> a_\tau$ かつ $y_{\tau+1} - x_{\tau-1}^* >> a_{\tau+1}$ を満たすすべての $(x_\tau,\ \zeta y_{\tau+1}) \in T$ については (11) が成立している．もしある $(x_\tau^\circ,\ \zeta y_{\tau+1}^\circ) \in T$ に対して (11) が成立しなければ，任意の正数 $\eta(<1)$ によって形成される $(\tilde{x}_\tau,\ \zeta\tilde{y}_{\tau+1}) \equiv ((1-\eta)x_\tau^* + \eta x_\tau^\circ,\ \zeta(1-\eta)y_{\tau+1}^* + \zeta\eta y_{\tau+1}^\circ) \in T$ に対しても (11) が成立しない．ところが，$y_\tau^* - x_\tau^* >> a_\tau$, $y_{\tau+1}^* - x_{\tau+1}^* >> a_{\tau+1}$ であるから，十分小さい正数 $\eta(<1)$ に対しては，$y_\tau^* - \tilde{x}_\tau >> a_\tau$, $\tilde{y}_{\tau+1} - x_{\tau+1}^* >> a_{\tau+1}$ となっている．明らかに，これは矛盾である．よって，(11) が成立する．(12) の成立は明らかである．最後に，補助定理1により $\langle x_t^* \rangle \in (m_\oplus)$ である一方，$\langle p_t^* \rangle \in (l^1)$ であるから，(13) が成立する．[1]　(証了)

定理10の含意するところは次のとおりである．すなわち，ある実行可能経路が B-最適経路となるための必要十分条件は，(イ) 各時刻において，予算制約の下で一時的社会厚生指標が最大化すること，(ロ) 同伴する正の競争的均衡価格系が存在すること，(ハ) 初期生産可能財存在量に対する資産価値が最大化すること，(ニ) 終端投入費用が最小化 (＝0) することである．

---

1) 一般に，T は錐ではないので，(11) の左辺が 0 になることを主張することはできない．

6 結　　語

本章の目的は，比較的近時における多部門最適経済成長理論の発展を我々の独自の判断に基づいて適当に整理することであった．そして具体的には，各世代を平等処遇するという意味でのラムゼイ型多部門経済――モデルA――と近接将来世代を優遇するという意味でのキャス型多部門経済とが考察され，それぞれのモデルにおいて，最適経済成長経路の存在とその特性が明らかにされた．モデルAでは，最適経済成長経路の存在と最適均斉経路のターンパイク性の主張がその要点であったのに対し，モデルBでは，最適経済成長経路存在の主張もさることながら，むしろその主眼点は，最適経済成長経路，効率的動態経済経路そして競争的動態経済経路の3つの経路相互間の関係を見ることにあった．[1)] 両モデルにおけるこのような眼目の相違は，結局のところ，社会厚生汎関数の設定に由来している．というのは，モデルAにおいては，想定された仮定は既にモデルBよりも厳しいものであったが，それでもなお，経済学的に正当性を主張し得ないような仮定を設けないかぎり，$\sum_{t=1}^{\infty}u(z_t)$ の有界性を主張することが不可能であるために，モデルBに比して数学的処理が容易でなく，競争的動態経済経路との関連で問題を把握するという方向への発展はほとんど期待できないからである．

さて，モデルBは結果的には拙稿〔4〕の分析と類似する面を多分に有しており，競争均衡や効率性の概念は最適性概念と密接な関係があることが判明した．しかし，こうした背景には，均斉経路の存在を保証する仮定4（仮定4と相まって），初期生産可能財存在量$\overline{\overline{y}}_1$から出発する均斉経路の存在を保証する仮定7，更には，一時的社会厚生関数uがストック概念に基づいて構成されており，しかも，それが単調に増加するという仮定5が，その他の仮定と共に，

1) モデルBでは，たとえ最適均斉経路が一意的に存在したとしても，その経路のターンパイク性は必ずしも保証されない．この点については，cf. サザーランド〔16〕p. 588.

極めて重要な役割を演じているという点のあったことを，我々は忘れてはならない．例えば，これら諸仮定のゆえにこそ，正の効率価格系の存在という拙稿〔4〕よりも一層明確な帰結を導出することができたのである．

ところで，〔4〕では，有限期間域分析においては，正の競争的均衡価格系を同伴する実行可能経路は，終端投入費用が最小であるとき，効率経路となることが示されている．しかし，本稿で見たように，通常の意味での無限期間域分析においては，更に一層厳しい条件，例えば，終端投入費用が0というような条件が要求される．したがって，消費や生産に関しては，多部経済効界，将来に対する不確実性及び規模に関する収穫逓増性が存在しないという場合に，静学において主張される競争経済の効率性――パレート（Pareto, V.F.D.）最適性――は，無限期間域を考察対象とする動学の領域では，一般には成立しないことになる．この点は，既にマランボー〔7〕において暗示されていたことでもあるが，競争経済体系の持つ利点が一般的には必ずしも主張され得ないことを意味するわけであるから，重要な帰結というべきであろう．

引用文献

〔1〕 Brock, W. A., "On Exsistence of Weakly Maximal Programmes in a Multi-Sector Economy", *Rev. Econ. Stud.*, **37** (1970), 275—280.

〔2〕 ——, "An Axiomatic Basis For The Ramsey-Weizsäcker Overtaking Criterion", *Econometrica*, **38** (1970), 927-929.

〔3〕 Cass. D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation", *Rev. Econ. Stud.*, **32** (1965), 233-240.

〔4〕 福尾洋一, "効率性と価格について", 経済学論究, **26** (1) (1972), 91-116.

〔5〕 ——, "Cass の最適経済成長理論", 経済学論究, **28** (2) (1974), 89-109.

〔6〕 Gale, D., "On Optimal Develoment in a Multi-Sector Economy", *Rev. Econ. Stud.*, **34** (1967), 1-18.

〔7〕 Malinvaud, E., "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources", *Econometrica*, **21** (1953), 233-268.

〔8〕 McFadden, D., "The Evaluation of Development Programmes", *Rev. Econ. Stud.*, **34** (1967), 25-50.

〔9〕 Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, New York, 1968.

〔10〕 二階堂副包『現代経済学の数学的方法』岩波書店, 1960.

〔11〕 Peleg, B., "Efficiency Prices for Optimal Cosumption Plans", *J. Mathematical Analysis and Applications*, **29** (1970), 83-90.

〔12〕 Peleg, B.-Ryder, Jr. H. E., "On Optimal Cosumption Plans in a Muti-Sector Economy", *Rev. Econ. Stud.*, **39** (1972), 159-169.

〔13〕 Radner, R., "Dynamic Programming of Economic Growth", in *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*, ed. by Malinvaud, E.-Bachrach, M. O. L., Macmillan, London, 1967, 111-141.

〔14〕 Ramsey, F. P., "A Mathematical Theory of Saving", *Econ. J.*, **38** (1928), 543-559.

〔15〕 杉山昌平『最適問題』共立出版, 1967.

〔16〕 Sutherland, W. R. S., "On Optimal Development in a Multi-Sectoral Economy : the Discounted Case", *Rev. Econ. Stud.*, **37** (1970), 585-589.

〔17〕 Takayama, A., *Mathematical Economics*, The Dryden Press, Hinsdale, 1974.

〔18〕 竹之内脩『函数解析』朝倉書店, 1968.

〔19〕 ——『函数解析演習』朝倉書店, 1968.