異質資本財の下における最適経済成長理論[1]

福尾洋一

1 序

ハーン (Hahn, F)〔8〕は，実証または記述経済分析の分野において，複数個の異質資本財が存在するような短期完全予見の成立する競争的均衡資本主義経済においては，（1）一時均衡は一意的でないかもしれず，したがって，成長経路を確定することはできないかもしれないこと（=不確定性)，（2）たとえ所与の初期値に対して成長経路が確定できたとしても，初期値のいかんによっては，その成長経路はいわゆる均斉成長経路に収束しないかもしれないこと（=不安定性)，を明らかにした[2]. そしてその後，この線に沿った研究はシェル-スティグリッツ (Shell, K.-Stiglitz, J.)〔13〕, アトキンソン (Atkinson, A. B.)〔1〕, ケートン-シェル (Caton, C.-Shell, K.)〔3〕等によって継承されてきている．つまり，ハーン及びその後継者たちによる研究によれば，異質資本財が複数個存在する状況下では，一般に，ソロー=スワン(Solow=Swan) 型1部門資本主義経済モデルのような好都合な帰結を得ることができない，という新古典派的経済成長理論の擁護者たちにとっては憂慮すべきかもしれない結論に至る.

1) 1975年度理論・計量経済学会西部部会での報告原稿を加筆訂正・一部削除したものである．夏目隆神戸大学教授には有益な御教示を頂いた．ここに感謝します.

2) クルツ (Kurz)〔10〕の主張するところによれば，この種の不安定性は資本財が1種類のみの場合にも発生する．しかし，クルツの分析手法はむしろ規範経済学のそれであり，ハーンの主張の一般化とみなすことはできない，と思われる.

さて，我々の目下の関心は規範または厚生経済分析にある．したがって，実証分析と規範分析の異質性からすれば，ハーンの先駆的業績も我々の興味を呼び起こすものではないように一見感じられる．しかし，実は，ハーンの問題意識と結論は，規範分析に興味を抱く者に対しても厚生経済学に関連する次のような問題，すなわち，異質資本財が複数個存在する状況下でも，ラムゼイ=キャス（Ramsey=Cass）型1部門経済モデルのような最適成長経路の存在を主張する帰結を得ることができるであろうかという問題，を提起している．

ハーン自身は，計画型経済においては，不確定性と不安定性という困難な事態を発生させる多くの要因は消滅するであろう，と述べている[1)]．このハーンの推測をやや飛躍的に解釈すれば，規範分析においては上記のような諸困難は生じないであろう，という結論に至る．もとより，このような解釈は彼の真意を誤解しているにすぎないのかもしれない[2)]．しかし，もしこの解釈が間違いでないとすれば，ハーン・モデルには目標関数が設定されておらないという点に不満を禁じ得ない．また，ハーンの問題を最適経済成長理論との関連で論じたクルツ〔10〕の異質資本財モデルは，目標汎関数を最大化する経済的に意味のある経路が存在することを前提とした可逆的投資モデルであり，それは，ある点では非常に一般的ではあるが，局所分析に集中しており，大域における経済の運行については十分な分析が与えられておらない．したがって，シェル-スティグリッツ〔13〕やケートン-シェル〔3〕が考察したような，経済に存在する資本財は2種類の，ただそれだけの，異質な型があるという最も簡単な異質資本財モデル経済の下にあってさえ，最適成長経済分析には，取り上げるべき問題が残されているように思われる．

ところで，我々は，2種類の異質資本財が共存するような幾分性格の異なる

---

1) cf. ハーン〔8〕p. 645.

2) 多くの異質資本財モデルの均斉成長経路がとうげ点である——cf. シェル-スティグリッツ〔13〕pp. 601, 603, クルツ〔10〕pp. 156, 163, ケートン-シェル〔3〕pp. 17, 21等——ことからすると，我々のような解釈もあながち不当ではないであろう．

2つの型のモデル経済を構成することができる.

第1型経済では，1種類の同質労働力と2種類の異質資本財を生産用役として使用して，1種類の同質経常産出物が生産される．この単一産出物（＝フロー）は，使用される以前には，消費財としても，また，いずれの投資財としても自由に利用可能である．しかし，この単一産出物が一たび特定の財として使用され，資産（＝ストック）としての性格を持つようになった以後は，それを他の財として流用することはもはや不可能となってしまうであろう.

第2型経済では，消費財部門と投資財部門という2種類の生産部門が存在し，それぞれ，1種類の同質労働力と1種類の同質資本財とを生産用役として使用して，消費財と投資財とを生産している．労働力は両部門を費用なしに自由に移動することができる．経常産出物（＝フロー）としての投資財は，使用される以前には，消費財生産のための機械（＝施設・設備・備品等）としても，また，投資財生産のための機械としても自由に利用可能である．しかし，投資財が一たび設置され，資産（＝ストック）としての性格を持つようになった以後は，消費財生産のための資本財と投資財生産のための資本財とは明確に区別され，一方の部門に割り当てられている資本財ストックを必要に応じて他方の部門に移動・流用するということは全く不可能になってしまうであろう.

第2型経済は，稲田（Inada）〔9〕が実証分析において想定した経済であり[1)]，その最適成長の問題については，ライダー（Ryder, Jr. H. E.）〔12〕が詳細に論述している．それに対して，第1型経済は，シェル-スティグリッツ〔13〕，アトキンソン〔1〕，ケートン-シェル〔3〕等が実証分析において想定した経済であるが，この型の経済の最適成長の問題は，これまでのところ詳細には論じられていないように思われる[2)].

1) 稲田〔9〕の珠玉モデルにおいては，不確定性も不安定性も発生しない.

2) アロー-クルツ（Arrow-Kurz）〔2〕（p. 87 以後）の最適経済成長モデルは，資本財間の流用可能性ないしは移動可能性を容認した可逆的投資モデルであり，純粋な意味での異質資本財モデルとは考えにくいように思われる.

本稿の目的は，第１型経済の最適成長の可能性を検討することにある.[1] 第２節では，第１型経済の最適成長モデルを提示する．第３節では，最適経済成長のための必要十分条件について述べる．第４節では，最適定常経路の存在を示す．第５節では，この経済の最適成長経路の存在の問題について考察する．第６節は結びに充てられる．

2　モデル

最初に幾つかの仮定を列挙する．

仮定１　経済には，投入物として，ただ１種類の同質労働力とただ２種類の異質資本財——以下，第１資本財及び第２資本財と呼ぶ——のみが存在する．これらの投入物はいずれも連続的に分割可能な単位によって測定される．

仮定２　経済には，消費財としても投資財としても利用可能なただ１種類の同質産出物のみが生産される．この単一産出物は，連続的に分割可能であって，消費財あるいは投資財（または資本財）のいずれに利用されるときも，第１資本財の測定単位と全く同一単位で測定することができる．第１((２))資本財として利用されるときには，この単一産出物は，過去から蓄積されてきた第１((２))資本財と同一の性質を持っている．しかし，この単一産出物（＝フロー）は，一たび第１((２))資本財として設置・利用され，資産（＝ストック）として蓄積されると，その後において第２((１))資本財に流用するということはできない．すなわち，資本財は，設置される以前のフローの段階では同質であるが，設置された以後のストックの段階では異質となる．また，この単一産出物は，一たび資本財((消費財))として利用されると，消費財((資本財))として再利用することもできない．

仮定３　所与の任意時刻 t に対して，生産規模に関する収穫不変性が作用す

1)　ライダー・モデルの内容については，福尾〔４〕に詳しく紹介されているので，併せて参照されたい．ただし，福尾〔４〕には若干加筆修正したい部分があることを断っておきたい．

る．すなわち，生産関数F

$$Y=F(\bar{L},K_1,K_2,t),\ Y,\bar{L},K_1,K_2\geqq 0$$

は，非負の投入（$\bar{L},K_1,K_2$）に関して，1次同次関数である．ただし，ここにおいて，Yは単一産出物産出量（＝総生産），$\bar{L}$は労働力投入量，K_1 及び K_2 は第1及び第2資本財投入量を表している．

仮定 4　所与の任意時刻tに対して，3投入物のいずれをも投入する場合，3者の投入比率がいかなるものであっても必ず産出物が得られるように，労働力及び資本財を自由に変容させることができる．また，生産関数Fは，正の投入（$\bar{L},K_1,K_2$）に関して，2回連続的偏微分可能かつ

$$F>0, F_1>0, F_2>0, F_3>0$$

である．

仮定 5　所与の任意時刻tに対して，生産関数Fは，正の投入（$\bar{L},K_1,K_2$）に関して，

$$\begin{cases} F_{11}<0,\ F_{22}<0,\ F_{33}<0\ ;\ F_{12}>0,\ F_{23}>0,\ F_{31}>0, \\ F_{22}F_{33}-F_{23}^2>0 \end{cases}$$

を満たす凹関数である．

仮定 6　技術進歩は純粋に労働増大的であり，労働効率Tは

$$T=e^{\tau t},\ \tau=\mathrm{const.}>0$$

によって増大する．そして，生産関数Fは

$$Y=Y(\bar{L}e^{\tau t},K_1,K_2)$$

と書かれる．

仮定 7　経済に存在する消費財はただ1種類であり，それは同質である．

仮定 8　一時的社会厚生関数は，時間に無関係な正数域上で2回連続的微分可能 $\gamma(<1)$ 次同次凹関数

$$\begin{cases} u=u(\bar{c}),\ \bar{c}\geqq 0,\ u \text{ は実数}, \\ u'>0,\ u''<0\ ;\ u'(0)=\infty \end{cases}$$

によって与えられる．ただし，ここにおいて，$\bar{c}$ 及び c は，Nを時刻 t の総消

費者数（＝人口），Cを経済の消費とすれば，$\bar{c}\equiv C/N$，$c\equiv C/NT$ によって定義されている．

仮定 9　ストックとしての労働力及び資本財は常に完全雇用される．労働力存在量と人口は常に一定の関係を保っているために，一般性を失うことなく，両者を同一量として扱うことができる．そして，この両者は共に外生的に付与される一定率 $\lambda(\geqq 0)$ で成長する．すなわち，

$$\bar{L}=N=e^{\lambda t}, \lambda=\text{const.}\geqq 0$$

である．また，両資本財は共に外生的に付与される一定率 $\kappa(>0)$ で減耗する.[1]

次の注意により，生産関数Yの各関連変数は労働の効率単位当たりの変数に表示換えされる．簡単であるので，証明は省略する．

注意　仮定1―仮定6の下では，生産関数

$$Y=Y(E, K_1, K_2), E\equiv\bar{L}e^{\tau t}$$

に対して，

$$y\equiv Y/E, k_\nu\equiv K_\nu/E, Y(1, k_1, k_2)\equiv y(k_1, k_2), \nu=1,2$$

とおくとき，すべての $\bar{L}>0$ に対して，次の関係が成立する．

（1）　$y=y(k_1, k_2), k_1, k_2, y\geqq 0$

（2）　$k_1, k_2>0$ に対して，

$$\begin{cases} y>0, y_1>0, y_2>0, y-k_1y_1-k_2y_2>0\,; \\ y_{11}<0, y_{22}<0, y_{12}>0, y_{11}y_{22}-y_{12}^2>0. \end{cases}$$

定義 1　社会厚生汎関数

経済の最大化目標である社会厚生指標Wを仮定8を考慮して，汎関数

$$W=\int_0^\infty u(\bar{c})e^{-\partial(t)t}dt=\int_0^\infty u(c)e^{-[\partial(t)-\tau\gamma]t}dt$$

によって定義する．ここにおいて，∂ は一時的社会厚生指標uの時間割引率を意味する．

1)　両資本財の資本減耗率が同一であるとする仮定は，受け入れ難いものであるかもしれないが，立論の便宜を優先させた第一次接近としての仮定である．

以下においては，次の単純化仮定を採用する．

仮定10 時間割引率 ∂ は

$$\partial(t)=\partial=\text{const.}\ ;\ \partial-\tau\gamma\equiv\delta>0$$

という関係を満たす．

定義2 実行可能経路

資本存在量の初期値 $k_\nu(0)$，$\nu=1,2,$ から出発し，期間域[0, ∞) を通じて，関係

(3) $\quad y=c+z,\ y=y(k_1,k_2),\ k_\nu,\ c,\ z\geqq 0$

(4) $\quad z=z_1+z_2,$

(5) $\quad \begin{cases} \dot{k}_1=z_1-(\kappa+\lambda+\tau)k_1, \\ \dot{k}_2=z_2-(\kappa+\lambda+\tau)k_2 \end{cases}$

を満たすような経済諸変数の時間経路 (y,c,z_1,z_2,k_1,k_2) を実行可能経路という，なお，ここにおいて，$y\equiv Y/NT,\ k_\nu\equiv K_\nu/NT,\ c\equiv C/NT$ であり，また，z 及び z_ν は，Z を総投資，Z_ν を第 ν 資本財への投資として，$z\equiv Z/NT$，$z_\nu\equiv Z_\nu/NT$ によって定義されている[1]．

定義3 総投資率，投資配分率

総生産のうち投資される割合を総投資率といい，ω によって表す．また，総投資のうち第1資本財に配分される割合を投資配分率といい，θ によって表す．すなわち，すべての t に対して，

(6) $\quad z=\omega y,\ z_1=\theta\omega y,\ z_2=(1-\theta)\omega y,$

(7) $\quad 0\leqq\omega\leqq 1,\ 0\leqq\theta\leqq 1$

である．

(6)を(3)及び(5)に代入すると，

(8) $\quad c=(1-\omega)y,$

1) 以後，仮定9を考慮して，$E=NT$ と了解しておく．

$$(9)\quad \begin{cases} \dot{k}_1=\theta\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_1, \\ \dot{k}_2=(1-\theta)\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_2 \end{cases}$$

となる．

定義 4　最適経路

仮定 1 —仮定10の下で，社会厚生汎関数

$$W=\int_0^\infty u(c)e^{-\delta t}dt$$

を最大化するという意味で最適な実行可能経路を最適経路という．

そうすると，我々の問題は，最適経路の存在の可能性を検討するという問題になる．

3　最適経路の特性——必要十分条件——

次の基本定理は証明なしに利用される．

基本定理　k_1 及び k_2 を基本変数，ω 及び θ を操作（＝制御）変数，$\phi_1 e^{-\delta t}$ 及び $\phi_2 e^{-\delta t}$ を補助変数とすると，ハミルトニアンが

$$H=H(t,k_1,k_2,\phi_1,\phi_2,\omega,\theta)=[u(c)+\sum_{\nu=1}^{2}\phi_\nu\dot{k}_\nu]e^{-\delta t}$$

によって定義される．このとき，最適経路上では，次の条件(A)(B)及び(C)が成立している．

(A)　最適経路上の操作変数を ω 及び θ とするとき，任意の実数 $\tilde{\omega}(0\leqq\tilde{\omega}\leqq 1)$ 及び $\tilde{\theta}(0\leqq\tilde{\theta}\leqq 1)$ に対して，すべての t に関して，

$$H(\cdot,\omega,\theta)\geqq H(\cdot,\tilde{\omega},\tilde{\theta}),$$

(B)　すべての t に関して，

$$\partial H/\partial k_1=-d(\phi_1 e^{-\delta t})/dt,\ \partial H/\partial k_2=-d(\phi_2 e^{-\delta t})/dt,$$

(C)　$$\lim_{t\to\infty} k_1\phi_1 e^{-\delta t}=0,\ \lim_{t\to\infty} k_2\phi_2 e^{-\delta t}=0.$$

次の定理は基本定理から直接導出される．

定理1 最適経路上では，期間域[0, ∞) を通じて以下の関係が成立する．

$$
(10)\quad \begin{cases}
\text{所与の変数の組 } (t, k_1, k_2, \phi_1, \phi_2) \text{ に対して,} \\
(1)\quad \begin{cases} \phi_1 > \max[\phi_2, u'(y)] \Rightarrow \\ \qquad 0<\omega<1, \theta=1, \phi_1=u'(c)>\phi_2, \\ 0<\omega<1, \theta=1 \Rightarrow \phi_1=u'(c)\geqq\phi_2, \end{cases} \\
(2)\quad \begin{cases} \phi_1=\phi_2>u'(y) \Rightarrow \\ \qquad 0<\omega<1, 0\leqq\theta\leqq1, \phi_1=\phi_2=u'(c), \\ 0<\omega<1, 0<\theta<1 \Rightarrow \phi_1=\phi_2=u'(c), \end{cases} \\
(3)\quad \begin{cases} \phi_2 > \max[\phi_1, u'(y)] \Rightarrow \\ \qquad 0<\omega<1, \theta=0, \phi_1<\phi_2=u'(c), \\ 0<\omega<1, \theta=0 \Rightarrow \phi_1\leqq\phi_2=u'(c), \end{cases} \\
(4)\quad u'(y)>\max(\phi_1, \phi_2) \iff \omega=0,
\end{cases}
$$

$$
(11)\quad \begin{cases} \dot{\phi}_1=\xi\phi_1-u'(c)y_1, \phi_1>0, \\ \dot{\phi}_2=\xi\phi_2-u'(c)y_2, \phi_2>0, \xi\equiv\kappa+\lambda+\tau+\delta, \end{cases}
$$

$$
(12)\quad \lim_{t\to\infty} k_1\phi_1e^{-\delta t}=0, \lim_{t\to\infty} k_2\phi_2e^{-\delta t}=0.
$$

証明 (12)は基本定理の(C)そのものである．(8)及び(9)により，ハミルトニアンは

$$
H=[u\{(1-\omega)y\}+\{\theta\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_1\}\phi_1 \\
+\{(1-\theta)\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_2\}\phi_2]e^{-\delta t}
$$

と書かれる．ゆえに，(7)及び

$$
\begin{cases} \partial H/\partial\omega=[\{\phi_2-u'(c)\}+(\phi_1-\phi_2)\theta]ye^{-\delta t}, \\ \partial H/\partial\theta=(\phi_1-\phi_2)\omega ye^{-\delta t} \end{cases}
$$

により，(10)が得られる．なお，(A)は所与の $\phi_\nu<\infty$, $\nu=1, 2$, に対して述べられているので，仮定8を考慮すると，$\omega=1$ つまり $\max(\phi_1, \phi_2)\geqq u'(0)=\infty$ は起り得ない．また，仮に，$\phi_\nu=\infty$ を許容し得るとしても，この場合には最適経路を特定することはできない．次に，(B)及び(10)により，(11)の微分方

程式が直ちに得られる．最後に，福尾〔6〕の定理2.1の系と同様の方法によって，$\phi_\nu>0$ が証明される． (証了)

次の定理は，上記の最適性の必要条件が十分条件にもなっていることを示している．

定理2　仮定1―仮定10の下では，最適性の必要条件(10)(11)及び(12)を満たす実行可能経路は最適経路となる．

証明　(10)(11)及び(12)を満たす実行可能経路を $(y, c, z_1, z_2, k_1, k_2, \phi_1, \phi_2)$，それ以外の任意の実行可能経路を $(\tilde{y}, \tilde{c}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2)$ によって表す，更に

$$y-\tilde{y}\equiv y^-,\ c-\tilde{c}\equiv c^-,\ z_\nu-\tilde{z}_\nu\equiv z_\nu{}^-,\ k_\nu-\tilde{k}_\nu\equiv k_\nu{}^-,$$

$$u(c)\equiv u,\ u'(c)\equiv u',\ u(\tilde{c})\equiv\tilde{u},\ \nu=1,2$$

とおくと，$c\neq\tilde{c}$ または $k_\nu\neq\tilde{k}_\nu$ ならば，

$$\begin{aligned}
u-\tilde{u}&\underset{(=)}{>}c^-u' && \text{仮定8}\\
&=(y^--\sum_\nu z_\nu{}^-)u' && (3)(4)\\
&\underset{(=)}{>}\sum_\nu(y_\nu k_\nu{}^--z_\nu{}^-)u' && (2)\\
&=\sum_\nu[y_\nu k_\nu{}^-u'+(\phi_\nu-u')z_\nu{}^--\phi_\nu z_\nu{}^-]\\
&\underset{(=)}{>}\sum_\nu(y_\nu k_\nu{}^-u'-\phi_\nu z_\nu{}^-) && (10)\\
&=\sum_\nu[y_\nu k_\nu{}^-u'-\{\dot{k}_\nu{}^-+(\kappa+\lambda+\tau)k_\nu{}^-\}\phi_\nu] && (4)\\
&=-\sum_\nu[(\dot{\phi}_\nu-\delta\phi_\nu)k_\nu{}^-+\phi_\nu\dot{k}_\nu{}^-] && (11)
\end{aligned}$$

という関係が成立する．ゆえに，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty(u-\tilde{u})e^{-\delta t}dt>-\int_0^\infty\sum_\nu[(\dot{\phi}_\nu-\delta\phi_\nu)k_\nu{}^-+\phi_\nu\dot{k}_\nu{}^-]e^{-\delta t}dt\\
&=-[\sum_\nu\phi_\nu k_\nu{}^-e^{-\delta t}]_0^\infty=\lim_{t\to\infty}\ \sum_\nu\phi_\nu\tilde{k}_\nu e^{-\delta t} && \text{定義2，(12)}\\
&\geqq 0 && (13)
\end{aligned}$$

となる． (証了)

4　最適定常経路

まず，以下の立論の便宜を図って，(9)(10.1)—(10.4)及び(11)に基づいて，最適条件を満たす経済を次の4つの基本型に分類しておくことにする．

基本型Ⅰ：

$$(\mathrm{I}.1)\quad \begin{cases} \dot{k}_1=\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_1, \\ \dot{k}_2=-(\kappa+\lambda+\tau)k_2, \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}.2)\quad \left.\begin{cases} \dot{\phi}_1=(\xi-y_1)\phi_1, \\ \dot{\phi}_2=\xi\phi_2-y_2\phi_1, \end{cases}\right\} \text{ or } \xi=\frac{\dot{\phi}_1}{\phi_1}+y_1=\frac{\dot{\phi}_2}{\phi_2}+\frac{\phi_1}{\phi_2}y_2,$$

$$(\mathrm{I}.3)\quad \phi_1=u'[(1-\omega)y]>\phi_2,$$

$$(\mathrm{I}.4)\quad 0<\omega\leqq 1, \theta=1.$$

基本型Ⅱ：

$$(\mathrm{II}.1)\quad \begin{cases} \dot{k}_1=\theta\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_1, \\ \dot{k}_2=(1-\theta)\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_2, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}.2)\quad \left.\begin{cases} \dot{\phi}_1=(\xi-y_1)\phi_1, \\ \dot{\phi}_2=(\xi-y_2)\phi_2, \end{cases}\right\} \text{ or } \xi=\frac{\dot{\phi}_1}{\phi_1}+y_1=\frac{\dot{\phi}_2}{\phi_2}+y_2,$$

$$(\mathrm{II}.3)\quad \phi_1=\phi_2=u'[(1-\omega)y],$$

$$(\mathrm{II}.4)\quad 0<\omega\leqq 1, 0\leqq\theta\leqq 1.$$

基本型Ⅲ：

$$(\mathrm{III}.1)\quad \begin{cases} \dot{k}_1=-(\kappa+\lambda+\tau)k_1, \\ \dot{k}_2=\omega y-(\kappa+\lambda+\tau)k_2, \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}.2)\quad \left.\begin{cases} \dot{\phi}_1=\xi\phi_1-y_1\phi_2, \\ \dot{\phi}_2=(\xi-y_2)\phi_2, \end{cases}\right\} \text{ or } \xi=\frac{\dot{\phi}_1}{\phi_1}+\frac{\phi_2}{\phi_1}y_1=\frac{\dot{\phi}_2}{\phi_2}+y_2,$$

$$(\mathrm{III}.3)\quad \phi_2=u'[(1-\omega)y]>\phi_1,$$

$$(\mathrm{III}.4)\quad 0<\omega\leqq 1, \theta=0.$$

基本型IV：

(IV.1) $\begin{cases} \dot{k}_1 = -(\kappa+\lambda+\tau)k_1, \\ \dot{k}_2 = -(\kappa+\lambda+\tau)k_2, \end{cases}$

(IV.2) $\begin{Bmatrix} \dot{\phi}_1 = \xi\phi_1 - u'(y)y_1, \\ \dot{\phi}_2 = \xi\phi_2 - u'(y)y_2, \end{Bmatrix}$ or $\xi = \dfrac{\dot{\phi}_1}{\phi_1} + \dfrac{u'(y)}{\phi_1}y_1 = \dfrac{\dot{\phi}_2}{\phi_2} + \dfrac{u'(y)}{\phi_2}y_2,$

(IV.3) $u'(y) \geqq \max(\phi_1, \phi_2).$

上記基本型(I)—(IV)の ϕ に関する微分方程式に対しては，競争的均衡資本主義経済の実証分析におけると類似の経済学的意味付けを与えることができる[1]．まず，ϕ_1 及び ϕ_2 を厚生指標測定の尺度で表示した各資本財の帰属価格（＝需要価格）と解釈し，更に，$\phi = \max[\phi_1, \phi_2, u'(y)]$ を厚生指標測定の尺度で表示した消費財（＝単一産出物）の帰属価格と解釈する．そうすると，ξ は消費の粗帰属収益率あるいは消費に対する投資の機会費用，つまり，一時的社会厚生の現在と将来の限界変換率を意味し，また，$\phi y_1/\phi_1$ 及び $\phi y_2/\phi_2$ は各資本財の当該資本財で表示した限界生産物の粗帰属価値，$\dot{\phi}_1/\phi_1$ 及び $\dot{\phi}_2/\phi_2$ は各資本財の帰属価格に基づく資本利得率[2]を意味している．かくして，(I.2)—(IV.2)は，最適経路上では，消費の粗帰属収益率と各資本財の粗帰属収益率とが等しくなるべきことを意味している[3]．

定義 5　最適定常経路

期間域[0, ∞) を通じて，$\dot{k}_\nu \equiv 0$ かつ $\dot{\phi}_\nu \equiv 0$，$\nu = 1, 2$，であるような特異最適経路が存在するとき，それを最適定常経路と呼び，$(y^*, c^*, z_1^*, z_2^*, k_1^*, k_2^*, \phi_1^*, \phi_2^*)$ で表す．

最適定常経路の存在を主張するために，次の仮定が追加される．

---

1) 例えば，シェル－スティグリッツ〔13〕p. 597やケートン－シェル〔3〕p. 15.

2) cf. クルツ〔10〕p. 157.

3) (I.2)—(IV.2) は，実証分析における短期完全予見の仮説の関係式と形式的には類似している．しかし，ここでの分析は規範分析であるから，(I.2)—(IV.2) は短期完全予見の仮説を意味するものではない．

仮定11 生産関数(1)は(2)のほかに次の関係を満たしている.

$$\begin{cases} \text{所与の } k_2>0 \text{ に対して, } y_1(\infty, k_2)<\xi<y_1(0, k_2), \\ \text{所与の } k_1>0 \text{ に対して, } y_2(k_1, \infty)<\xi<y_2(k_1, 0), \\ y_\nu(0,0) \text{ または } y_\nu(\infty,\infty),\ \nu=1 \text{ または } 2, \text{ が定義可能ならば,} \\ y_\nu(0,0)>\xi, y_\nu(\infty,\infty)<\xi. \end{cases}$$

補助定理1 仮定1—仮定11の下では，最適定常経路が一意的に存在する.

証明 段階1 最適定常経路上で $k_1=k_2=0$ かつ $y>0$ ならば,(9)により $\omega=0$ であるから，基本型IVが成立しているはずである．しかし,(IV.2)(IV.3)及び(8)によれば，このとき $\dot{\phi}_1<0$ かつ $\dot{\phi}_2<0$ である．最適定常経路上で $k_1>0$, $k_2=0$ かつ $y>0$ ならば,(9)により $0<\omega<1$ かつ $\theta=1$ であるから，基本型Iが成立しているはずである．しかし,(I.2)(I.3)及び仮定11によれば，このとき $\dot{\phi}_2<0$ である． 同様にして， 最適定常経路上で $k_1=0$, $k_2>0$ かつ $y>0$ ならば，$\dot{\phi}_1<0$ となる． かくして， 最適定常経路が存在するとすれば，$k_1^*>0$ かつ $k_2^*>0$ であり，そして最適定常経路上では，基本型IIが成立している.

段階2 $k_1>0$ かつ $k_2>0$ の下で，最適条件と $\dot{k}_1=0$, $\dot{k}_2=0$, $\dot{\phi}_1=0$ かつ $\dot{\phi}_2=0$ とが持続的に成立しているならば，基本型IIの下で

$$① \quad \begin{cases} \theta\omega y=(\kappa+\lambda+\tau)k_1, (1-\theta)\omega y=(\kappa+\lambda+\tau)k_2, \\ 0<\omega<1, 0<\theta<1, \end{cases}$$

$$② \quad y_1(k_1, k_2)=y_2(k_1, k_2)=\xi$$

が持続的に成立しておらねばならない．この点に注目して，基本型IIの下では持続的に成立すべき関係 $y_1=y_2$ を微分し,(2)を考慮すると,

$$③ \quad [dk_2/dk_1]_{y_1=y_2}=(y_{11}-y_{21})/(y_{22}-y_{12})>0$$

となっていることを知る．そこで今， $y_1=y_2$ を持続的に満たす k_1 と k_2 との関係を特に

$$(13) \quad \begin{cases} k_2=\tilde{k}_2=\tilde{k}_2(k_1), \\ \tilde{k}_2'(k_1)=[y_{11}(\cdot)-y_{21}(\cdot)]/[y_{22}(\cdot)-y_{12}(\cdot)]>0, (\cdot)\equiv(k_1, \tilde{k}_2) \end{cases}$$

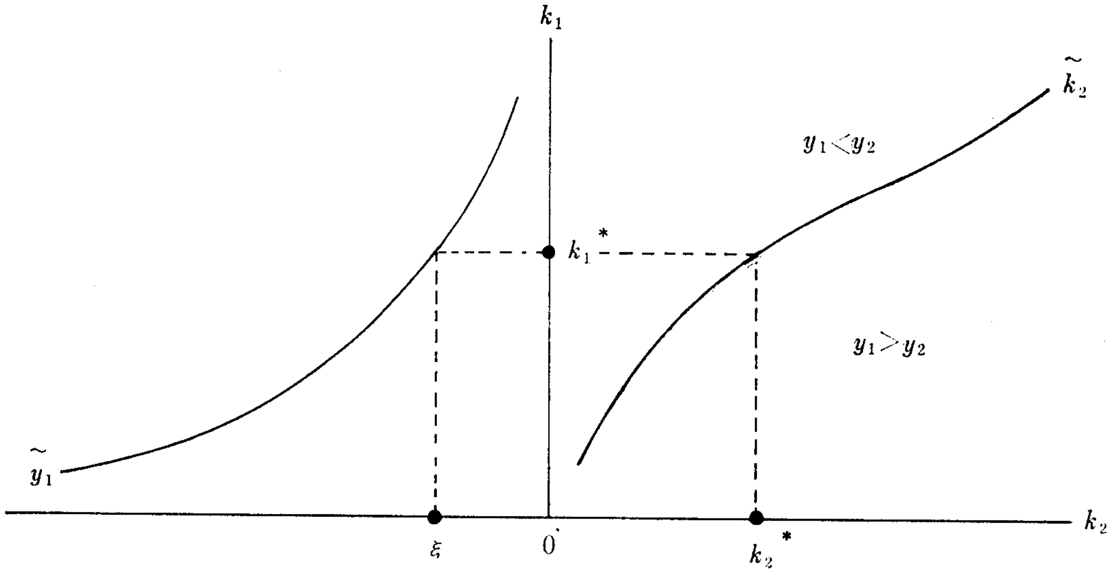
と書き，また，このときの関数 y 及び y_ν, $\nu=1,2$, を特に

$$(14)\quad \begin{cases} y=\tilde{y}=\tilde{y}(k_1)\equiv y(k_1,\tilde{k}_2), \\ y_\nu=\tilde{y}_\nu=\tilde{y}_\nu(k_1)\equiv y_\nu(k_1,\tilde{k}_2), \\ \tilde{y}_\nu{}'(k_1)=\dfrac{y_{11}(\cdot)y_{22}(\cdot)-y_{12}(\cdot)^2}{y_{22}(\cdot)-y_{12}(\cdot)}<0,\ (\cdot)\equiv(k_1,\tilde{k}_2) \end{cases}$$

と書くことにする．そうすると，

④ $\quad y_1(k_1^*)=y_2(k_1^*)=\xi,\ k_2^*=\tilde{k}_2(k_1^*)$

によって組 (k_1^*, k_2^*) を定義すると，(k_1^*, k_2^*) は②を満たす一意的な組であることが分かる（cf. 第1図）．



第 1 図

段階 3 (k_1^*, k_2^*) を①に代入すると，

$$⑤\quad \begin{cases} 0<\omega^*=(\kappa+\lambda+\tau)(k_1^*+k_2^*)/y^*<1,\ y^*\equiv y(k_1^*, k_2^*), \\ 0<\theta^*=k_1^*/(k_1^*+k_2^*)<1 \end{cases}$$

が定まる．$\omega^*<1$ となることは，(2)及び④により，

$$y^*-(\kappa+\lambda+\tau)(k_1^*+k_2^*)>y^*-\xi(k_1^*+k_2^*)$$
$$=y^*-k_1^*y_1^*-k_2^*y_2^*>0,\ y_\nu^*\equiv y_\nu(k_1^*, k_2^*),\ \nu=1,2$$

という関係から明らかである．そこで，今度は，⑤，（6）及び（Ⅱ.3）により，

$$c^*=(1-\omega^*)y^*,\ z_1^*=\theta^*\omega^*y^*,\ z_2^*=(1-\theta^*)\omega^*y^*,$$
$$\phi_1^*=\phi_2^*=u'[(1-\omega^*)y^*]$$

と定義すれば，変数の組 $(y^*, c^*, z_1^*, z_2^*, k_1^*, k_2^*, \phi_1^*, \phi_2^*)$ は最適定常経路となっている．（証了）

補助定理 2　最適定常経路の適当な近傍において定義される微分方程式系

$$(15)\quad \begin{cases} \dot{k}_1=[\omega\tilde{y}(k_1)-(\kappa+\lambda+\tau)\{k_1+\tilde{k}_2(k_1)\}]/[1+\tilde{k}_2'(k_1)], \\ \dot{\phi}=[\xi-\tilde{y}_1(k_1)]\phi,\ \phi\equiv\phi_1=\phi_2 \end{cases}$$

に対して，特異点 (k_1^*, ϕ^*) はとうげ点である．なお，ここにおいて，関数 $\tilde{k}_2$ 及び $\tilde{y}_1$ はそれぞれ(13)及び(14)によって定義されている．

証明　補助定理 1 の証明過程中に見られたように，最適定常経路上では基本型Ⅱが成立している．したがって，(Ⅱ.4)により，

$$\begin{cases} \omega=\omega(k_1,\phi),\ \phi\equiv\phi_1=\phi_2=u'[(1-\omega)\tilde{y}], \\ \omega_1=(1-\omega)(1+\tilde{k}_2')\xi/\tilde{y},\ \omega_2=-1/u''[(1-\omega)\tilde{y}]\tilde{y} \end{cases}$$

という関係が成立している．これを(15)に代入した後に (k_1^*, ϕ^*) の回りで展開し，2 次以後の項を無視すると，(k_1^*, ϕ^*) の開近傍における線形微分方程式系が得られる．そして，その 1 次の項の係数は

$$\dot{k}_{1,1}^*=\delta,\qquad \dot{k}_{1,2}^*=-1/[1+\tilde{k}_2'(k_1^*)]u''[(1-\omega^*)y^*],$$
$$\dot{\phi}_1^*=-y_1'(k_1^*)\phi^*,\ \dot{\phi}_2^*=0,$$

となっている[1)]．これより，固有根は

$$\frac{1}{2}\left[\delta\pm\sqrt{\delta^2+\frac{4\tilde{y}_1'(k_1^*)\phi^*}{[1+\tilde{k}_2'(k_1^*)]u''[(1-\omega^*)y^*]}}\right]$$

となるが，(13)及び(14)により，1 根は正，1 根は負となる．（証了）

(k_1^*, ϕ^*) がとうげ点であることから，(15)に対して福尾〔6〕においても利用された定理[2)]を適用することができる．

1)　例えば，$\dot{k}_{1,1}^*\equiv\partial\dot{k}_1(k_1^*, \phi^*)/\partial k_1$.

2)　福尾〔6〕p. 105 の定理※.

5　最適経路の存在問題

最適経路の存否を問うためには，4つの基本型の性質を再考する必要がある．

補助定理3　方程式系（Ⅱ.1）（Ⅱ.2)及び（Ⅱ.3）の下では，$t\to\infty$ に対して最適定常経路に収束するような関連諸変数の時間経路 S^+が一意的に存在する．更に，この一意的経路上では，$\dot{k}_1\geqq 0$ ならば（Ⅱ.4）が成立している．

証明　段階1　方程式系（Ⅱ.1）（Ⅱ.2）及び（Ⅱ.3）の下では (15) が成立しているので，この関係に注目しておく．今，$\dot{k}_1\equiv 0$ を満たす関数 $^{\triangle}\phi={}^{\triangle}\phi(k_1)$ を考えると，

$$\omega=(\kappa+\lambda+\tau)(k_1+\tilde{k}_2)/\tilde{y}$$

であるから，これを（Ⅱ.3）に代入して，$^{\triangle}\phi\equiv\phi_1$ とおいて微分すると，

$$^{\triangle}\phi'=[\tilde{y}_1-(\kappa+\lambda+\tau)](1+\tilde{k}_2')u''[(1-\omega)\tilde{y}]$$

という関係が得られる．今度は，$\dot{\phi}\equiv 0$ とすれば，(11)により，$k_1=k_1^*$ である．したがって，方程式系（Ⅱ.1）（Ⅱ.2）及び（Ⅱ.3）の下では，第2図のごとき位相図が得られ，補助定理2を併せ考えると，最適定常経路に収束する経路 S^+ が一意的に存在することが分かる．ただし，第2図においては，$\breve{k}_1$ 及び k_1° はそれぞれ

$$\tilde{y}_1(\breve{k}_1)=\kappa+\lambda+\tau,\ \tilde{y}(k_1^{\circ})=(\kappa+\lambda+\tau)[k_1^{\circ}+\tilde{k}_2(k_1^{\circ})]$$

によって定義されている．なお，この S^+ 経路上では，

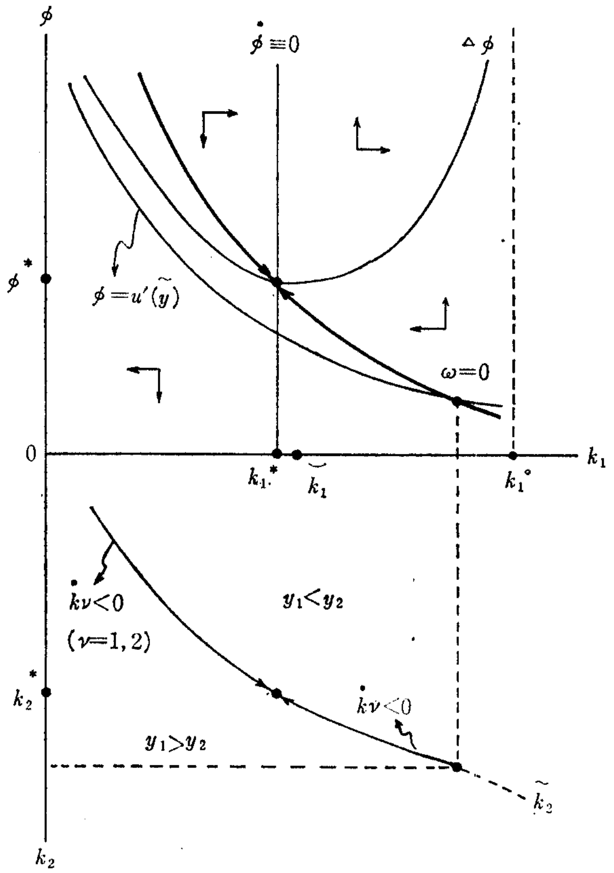
$$\tilde{k}_2'(k_1)=\frac{\dot{k}_2}{\dot{k}_1}=\frac{(1-\theta)\omega\tilde{y}-(\kappa+\lambda+\tau)\tilde{k}_2}{\theta\omega\tilde{y}-(\kappa+\lambda+\tau)k_1}$$

を考慮すると，所与の k_1 及び ϕ に対して，$\omega=\omega(k_1,\phi)$ として，投資配分率は

$$\theta=[\omega\tilde{y}+(\kappa+\lambda+\tau)\{k_1\tilde{k}_2'(k_1)-\tilde{k}_2\}]/[1+\tilde{k}_2'(k_1)]\omega\tilde{y}$$

によって与えられる．

段階2　$0<\omega<1$ については明らかである．（Ⅱ.1）により，



第 2 図

$$\theta=[\dot{k}_1+(\kappa+\lambda+\tau)k_1]/\omega\tilde{y}$$
$$=[\omega\tilde{y}-(\kappa+\lambda+\tau)\tilde{k}_2-\tilde{k}_2'(k_1)\dot{k}_1]/\omega\tilde{y}$$

であることから，$\dot{k}_1\geqq 0$ ならば，$0<\theta<1$ である.[1]　　（証了）

さて，最適定常経路上では $0<\omega^*<1$ かつ $0<\theta^*<1$ であることから，基本型Ⅱによってしか最適定常経路に漸近することはできない．したがって，所与の正の初期値 $k_1(0)$及び $k_2(0)$ に対して，$k_2(0)$ が $\tilde{k}_2[k_1(0)]$ と一致しないか，または，たとえ一致したとしても，それに対応する S^+ 経路上において，$0<\omega\leqq 1$ かつ $0\leqq\theta\leqq 1$ が成立しない場合には，経済的に意味のある状態で基本型Ⅱを採ることはできないので，いつかは基本型Ⅱに切り換えて最適定常経路に

1) $\dot{k}_1<0$ の場合，(k_1^*, ϕ^*) の近傍では $0<\omega<1$ かつ $0<\theta<1$ となっているが，一般的には，$0<\omega<1$ であることも，$0<\theta<1$ であることも主張し得ない．

収束させることが可能であるにしても，当初は基本型Ⅰ，Ⅲあるいは Ⅳを採らざるを得ない．

定義6　有意 S^+ 経路

初期値の定められた S^+ 経路が期間域$[0, \infty)$を通じて $0 \leqq \omega \leqq 1$ かつ $0 \leqq \theta \leqq 1$ を満たすとき，この経路を有意 S^+ 経路ということにする．つまり，有意 S^+ 経路とは，$t \to \infty$ に対して最適定常経路に収束するような基本型Ⅱの延長不能な解経路である，と解釈してもよいであろう．

ところで，所与の正の初期値 $k_1(0)$ 及び $k_2(0)$ に対して，どの基本型を採用すれば，ある適当な時刻に有意 S^+ 経路に切り換わることができるのであろうか．換言すれば，操作または政策変数 ω と θ をどのように操作していけば，最適条件を満たしながら最適定常経路に収束させることができるのであろうか．この問題の解答を見いだすためには，基本型Ⅱ以外の基本型に目を転ずる必要がある．

まず，基本型Ⅳから有意 S^+ 経路に切り換わり得るのは，有意 S^+ 経路上の $\omega=0$ となる点においてのみであることが容易に分かる．なぜなら，それ以外の有意 S^+ 経路上の点では，$\omega>0$ かつ $\phi \equiv \phi_1 = \phi_2 = u'[(1-\omega)\tilde{y}]$ となっているが，基本型Ⅳの下では，(Ⅳ.3) により，$\omega>0$ とすると，$u'[(1-\omega)y] > \max(\phi_1, \phi_2)$ となって，有意 S^+ 経路の条件を満たし得ないからである．それゆえ，$\omega>0$ となる有意 S^+ 経路上の点で基本型Ⅱに切り換わり得るのは，基本型Ⅰまたは Ⅲということになる．そこで，今や基本型ⅠとⅢに焦点を合わせることにする．

次の推測は，以下の考察に1つの手掛かりを与えてくれる．

推測　有意 S^+ 経路に対応し得ない正の初期値の組 $[k_1(0), k_2(0)]$ から出発して，最初の間基本型Ⅰあるいは Ⅲのいずれかを採り，その後ある適当な時刻に，有意 S^+ 経路上のある点において基本型Ⅱに切り換わることが可能であるとすれば，その $[k_1(0), k_2(0)]$ が (k_1, k_2) 平面上で $\tilde{k}_2$ 曲線の上方((下方))領域にあるときには，基本型Ⅰ((Ⅲ))——ただし，$0<\omega<1$——から基本型Ⅱへの切

り換わりである，と推測される．

理由　(k_1, k_2) 平面上の任意の定点を $P^0=(k_1^0, k_2^0)$ とする．このとき，基本型Iを採ると

$$\mathrm{sign}[(\dot{k}_2/\dot{k}_1)|_{P^0}-(k_2^0/k_1^0)]=-\mathrm{sign}\dot{k}_1|_{P^0}$$

となり，基本型IIIを採ると

$$\mathrm{sign}[(\dot{k}_2/\dot{k}_1)|_{P^0}-(k_2^0/k_1^0)]=\mathrm{sign}\dot{k}_2|_{P^0}$$

となる．このことは，上記推測の正しさを，完全に証明しているとはいえないまでも，ある程度示唆している．

補助定理 4　それぞれに独立する3つの関係

1°　$y_1(k_1, k_2)=\xi$,

2°　$y_1(k_1, k_2)=y_2(k_1, k_2)$,

3°　$y_2(k_1, k_2)=\xi$

を考え，1° を満たす関数を $\hat{k}_2=\hat{k}_2(k_1)$，3° を満たす関数を $\check{k}_2=\check{k}(k_1)$ と書くことにする．このとき，

〈1〉　$\mathrm{sign}(k_1-k_1^*)=\mathrm{sign}(\hat{k}_2-\tilde{k}_2)=\mathrm{sign}(\tilde{k}_2-\check{k}_2)$

が成立する．

〈2〉（a）$\tilde{k}_2$ 曲線の上方領域において基本型Iを採用した場合には，$\hat{k}_2$ 曲線の上方領域では $\dot{\phi}_1<0$ となり，下方領域では $\dot{\phi}_1>0$ となる．（b）$\tilde{k}_2$ 曲線の下方領域において基本型IIIを採用した場合には，$\check{k}_2$ 曲線の上方領域では $\dot{\phi}_2>0$ なり，下方領域では $\dot{\phi}_2<0$ となる．

証明　〈1〉: $\hat{k}_2$ 曲線，$\tilde{k}_2$ 曲線及び $\check{k}_2$ 曲線が (k_1, k_2) 平面においてただ1点 (k_1^*, k_2^*) で交わることは，補助定理1の証明過程から明らかである．一方，(2)及び

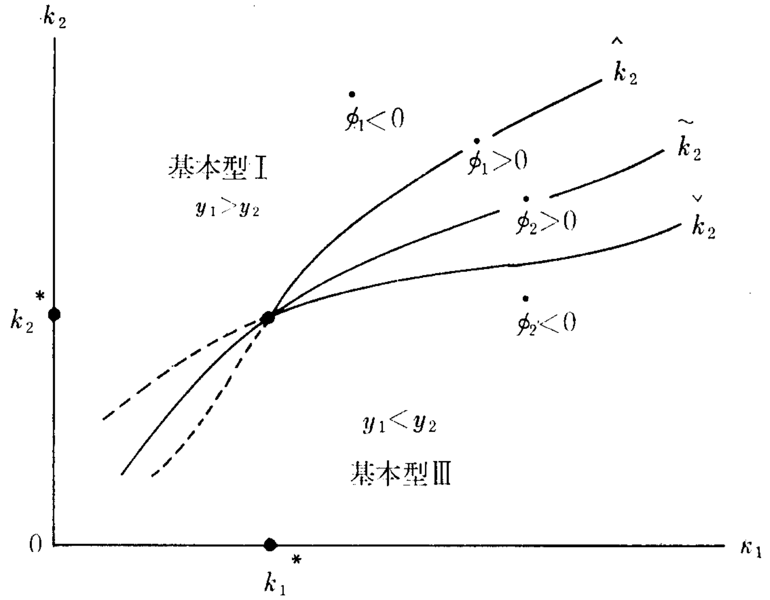
$$\begin{cases} \hat{k}_2'(k_1)=-y_{11}(\hat{\cdot})/y_{12}(\hat{\cdot})>0, (\hat{\cdot})\equiv(k_1, \hat{k}_2), \\ \check{k}_2'(k_1)=-y_{12}(\check{\cdot})/y_{22}(\check{\cdot})>0, (\check{\cdot})\equiv(k_1, \check{k}_2) \end{cases}$$

という関係を利用すれば，

$$\begin{cases} \hat{k}_2'(k_1^*)-\tilde{k}_2'(k_1^*)=-[y_{11}(*)y_{22}(*)-y_{12}(*)^2]/y_{12}(*)[y_{22}(*)-y_{12}(*)], \\ \tilde{k}_2'(k_1^*)-\check{k}_2'(k_1^*)=[y_{11}(*)y_{22}(*)-y_{12}(*)^2]/y_{22}(*)[y_{22}(*)-y_{12}(*)], \\ (*)\equiv(k_1^*, k_2^*) \end{cases}$$

を得る．

〈2〉：$\hat{k}_2$ 曲線は基本型Ⅰを採る場合の $\dot{\phi}_1=0$ となる k_1 と k_2 の関係を意味し，$\check{k}_2$ 曲線は基本型Ⅲを採る場合の $\dot{\phi}_2=0$ となる k_1 と k_2 の関係を意味している．かくして，簡単な考察により結論を得る（cf. 第3図）．　（証了）



第 3 図

補助定理 5　（a）$\tilde{k}_2$ 曲線の上方領域において基本型Ⅰを採用した場合，$\dot{\phi}_1<0$ の領域では，後進解経路に関して $\omega>0$ である．（b）$\tilde{k}_2$ 曲線の下方領域において基本型Ⅲを採用した場合，$\dot{\phi}_2<0$ の領域では，後進解経路に関して $\omega>0$ である．

証明　（a）についてのみ証明する．基本型Ⅰの下では（Ⅰ.3）が成立しているから，これを t に関して微分して整理すると，

$$\dot{\omega}=\{(1-\omega)(y_1\dot{k}_1+y_2\dot{k}_2)/y\}-\{\dot{\phi}_1/yu''[(1-\omega)y]\}$$

となる．このとき，$0<\omega\fallingdotseq0$ とすると，（Ⅰ.1）により，上式右辺第1項は負

となり，$\dot{\omega}<0$ である.[1]　(証了)

さて，補助定理3により，正の初期値 $k_1(0)$ に対して，$k_1(0)<k_1^*$ のときには，S^+ 経路上では $0<\omega<1$ かつ $0<\theta<1$ であることが分かっている．ところが，$k_1(0)>k_1^*$ のときには，S^+ 経路上で $0\leqq\omega\leqq1$ や $0\leqq\theta\leqq1$ が満たされない事例が発生し得る.[2] この制約条件不充足の事態が生ずる場合にも，S^+ 経路上で，

$$① \begin{cases} \inf\limits_{\omega<0} k_1 < \min(\inf\limits_{\theta<0} k_1,\ \inf\limits_{\theta>1} k_1),\ \text{or} \\ 0<\omega<1 \Rightarrow \dot{k}_\nu+(\kappa+\lambda+\tau)k_\nu \geqq 0,\ \nu=1,2 \end{cases}$$

である場合と，

$$② \quad \inf_{\omega<0} k_1 > \min(\inf_{\theta<0} k_1,\ \inf_{\theta>1} k_1)$$

である場合とによって，分析の難易は多少異なるかもしれない．①の場合には，専ら ω の制約条件のみに注意を集中すればよいからである．しかし，目下の諸仮定の枠内では，S^+ 経路上で ω 及び θ に関する制約条件不充足の事態が生じたとして，①または②のいずれの事態に至るかという点については，正確な情報を得ることはできない．

補助定理 6　所与の正初期値の組 $[k_1(0),\ k_2(0)]$ から出発する最適定常経路が存在するとすれば，それは一意的である．

証明　福尾〔5〕の定理2の証明過程の段階5と同様にすれば，最適経路が存在するとき，その消費経路は一意的であることが示される．そこで，この一意的最適消費経路を c とする．c に対応する第1資本財存在量，第2資本財存在量及び粗投資の時間経路は一意的ではないとし，そのうちの任意の2つの組を (k_1, k_2, z)，$(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{z})$ と書くことにすると，

---

1) $k_1=0$ のときには，$\xi<y_1<\infty$ ならば，$y_1\dot{k}_1 \doteqdot 0$ によって $\dot{\omega}<0$ となり，$y_1=\infty$ ならば（I.2）により，基本型Iの下で特定の経路について考察することは不可能となる．

2) $\omega<0$ となるかもしれないことは，福尾〔7〕§1の議論から類推すれば明らかである．

$$c=[y(k_1,k_2)-z]\xi+[y(\tilde{k}_1,\tilde{k}_2)-\tilde{z}](1-\xi),\ 0<\xi<1,$$
$$<y[\xi k_1+(1-\xi)\tilde{k}_1,\xi k_2+(1-\xi)\tilde{k}]-[\xi z+(1-\xi)\tilde{z}]\equiv\overset{\circ}{c}$$

となる．生産関数Fの1次同次性により，経路$[\xi k_1+(1-\xi)\tilde{k}_1,\xi k_2+(1-\xi)\tilde{k}_2,\xi z+(1-\xi)\tilde{z}]$及びこれに対応する$\overset{\circ}{c}$は実行可能である．しかし，これは矛盾である．（証了）

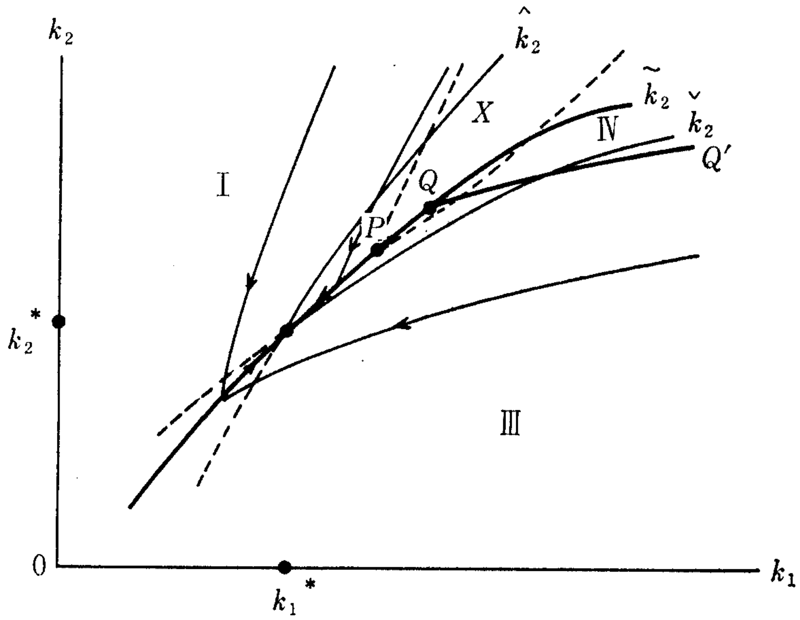
補助定理6を次のように述べることもできる．有意S^+経路上の各点に対応するk_1とk_2に関する組からなる集合Kの各点$(k_1{}^A,k_2{}^A)$に対して，$(k_1{}^A,k_2{}^A)$から出発する基本型I((III))の後進解経路を考えると，$\omega(t^\circ)=0$かつ$\dot{\omega}(t^\circ)>0$となる最大の時刻$t^\circ\leqq 0$とこの時刻t°における組$[k_1(t^\circ),k_2(t^\circ)]$が対応している．$K$を定義域とするこのような対応によって作られる$\omega=0$を満たす$(k_1,k_2)$平面の第1象限上の曲線または集合は，$(k_1,k_2)$平面上で，$k_2/k_1=$const．となる任意の半直線とたかだか1回交差または接する．

これまでの考察を総合すると，最適経路の存在問題に関して，次の定理を得る．

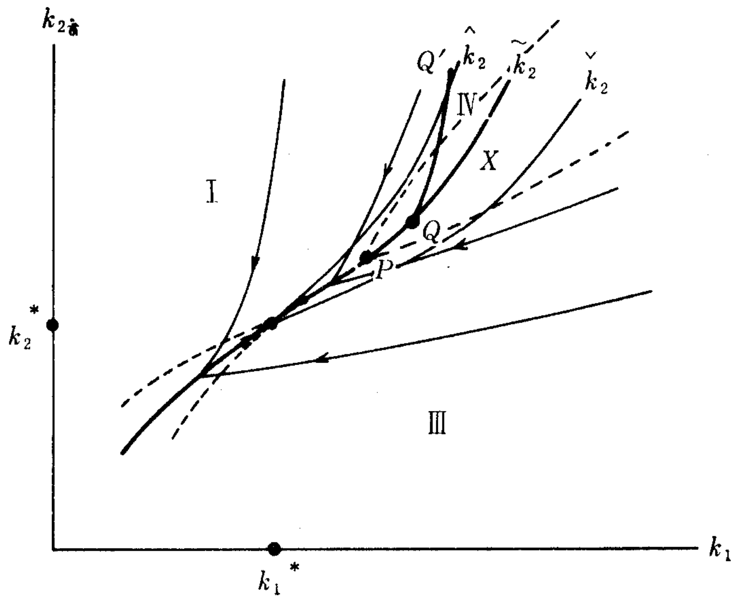
定理4　仮定1—仮定11の下では，次のことが主張される．資本効率労働力比率の正初期値の組$[k_1(0),k_2(0)]$に対して，$k_1(0)<k_1{}^*$かつ$k_2(0)<k_2{}^*$の場合には，最適経路が一意的に存在する．そうでない場合には，$[k_1(0),k_2(0)]$が，（a）有意S^+経路上のある点に対応する組$(k_1{}^A,k_2{}^A)$と一致するか，（b）有意S^+経路上のある点の基本型IまたはIIIの後進解経路上のある点に対応する組$(k_1{}^B,k_2{}^B)$と一致するか，（c）有意S^+経路上のある点の基本型IまたはIIIの後進解経路上の終端点，つまり，$\omega(t^\circ)=0$かつ$\dot{\omega}(t^\circ)>0$となる最大の時刻$t^\circ\leqq 0$における点の基本型IVによる後進解経路上のある点に対応する組$(k_1{}^C,k_2{}^C)$と一致すれば，最適経路が一意的に存在する．それ以外の初期値に対しては，（最適定常経路に収束する）最適経路は存在しない．

証明　補助定理3—補助定理6により証明されている（cf．第5図）．

（証了）



第 5.1 図



第 5.2 図

注1) 各領域Ⅰ，Ⅲ及びⅣは，その領域内の点に対して採用すべき基本型を示す.
2) Pは，基本型Ⅱを採用した場合，$\theta=0$ または $\theta=1$ となり，しかも，そのある右方開区間で $\theta<0$ または $\theta>1$ となる点を示す.
3) $\tilde{k}_2$ 曲線上のP点より左方領域の点に対しては，基本型Ⅱが採用される.
4) QQ' 線は，有意 S^+ 経路上の点の基本型Ⅰまたは Ⅲの後進解経路上の終端点——このとき $\omega=0$ である——によって作られる曲線または集合である.
5) 領域X内の初期値に対しては最適経路は存在しない.

定理 5　生産関数(1)がコッブ=ダグラス（Cobb=Douglas）型，すなわち，

$$y=\varepsilon k_1^{\alpha_1}k_2^{\alpha_2},\ \varepsilon,\alpha_1,\alpha_2=\text{const.}>0,\ \alpha_1+\alpha_2<1$$

の場合には，仮定7—仮定10の下では，任意の正初期値の組 $[k_1(0),k_2(0)]$ に対して，最適経路が一意的に存在する．

証明　**段階 1**　上記生産関数の下では，

$$\text{①}\quad\begin{cases} y_1=\alpha_1 y/k_1,\ y_2=\alpha_2 y/k_2,\ y_{12}=\alpha_1\alpha_2 y/k_1k_2,\\ y_{11}=-\alpha_1(1-\alpha_1)y/k_1^2,\ y_{22}=-\alpha_2(1-\alpha_2)y/k_2^2\\ \tilde{k}_2(k_1)=\alpha_2k_1/\alpha_1,\ \tilde{k}_2'(k_1)=\alpha_2/\alpha_1,\end{cases}$$

となることに注目する．そうすると，基本型IIの下では，$0<\omega<1$ に対しては，(17)により，恒等的に

$$0<\theta=\alpha_1/(\alpha_1+\alpha_2)<1,\ \dot{k}_2/\dot{k}_1=\tilde{k}_2'(k_1)=\alpha_2/\alpha_1$$

が成立している．

段階 2　次に，$\hat{k}_2$ 曲線及び $\check{k}_2$ 曲線は，それぞれ $\tilde{k}_2$ 曲線と (k_1^*,k_2^*) においてただ1度だけ交わり，

$$\begin{cases}\hat{k}_2'(k_1)=-y_{11}/y_{12}=(1-\alpha_1)\hat{k}_2/\alpha_2k_1>0,\\ \hat{k}_2''(k_1)=(1-\alpha_1)(1-\alpha_1-\alpha_2)\hat{k}_2/\alpha_2^2k_1^2>0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\check{k}_2'(k_1)=-y_{12}/y_{22}=\alpha_1\check{k}_2/(1-\alpha_2)k_1>0,\\ \check{k}_2''(k_1)=-\alpha_1(1-\alpha_1-\alpha_2)\check{k}_2/(1-\alpha_2)^2k_1^2<0,\end{cases}$$

という性質を持っている．

段階 3　今度は，$\omega\equiv0$ の下で（I．1）（I．2）及び（I．3）を満たす関数 $\overset{\triangle}{k}_2=\overset{\triangle}{k}_2(k_1)$ が存在すると仮定して，その性質を調べることにする．$\omega\equiv0$ ならば，（I．2）及び（I．3）は

$$\dot{\phi}_1=[\xi-y_1(\cdot)]u'(y),\ (\cdot)\equiv(k_1,\overset{\triangle}{k}_2)$$
$$=u''(y)[y_1(\cdot)\dot{k}_1+y_2(\cdot)\dot{k}_2]$$

という関係が成立することを意味するが，このとき，仮定8により

$$yu''(y)/u'(y)=\gamma-1,\ \gamma=\text{const.}<1$$

であることと(9)とにより，

$$y_1(k_1, \overset{\triangle}{k}_2)=\xi-(\alpha_1+\alpha_2)(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau)\equiv\zeta<\xi$$

となることを知る．したがって，任意の $k_1>0$ に対して，

$$y_1(k_1, \overset{\triangle}{k}_2)=\zeta<y_1(k_1, \hat{k}_2)=\xi$$

となるから，(2)により，$\overset{\triangle}{k}_2(k_1)<\hat{k}_2(k_1)$ となる．かくして，(I.1) (I.2) (I.3) 及び $\omega\equiv0$ を満たす $\overset{\triangle}{k}_2$ 曲線は，それがもし存在するならば，基本型Iの下で $\dot{\phi}_1\equiv0$ を満たす $\hat{k}_2$ 曲線よりも常に下方に位置し，更に，$\overset{\triangle}{k}_2'(k_1)>0$, $\overset{\triangle}{k}_2''(k_1)>0$ となっている．全く同様の考察によって，(III.1) (III.2) (III.3) 及び $\omega\equiv0$ を満たす関数 $\overset{\triangledown}{k}_2=\overset{\triangledown}{k}_2(k_1)$ は，それがもし存在するならば，基本型IIIの下で $\dot{\phi}_2\equiv0$ を満たす $\check{k}_2$ 曲線よりも常に下方に位置し，$\overset{\triangledown}{k}_2'(k_1)>0$, $\overset{\triangledown}{k}_2''(k_1)<0$ となっている．

段階 4　もし $\zeta\leqq0$ ならば，$\overset{\triangle}{k}_2$ 曲線も $\overset{\triangledown}{k}_2$ 曲線も存在しないことは明白である．一方，もし $\zeta>0$ ならば，

$$\begin{cases}\tilde{y}_1=\tilde{y}_1(k_1)\equiv y_1(k_1, \tilde{k}_2)=\varepsilon\alpha_1^{(1-\alpha_2)}\alpha_2^{\alpha_2}k_1^{-(1-\alpha_1-\alpha_2)}\\ \tilde{y}_1'(k_1)<0,\ \tilde{y}_1(0)=\infty,\ \tilde{y}_1(\infty)=0\end{cases}$$

を考慮すると，ある $k_1=k_{1\zeta}$ に対して，

$$y_1[k_{1\zeta}, \tilde{k}_2(k_{1\zeta})]=y_2[k_{1\zeta}, \tilde{k}_2(k_{1\zeta})]=\zeta$$

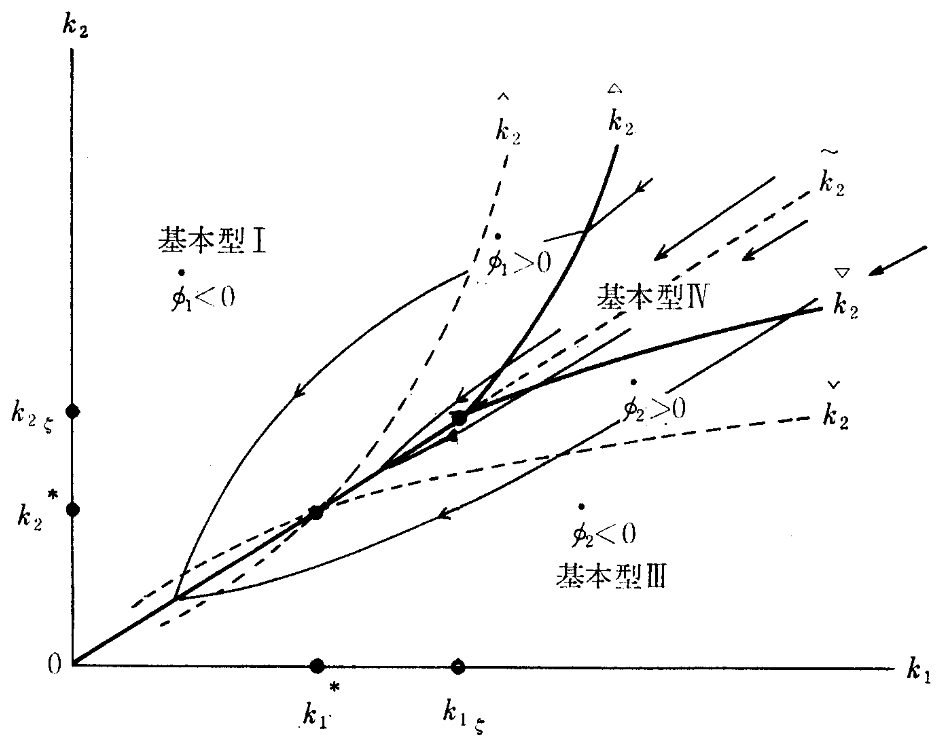
となって，$\overset{\triangle}{k}_2$ 曲線も $\overset{\triangledown}{k}_2$ 曲線も存在する．しかも，第1図を参考にすると明らかなように，$\overset{\triangle}{k}_2$ 曲線，$\tilde{k}_2$ 曲線及び $\overset{\triangledown}{k}_2$ 曲線は (k_1, k_2) 平面上においてただ1点$[k_{1\zeta}, \tilde{k}_2(k_{1\zeta})]$ で交わり，

$$k_1>k_{1\zeta}\ \Rightarrow\ \overset{\triangledown}{k}_2(k_1)<\tilde{k}_2(k_1)<\overset{\triangle}{k}_2(k_1)$$

すなわち，$k_1>k_{1\zeta}$ に対して，$\overset{\triangle}{k}_2$ 曲線は $\tilde{k}_2$ 曲線の常に上方，$\overset{\triangledown}{k}_2$ 曲線は $\tilde{k}_2$ 曲線の常に下方に位置する．

段階 5　以上の考察によって，第6図のごとき位相図を得，証明が完了する．なお，有意 S^+ 経路上では，$\phi\equiv\phi_1=\phi_2$ とおくと，

$$\begin{aligned}\dot{\phi}&=[-\dot{\omega}\tilde{y}+(1-\omega)\{1+\tilde{k}_2'(k_1)\}\dot{k}_1\tilde{y}_1]u''[(1-\omega)\tilde{y}]\\&=(\xi-\tilde{y}_1)u'[(1-\omega)\tilde{y}]\end{aligned}$$



第 6 図

が成立しているから，①を利用すると，

$$\dot{\omega}=[(1-\omega)\{1+\tilde{k}_2'(k_1)\}\dot{k}_1\tilde{y}_1/\tilde{y}]+[(\xi-\tilde{y}_1)/(1-\gamma)]$$

$$=[\{\xi-(1-\omega)(\alpha_1+\alpha_2)(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau)\}-\{1-\omega(1-\omega)(1-\gamma)\}\tilde{y}_1]/(1-\gamma)$$

$$\dot{\omega}'(k_1)=-\{1-\omega(1-\omega)(1-\gamma)\}\tilde{y}_1'(k_1)/(1-\gamma)$$

となる．したがって，もし $\gamma>0$ ならば，$\dot{\omega}'(k_1)>0$ であり，$\dot{\omega}(k_1^*)=0$ を想起すると，第 7 図が得られる．かくして，もし $\gamma>0$ ならば，$k_{1\zeta}(0<k_{1\zeta}<\infty)$ が必ず存在するのみならず，有意 S^+ 経路上の消費の時間経過に伴う運動をも知ることができる．すなわち，有意 S^+ 経路上では，

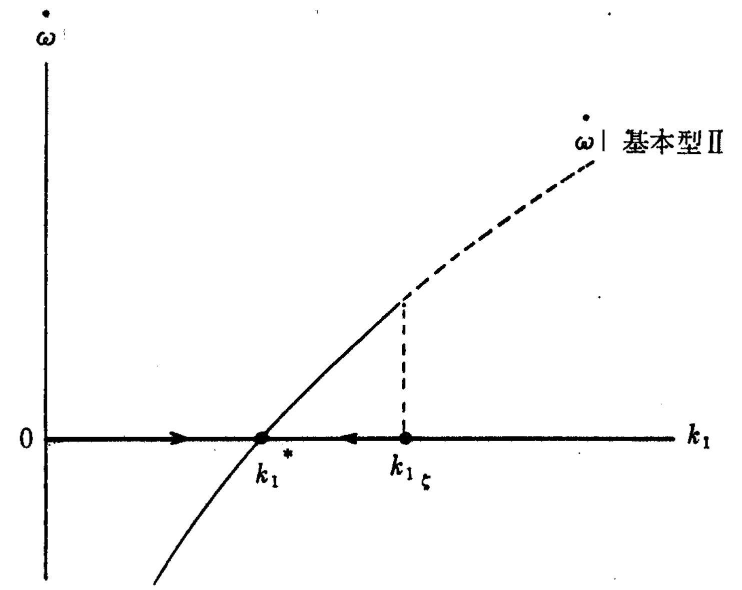
$$\mathrm{sign}(k_1^*-k_1)=\mathrm{sign}\dot{k}_1=\mathrm{sign}\dot{\tilde{k}}_2=-\mathrm{sign}\dot{\omega}$$

であるから，

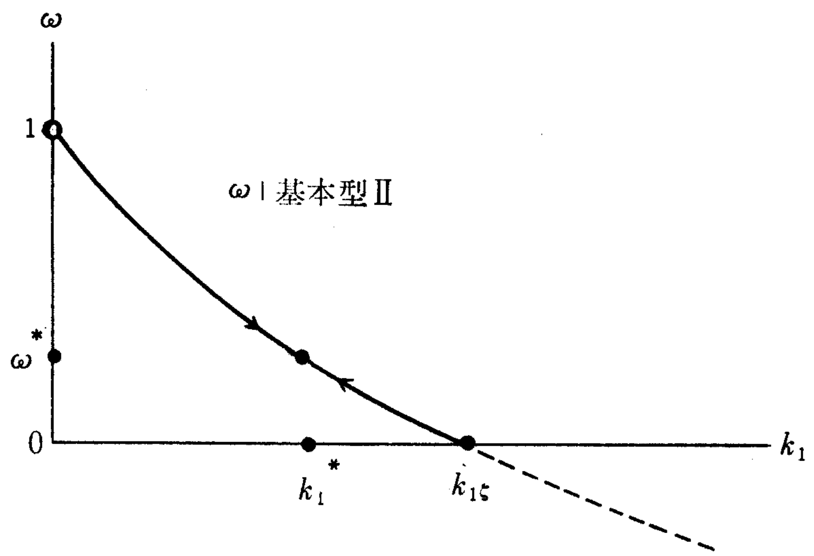
$$\mathrm{sign}(k_1^*-k_1)=\mathrm{sign}[\dot{c}=-\dot{\omega}\tilde{y}+(1-\omega)(\dot{k}_1+\dot{\tilde{k}}_2)\tilde{y}_1]$$

となる．

（証了）



第7.1図



第7.2図

6 結 語

本稿では，2種類の異質資本財の下における1部門最適経済成長モデルが考察された．資本財の種類が2種類に限られており，その意味では，必ずしも十分に一般化されたモデルとは言い難い．しかし，このような単純な異質資本財

最適経済成長モデルにおいてさえ，実証分析の領域における異質資本財経済成長モデルがソロー=スワン型の 1 種類の同質資本財の下における モデルと同様な好都合な結果を必ずしも得ることができなかったのと類似して，いわゆるラムゼイ=キャス型の 1 種類の同質資本財の下における モデルのごとき 好都合な結論，すなわち，資本効率労働力比率の任意の正初期値に対して最適経路が存在するという結論を留保条件なしに得ることはできない.

生産関数がコッブ=ダグラス型である場合には， 任意の 正初期値に対して最適経路の一意的存在が保証される．したがって， コッブ=ダグラス型生産関数が容認される程度に応じて，最適経路の一意的存在の結論が是認される，とも言えないことはない.

本稿で考察されたモデルでは，仮定 8 に見られるように，その一時的社会厚生関数は，限界一時的社会厚生が逓減するという特徴を持っていた．これに対して，序において少し言及したライダーの最適経済成長モデルでは，その一時的社会厚生関数は平均的消費者の経常消費量によって定義されており，したがって，その限界一時的社会厚生は一定（=1）である．ライダーのこの仮定[1)]は，私見によれば，彼の価値判断そのものの表現というより，むしろ数学操作上の単純化のためのものであるような印象を受ける．実際，我々の観察では，一時的社会厚生関数についての仮定のみを仮定 8 に代替して，ライダー・モデルを再構成してみると，最適性の必要条件として導出される微分方程式が複雑なものになる結果，最適定常経路の近傍における経済の運行の様相を，ライダーが論じたごとくには明確に示すことができなくなってしまうのである.

さて，それでは，本稿のモデルにおいて，ライダー型一時的社会厚生関数を導入した場合 ——このことは， 仮定 8 において $\gamma=1$ とおくことを 意味する ——には，結論はいかなる影響を受けるであろうか．詳細な検討なしに速断することは避けるべきであるが，我々の感知するところでは，この場合には，例

1) スリニバサン(**Srinivasan**)〔14〕, 宇沢 (**Uzawa**)〔15〕, ノードハウス(**Nordhaus**)〔11〕等もまたこの仮定を採用した.

えば基本型Ⅰないしは Ⅲ を採り得るのはそれぞれ (k_1, k_2) 平面の $\hat{k}_2$ 曲線ないしは $\check{k}_2$ 曲線上だけであるというように，各基本型の性質が一変するのみならず，最適消費経路の一意性の主張も恐らく困難であるために，本文で考察されたモデルの帰結を上回る明確な結果を得ることはほとんど不可能に思われる．

かくして，価値判断からの観点ではなく，導出される結論の経済学的説明力ないしは数学操作上の便宜性という観点から言えば，本稿のモデルのような問題設定の下では，仮定8の方がライダー型一時的社会厚生関数の仮定よりも優れている，と言えよう．

引用文献

〔1〕 Atkinson, A. B., "The Timescale of Economic Models : How Long is the Long Run?" *Rev. Econ. Stud.*, **36** (1969), 137–152.

〔2〕 Arrow, J. K.–Kurz, M., *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, The John Hopkins Press, Baltimore and London, 1970.

〔3〕 Caton, C.–Shell, K., "An Exercise in the Theory of Heterogeneous Capital Accumulation," *Rev. Econ. Stud.*, **38** (1971), 13–22.

〔4〕 福尾洋一, "2部門経済における最適成長政策について," 経済学論究, **24** (**4**) (1971), 135–165.

〔5〕 ――, "価格安定下の最適経済成長の可能性," 経済学論究, **27** (**3**) (1973), 49–64.

〔6〕 ――, "Cass の最適経済成長理論," 経済学論究, **28** (**2**) (1974), 89–109.

〔7〕 ――, "非可逆的投資の下における Ramsey の最適経済成長理論," 経済学論究, **28** (**3**) (1974), 41–58.

〔8〕 Hahn, F. H., "Equilibrium Dynamics with Heterogeneous Capital Goods," *Quar. J. Econ.*, **80** (1966), 633–646.

〔9〕 Inada, K., "Investment in Fixed Capital and the Stability of Growth Equilibrium," *Rev. Econ. Stud.*, **33** (1966), 19–30.

〔10〕 Kurz, M., "The General Instability of a Class of Competitive Growth Processes," *Rev. Econ. Stud.*, **35** (1968), 155–174.

〔11〕 Nordhaus, W. D., "The Optimal Rate and Direction of Technical Change," in *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, ed. by Shell, K., MIT Press, Cambridge, USA, 1967, 53–66.

〔12〕 Ryder, Jr. H. E., "Optimal Accumulation in a Two-Sector Neo-Classical Economy with Non-Shiftable Capital," *J. Pol. Econ.*, **77** (1969), 665-683.

〔13〕 Shell, K.-Stiglitz, J., "The Allocation of Investment in a Dynamic Economy," *Quar. J. Econ.* **81** (1967), 592-609.

〔14〕 Srinivasan, T. N., "Optimal Savings in a Two-Sector Model of Growth," *Econometrica*, **32** (1964), 358-373.

〔15〕 Uzawa, H., "Optimal Growth in a Two-Sector Model of Capital Accumulation," *Rev. Econ. Stud.*, **31** (1964), 1-25.