異質消費財の下における ローリング計画[1)]

福尾洋一

拙稿〔5〕及び〔6〕においては，拙稿〔4〕での議論を前提とすることによって，Ramsey=Cass の最適経済成長理論が考察された．幾つかの相違点も見られたが，無限（計画）時間視野を持つという点において，2人の理論は共通していた．

ところで，世界各国の現実の経済計画の例を見る限り，それが命令的なものであれ，指示的なものであれ，無限時間視野経済計画は皆無であり，恐らくオランダの長期中央経済計画（1950—70年）が最長期計画ではないであろうか．こうしたことから，ある人々は，有限時間視野の下での考察の方が現実的であるとか，数100年・数1000年後のことを計画するとは全く無意味である，と主張するかもしれない．実際，規範的経済理論の一種であるいわゆる turnpike 理論は正に有限時間視野の下での分析である．

しかし，一方では，有限時間視野の採用には重大な落とし穴があり，そのため，論理的には無限時間視野を採用すべきである，という主張がある．この点に関して，Solow〔12〕の語るところを引用してみよう．

> 無限の将来にわたって消費の流れを評価するという着想がどんなに魅力のないものであったとしても，それを巧みに免れる逃げ道といったものは存在しない．仮に，有限の将来にわたって計画を立てたとすれば，その計画期間の期末には，更にその後の将来のために残される

1) 本稿は，福尾〔4〕〔5〕及び〔6〕での議論を前提とする．そのため，本稿では，〔4〕〔5〕及び〔6〕に対して，記号は統一的に使用し，式番号や定理番号等は通し番号を採用する．

資本ストックというものがどうしても含まれてきてしまい，それを評価することが不可避となる．………ところが期末に何らかの資本を残すとすれば，当該の計画期間の後に何が起こるかを明示的あるいは暗黙的に考えることなしには，その期末資本を合理的に評価する仕方というものが全然ないことになる．そこでどうせもっと将来のことを考えるのなら，これを暗黙的に考えるより，表に出して考える方がはるかにましなのである．………[1]

また，Gale〔7〕は次のような主旨のたとえ話を挙げている．

遠海航路の船長は，水平線上の1点を目標点として定め，その点に至るまでに長時間を要することを知っていても，それを到達目標にして航行する．不測の天候異変が進路の変更を迫るような場合，彼は，決して前方の近くの1点を選ぶようなことはせず，再び水平線上に新しい目標点を定めるであろう．[2]

我々は基本的には無限時間視野採用の立場を取っている．ところが，ここに，現実的観点からの有限時間視野最適経済成長計画と論理的観点からの無限時間視野最適経済成長計画との折衷・接合という意味で興味深い，次のような状況を考えてみることができる．計画時間視野そのものは有限であるが，計画者又は計画当局が経済環境に対して抱く関心事は常に将来へと及ぶため，一定の長さの計画時間視野が時間経過とともに絶えず繰り延べられていく．そして，この計画時間視野の順次延長に際しては，実績に基づく将来の見通しに対する再評価や外的諸条件の変化に伴う原計画の修正が要求されるかもしれない．これが本稿で考察しようとするローリング計画の問題である．

さて，〔4〕〔5〕及び〔6〕の議論においては，単一生産物の総生産は同質消費財の消費と同質投資財の総投資とに分割されると考えられてきた．しかし，本稿では，単一生産物の総生産は2種類の異質消費財の消費と1種類の同質投

1) Solow〔12〕pp. 116-7.

2) Gale〔7〕p. 2.

資財の総投資とに分割されると考えることによって，消費財の取り扱いに関して議論を若干一般化させながら，ローリング計画の問題を考察する．もちろん，1種類の同質消費財というこれまでの仮定の下でもローリング計画の分析は可能であり，しかもその方が議論は単純であろう．順序としては，1種類の同質消費財の下でのローリング計画を考察してから，2種類の事例に移るのが適切であるのかもしれない．しかし，ここでは，紙数を節約するために途中の一段階を飛ばすことにする．

ところで，一定の有限（計画）時間視野を常に保持するというローリング計画は，その属性からして，有限時間視野最適経済成長理論の応用であると容易に推察される．そこで，本稿の構成も，最初は有限時間視野最適経済成長の問題から出発する．§1 では，2種類の異質消費財の下での一時的社会厚生について説明する．§2 では，有限時間視野 $[0, \hat{t}]$ を持つ $\hat{t}$-最適経済成長モデルを提示する．それは，Cass〔1〕の有限時間視野分析の応用である．§3 では，$\hat{t}$-最適成長のための必要条件と十分条件について述べる．§4 では，$\hat{t}$-最適成長経路の存在と一意性を示す．§5 では，$\hat{t}$-最適成長モデルをローリング計画に応用する．§6 は結びに充てられる．

§1　異質消費財の下における一時的社会厚生

〔4〕〔5〕及び〔6〕においては，経済に存在する消費財はただ1種類であると仮定されてきた．本稿では，この仮定を次のように変更する．

仮定 3.1　経済に存在する消費財には2種類の，ただそれだけの，異質な型がある．それら2つの異質消費財はいずれも上級財である．すなわち，平均的消費主体にとって，所得が増大（(減少)）すると両消費財に対する需要がいずれも増大（(減少)）する．[1)]

1)　所得が増大（(減少)）すると需要が減少（(増大)）するような財のことをしばしば下級財（inferior good）と呼ぶことがある．そうすると，所得が増大（(減少)）しても需要が減少（(増大)）しないような財は下級財ではないということになる．我々は，下級財及び下級財でない財と区別する意味で上級財（superior good）という用語を用

消費財を2種類に分類することには幾つかの観点からの解釈を与えることができるように思われる．第1に，有形消費財と無形消費財たるサービスとを区別することが考えられる．サービスを財貨と見なすか否かについては論議を呼ぶところであろう．しかしそれだけに，この両者を区別することは興味深いと言える．我々に毎年報告されるいわゆる国民総生産 GNP の統計の中には確かにサービスの価値が含まれている．しかも，教育・文化，医療，道路，公園，図書館，消防・治水，上下水道，ガス・電力供給，運輸・通信・情報，金融・保険，芸能・スポーツその他の娯楽等，サービスの現代経済に占める比重は極めて大きい．

第2に，食料生産物と非食料生産物とを区別することが考えられる．この場合特に興味深いと思われるのは，（1）最低生存生活を営むに当っては，食料生産物は必須不可欠であるのに対して，非食料生産物は必ずしもそうではないこと，（2）食料生産物には恐らく社会厚生の飽和状態が存在するのに対して，非食料生産物には恐らくそのような状態は存在しないこと，である．

第3に，工業生産物と農業を含む非工業生産物とを区別することも考えられるであろう[1)]．

もとより，有形消費財・無形消費財，食料生産物・非食料生産物，工業生産物・非工業生産物といった分類は機能上の分類とは言い難い．それにもかかわらず，有形・無形，食料・非食料，工業・非工業という消費財の形態上の相違が個々人の効用ひいては社会厚生に異なった効果を及ぼすことは十分に想像することができる．また，このような分類法には同調できないとしても，2種類の異質消費財を想定することによって，1種類の同質消費財の仮定の下では考察できない消費財間の社会的選択の問題をモデルの中に導入することが可能となるであろう．

いている．なお，この点に関しては，Henderson-Quandt〔9〕p. 42 を併せて参照されたい．

1) 渡部—筑井〔14〕p. 200 はこの分類法を採用している．

定義 3.1 （異質消費財の下における）一時的社会厚生関数

平均的消費主体の時刻 t における一時的効用指標 u が当時刻の第Ⅰ及び第Ⅱ消費財消費 $\bar{c}_{\mathrm{I}}$ と $\bar{c}_{\mathrm{II}}$ で定義される関数 υ

(3.1) $\quad u=\upsilon(\bar{c}_{\mathrm{I}}, \bar{c}_{\mathrm{II}}, t), \ (\bar{c}_{\mathrm{I}}, \bar{c}_{\mathrm{II}}, t) \in \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^3, \ u \in \boldsymbol{R}$

によって与えられているものとする．このとき，指標 u を改めて t の一時的社会厚生指標と呼ぶことにする．なお，外生的に付与される t の総消費主体量（＝人口＝労働力人口）を $e^{\lambda t}$，経済の第Ⅰ及び第Ⅱ消費財消費を C_{I} と C_{II} とすると，平均的消費主体の定義的属性により，

$$\bar{c}_{\mathrm{I}}=C_{\mathrm{I}}/e^{\lambda t}, \qquad \bar{c}_{\mathrm{II}}=C_{\mathrm{II}}/e^{\lambda t}$$

である．

本稿では，仮定 1.8 に代替する次の仮定を採用する．

仮定 3.2 関数 υ は消費 $(\bar{c}_{\mathrm{I}}, \bar{c}_{\mathrm{II}})$ に関して $\boldsymbol{R}_{+}{}^2$ で 2 回連続的偏微分可能な γ 次同次凹関数 u

(3.2) $\quad u=\upsilon(\bar{c}_{\mathrm{I}}, \bar{c}_{\mathrm{II}}, t)=u(\bar{c}_{\mathrm{I}}, \bar{c}_{\mathrm{II}})$

$$(3.3)\begin{cases} (1) & \text{関数 } u \text{ は } (0,\ 0) \text{ においては微分不能} \\ (2) & [\forall(\bar{c}_{\mathrm{I}}, \bar{c}_{\mathrm{II}}) \in \boldsymbol{R}_{+}{}^2] : u_1(\cdot)>0,\ u_2(\cdot)>0, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad u_{11}(\cdot)<0,\ u_{22}(\cdot)<0, \\ (3) & [\forall \bar{c}_{\mathrm{II}} \in \boldsymbol{R}_{+}] : \lim\limits_{\bar{c}_{\mathrm{I}} \to 0} u_1(\cdot)=\infty,\ \lim\limits_{\bar{c}_{\mathrm{I}} \to \infty} u_1(\cdot)=0, \\ (4) & [\forall \bar{c}_{\mathrm{I}} \in \boldsymbol{R}_{+}] : \lim\limits_{\bar{c}_{\mathrm{II}} \to 0} u_2(\cdot)=\infty,\ \lim\limits_{\bar{c}_{\mathrm{II}} \to \infty} u_2(\cdot)=0, \\ (5) & [\forall(\bar{c}_{\mathrm{I}}, \bar{c}_{\mathrm{II}}) \in \boldsymbol{R}_{+}{}^2] : u_{11}(\cdot)u_{22}(\cdot)-u_{12}(\cdot)^2 \equiv A>0, \end{cases}$$

ただし，$\partial u/\partial \bar{c}_{\mathrm{I}} \equiv u_1$，$\partial u/\partial \bar{c}_{\mathrm{II}} \equiv u_2$，$\partial^2 u/\partial \bar{c}_{\mathrm{I}}{}^2 \equiv u_{11}$，$\partial^2 u/\partial \bar{c}_{\mathrm{II}}{}^2 \equiv u_{22}$，

$\partial^2 u/\partial \bar{c}_{\mathrm{II}} \partial \bar{c}_{\mathrm{I}} \equiv u_{12}$，$\partial^2 u/\partial \bar{c}_{\mathrm{I}} \partial \bar{c}_{\mathrm{II}} \equiv u_{21}$

によって特定される.[1),2)]

---

1) $\boldsymbol{R}_{\oplus}=[0, \infty)$，$\boldsymbol{R}_{+}=(0, \infty)$

2) 例えば，関数 u が次のように特定されると，仮定 3.2 は満たされる．

（1） $u=\varepsilon \bar{c}_{\mathrm{I}}{}^{\gamma_{\mathrm{I}}} \bar{c}_{\mathrm{II}}{}^{\gamma_{\mathrm{II}}}$，$\varepsilon$，$\gamma_{\mathrm{I}}$，$\gamma_{\mathrm{II}}=\mathrm{const.}>0$，$\gamma_{\mathrm{I}}+\gamma_{\mathrm{II}} \equiv \gamma<1$，

（2） $u=(\varepsilon_{\mathrm{I}} \bar{c}_{\mathrm{I}}{}^{-\beta}+\varepsilon_{\mathrm{II}} \bar{c}_{\mathrm{II}}{}^{-\beta})^{-1/\alpha}$，$\alpha$，$\beta$，$\varepsilon_{\mathrm{I}}$，$\varepsilon_{\mathrm{II}}=\mathrm{const.}>0$，$\beta/\alpha \equiv \gamma<1$．

(3.3.1) は，両消費財の0の消費に対しては，各消費財の限界一時的社会厚生を定義することはできないことを意味する．(3.3.2) は，両消費財の任意正消費に対して，各消費財の限界一時的社会厚生は共に正で逓減することを意味する．(3.3.3) の最初の式は，第II消費財の任意正消費に対して，第I消費財の限界一時的社会厚生は当消費財消費が0に向かうにつれて無限大になるという仮定であり，第I消費財についての最低生存生活状況の設定を連続関数に矛盾しない形で一般化している．[1] 議論を単純化するために，(3.3.4) の最初の式において，全く対称的仮定が第II消費財についても採用されている．すなわち，第I消費財の任意正消費に対して，第II消費財の限界一時的社会厚生は当消費財消費が0に向かうにつれて無限大になる．(3.3.1) 並びに (3.3.3) 及び (3.3.4) の最初の式により，両消費財のどちらか一方又は双方の消費が0になるような社会的選択は生じないであろう．(3.3.4) の後の式は，第I消費財の任意正消費に対して，第II消費財の限界一時的社会厚生は当消費財消費が無限大に向かうにつれて0になるという仮定であり，第II消費財には一時的社会厚生の飽和状態はないという状況の設定を連続関数に矛盾しない形で一般化している．[2] 再び議論を単純化するために，(3.3.3) の後の式において，全く対称的仮定が第I消費財についても採用されている．すなわち，第II消費財の任意正消費に対して，第I消費財の限界一時的社会厚生は当消費財消費が無限大に向かうにつれて0になる．(3.3.5) は，両消費財の任意正消費に対して，同種の消費財が限界一時的社会厚生に及ぼす相乗効果 ($=u_{11}u_{22}$) は異種の消費財が限界一時的社会厚生に及ぼす相乗効果 ($=u_{12}u_{21}$) よりも大きいことを意味している．なお，数学上の必然の結果として，一方の消費財が他方の消費財の限界一時的社会厚生に及ぼす効果 ($=u_{12}$ 及び u_{21}) は共に等しくなる．

なお，(3.3) に類似する性質を持つ関数は，それぞれ異なった題材の下にではあるが，Sidrauski〔11〕，Douglas〔3〕，Chase〔2〕等によって採用されてきた．

1),2) Cass〔1〕p. 835 を参照されたい．

§2　$\hat{t}$-最適経済成長モデル

定義 3.2（異質消費財の下における）$\hat{t}$-社会厚生汎関数

有限時間視野 $[0, \hat{t}]$, $\hat{t}<\infty$, が外生的に付与されている．このとき，経済の最大化目標である $\hat{t}$-社会厚生指標 $W(\hat{t})$ は一時的社会厚生指標 u の（初期を基準とした）現在価値の $[0, \hat{t})$ にわたる積分（＝汎関数）によって次のように定義される．

$$(3.4) \qquad W(\hat{t})=\int_0^{\hat{t}} u[\tilde{c}_{\mathrm{I}}(t), \quad \tilde{c}_{\mathrm{II}}(t)]e^{-\partial(t)}dt.$$

ただし，∂ は一時的社会厚生指標の時間割引率を意味し，それは一般に非負である．

時刻 t における，効率単位表示の平均的消費主体又は効率労働力 1 単位当たり第Ⅰ及び第Ⅱ消費財消費を $c_{\mathrm{I}}(t)$ 及び $c_{\mathrm{II}}(t)$，労働効率 $T(t)$ を $e^{\tau t}$（仮定 1.6)，すなわち，

$$c_{\mathrm{I}}(t)=\tilde{c}_{\mathrm{I}}(t)/e^{\tau t}=C_{\mathrm{I}}(t)/e^{(\lambda+\tau)t}, \quad c_{\mathrm{II}}(t)=\tilde{c}_{\mathrm{II}}(t)/e^{\tau t}=C_{\mathrm{II}}(t)/e^{(\lambda+\tau)t}$$

と置くと，仮定3.2により，(3.4) は

$$(3.5) \qquad W(\hat{t})=\int_0^{\hat{t}} u[c_{\mathrm{I}}(t), \quad c_{\mathrm{II}}(t)]e^{-[\partial(t)-\tau\gamma]t}dt$$

と書かれる．

ここで，以下の議論の単純化を図って，次のように仮定する．

仮定 3.3 時間割引率 ∂ は

$$(3.6) \qquad \begin{cases} [\forall t\in[0, t)] : \partial(\hat{t})=\partial=\text{const.} \\ \partial-\tau\gamma\equiv\delta>0 \end{cases}$$

という関係を満たす[1]．

1) 仮定 3.3 の意味については福尾〔5〕p. 92 を見られたい．

定義 3.3 （異質消費財の下における）$\hat{t}$-実行可能経路

今，仮定 1.1—1.6，1.9，2.2 及び 3.1 の下で，生産関数

(1.19) $y(t)=y[k(t)],\quad k(t)\in \boldsymbol{R}_{\oplus},\quad y(t)\in \boldsymbol{R}_{\oplus}$

が特性

(1.21) $\begin{cases}[\forall k(t)\in \boldsymbol{R}_{+}]: \\ y(\cdot)>0,\ y'(\cdot)>0,\ y''(\cdot)<0,\ y(\cdot)-k(t)y'(\cdot)>0\end{cases}$

(2.14) $\lim\limits_{k(t)\to\infty} y'(\cdot)<\xi\equiv\kappa+\lambda+\tau+\delta<\lim\limits_{k(t)\to 0} y'(\cdot)$

を持っているようなモデル経済を考える．このとき，資本財ストックの初期値 $k_0\equiv k(0)\equiv K(0)$ から出発し，時間視野 $[0,\ \hat{t})$ を通じて，関係

(3.7) $y[k(t)]=c_{\mathrm{I}}(t)+c_{\mathrm{II}}(t)+z(t),\quad k(t),\ c_{\mathrm{I}}(t),\ c_{\mathrm{II}}(t),\ z(t)\geqq 0,$

(1.33) $\dot{k}(t)=z(t)-(\kappa+\lambda+\tau)k(t)$

及び終端制約条件

(3.8) $k(\hat{t})\geqq k_{\hat{t}}$，ただし．$k_{\hat{t}}=\mathrm{const.}\geqq 0$

を満たすような経済諸変数の時間経路 $(y(t),\ c_{\mathrm{I}}(t),\ c_{\mathrm{II}}(t),\ z(t)\ ;\ \hat{t})$ を $\hat{t}$-実行可能経路又は $\hat{t}$-実行可能計画と呼ぶことにする．なお，$y(t)$，$z(t)$ 及び $k(t)$ はそれぞれ，時刻 t における，効率労働力 1 単位当たりの総生産（=効率労働力生産性），効率労働力 1 単位当たりの総投資及び効率労働力 1 単位当たりの資本財ストック（=資本効率労働力比率）であり，総生産を $Y(t)$，総投資を $Z(t)$，資本財ストックを $K(t)$ とすると，

$$y(t)=Y(t)/e^{(\lambda+\tau)t},\quad z(t)=Z(t)/e^{(\lambda+\tau)t},\quad k(t)=K(t)/e^{(\lambda+\tau)t}$$

である．また，$k_{\hat{t}}$ は終端時刻 $\hat{t}$ に対する最小目標資本効率労働力比率であり，それは初期時刻 0 において外生的に付与されている非負値である．最後に，κ は資本減耗率（仮定 1.9）である．[1)]

1) 以下においては，変数 t は適宜省略される．また，仮定 1.1—1.6，1.9 及び 2.2 については福尾〔4〕及び〔5〕を参照されたい．

定義 3.4 （異質消費財の下における）$\hat{t}$-最適経路

仮定 1.1—1.6，1.9，2.2，3.1，3.2 及び 3.3の下で，$\hat{t}$-社会厚生汎関数

$$(3.9)\qquad W(\hat{t})=\int_0^{\hat{t}} u(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})e^{-\delta t}dt$$

を最大化するという意味で最適な $\hat{t}$-実行可能経路を $\hat{t}$-最適経路又は $\hat{t}$-最適計画と呼ぶことにする．

定義 3.2，3.3 及び 3.4 の中には，有限時間視野分析に特有の 2 つの障害，すなわち，時間視野選定の問題と終端制約条件選定の問題が内包されていることに注目しておく必要がある．しかし，有限時間視野分析は，その本性として，終端時刻以後の経済状態を暗に全く対象外に置くという危険を犯すことになるという点に十分留意しておくならば，時間視野選定の問題は特に重大な障害とは言えない，と思われる．なぜなら，1つの最適経済成長計画が終了すれば即時的に次の最適経済成長計画が採用されるような経済，すなわち，計画そのものは永続されるような経済にあっては，各計画がどのような時間視野を持つにしても，積分区間を除けば同一の社会厚生汎関数が仮定される限り，結局のところ無限時間視野が採用されていることと類似しているからである．

それに対して，終端制約条件 (3.8) の選定の問題は，有限時間視野分析にとって本質的かつ致命的障害であるように思われる．仮にある有限時間視野が選定されたとしよう．無限時間視野分析においては，終端資本効率労働力比率に対する制約条件としては，経済学的観点に基づく非負条件が課せられるだけであるのに対して，有限時間視野分析においては，そのような制約条件つまり 0 の最小目標終端資本効率労働力比率を設定することについて，多くの人々は納得しないであろう．なぜなら，第 1 に，資本財の投入がなければ産出物を得ることができないような技術状態の下では，有限時間視野のうちに資本財ストックを消耗し尽くすという事例を許容することは，当該時間視野以後においては全く生産が行われないような事例，すなわち，経済そのものが存続し得ないような事例をも許容することになるが，これは経済学的には無意味である．第 2

に，仮に資本財の投入がなくても生産可能であるような技術状態であったとしても，最小目標資本効率労働力比率が0又は特定の正値を取るべき経済学的に妥当な理由は何もない．すなわち，終端制約条件を選定するための合理的基準は何もないのである．

この終端制約条件選定の障害こそ，Solow〔12〕からの引用を通じて最初に提起された，有限時間視野分析の落とし穴にほかならない．そこで指摘したように，この障害は結局のところ有限時間視野分析を放棄させるに十分なほどに重大なものである，と我々は考えている．しかし，ここでは，議論を先へと進ませるために，この点には十分に留意していることを注記するにとどめておく．

今，何らかの方法に基づいて，有限時間視野 $[0,\ \hat{t}]$ と最小目標終端値 $k_{\hat{t}}$ が外生的に付与されていると考えよう．このとき，定義3.4が意味を持つためには，$\hat{t}$-実行可能経路が少くとも1つ存在し得るように組 $(\hat{t},\ k_{\hat{t}})$ が選ばれている必要がある．したがって，本稿の以下においては，必要に応じて次のことを仮定する．

仮定 3.4 k° 及び関数 $\tilde{t}(\hat{t},\ k_{\hat{t}})$ を

(3.10) $$y(k^{\circ})=(\kappa+\lambda+\tau)k^{\circ},$$ [1]

(3.11) $$\begin{cases} k_0 \leqq k_{\hat{t}} \Rightarrow \tilde{t}(\hat{t},\ k_{\hat{t}})=\hat{t}-\displaystyle\int_{k_0}^{k_{\hat{t}}}[y(k)-(\kappa+\lambda+\tau)k]^{-1}dk, \\ k_0 > k_{\hat{t}} \Rightarrow \tilde{t}(\hat{t},\ k_{\hat{t}})=\displaystyle\int_{k_0}^{\max(k_{\hat{t}},\ k_0)}[y(k)-(\kappa+\lambda+\tau)k]^{-1}dk \end{cases}$$

とするとき，関係

(3.12) $$0 \leqq k_{\hat{t}} \leqq \max(k_0,\ k),\ 0 \leqq \tilde{t}(\hat{t},\ k_{\hat{t}})$$

が成立する．

(3.10) は，効率労働力生産性が資本減耗率と自然成長率によって生ずる資

1) 仮定 1.1—1.6，1.9，2.2，3.1，3.2 及び 3.3 の限りでは，k° の存在は必ずしも保証されない．

本効率労働力比率の減少率にちょうど等しくなるような，したがって，総生産がすべて資本形成に充てられるとき，そしてそのときのみ，時間変化率が0となるような，資本効率労働力比率の数値を定義している．(3.11) の最初の式は，最小目標終端値が初期値を下回らない場合における，終端時刻 $\hat{t}$ と，(3.7) 及び (1.33) を満たしながら初期値から最小目標終端値に至るに要する最小時間との差を定義し，後の式は，最小目標終端値が初期値を上回る場合における，初期値から最小目標終端値又は (3.10) によって定義される資本効率労働力比率のいずれか大きい数値に (3.7) 及び (1.33) を満たしつつ到達するに要する最大時間と終端時刻との差を定義している．当然のことであるが，(3.11) は両消費財の0の消費に対して定義されている．また，(3.12) の最初の式は，最小目標終端値が初期値から出発して無限時間視野のうちに到達可能又は収束可能な最大の資本効率労働力比率を上回ってはならないことを意味している．一方，後の式は，(3.11) で定義された終端時刻と最小時間との差，あるいは，最大時間と終端時間との差が非負であるべきことを意味している．$k_{\hat{t}} \leqq k_0 \leqq k^{\circ}$ の場合には，任意の終端時刻 $\hat{t}$ に対して，$\hat{t}$-実行可能経路は常に存在する．

$\hat{t}$-最適経済成長モデルは，$\hat{t}$-実行可能経路の存在条件が成立している下における，$\hat{t}$-最適経路存在の検討という問題として定式化される．

§3　$\hat{t}$-最適経路の特性——必要条件と十分条件——

次の基本定理は証明なしに利用される．

基本定理　$k(t)$ を基本変数，$z(t)$ 及び $c_{\text{II}}(t)$ を操作(＝制御)変数，$\phi(t)e^{-\delta t}$ を補助変数とすると，(3.9) の被積分関数に基づいて，Hamiltonian が

(3.13)　$$H=H(t,\ k,\ \phi,\ z,\ c_{\text{II}})=[u(c_{\text{I}},\ c_{\text{II}})+\phi\dot{k}]e^{-\delta t}$$

によって定義される．このとき，$\hat{t}$-最適経路上では，変数の組 $(t,\ k,\ \phi,\ z,\ c_{\text{II}})$ に対して，次の条件 (A) (B) (C) が成立している．

(A)　$\hat{t}$-最適経路に対応する，操作変数を z と c_{II}，基本変数を k とするとき，

$$\tilde{z} \geqq 0, \quad \tilde{c}_{\mathrm{II}} \geqq 0, \quad \tilde{z}+\tilde{c}_{\mathrm{II}} \leqq y(k)$$

を満たす任意の組 $(\tilde{z}, \tilde{c}_{\mathrm{II}})$ に対して

(A)　$[\forall t \in [0, \hat{t})] : H(\cdot, z, c_{\mathrm{II}}) \geqq H(\cdot, \tilde{z}, \tilde{c}_{\mathrm{II}})$,

(B)　$[\forall t \in (0, \hat{t})] : \partial H/\partial k \equiv H_k = -\dfrac{d}{dt}(\phi e^{-\delta t})$,

(C)　$\phi(\hat{t})[k(\hat{t})-k_{\hat{t}}]=0.$ 1)

(A) 及び (B) の意味については既に拙稿〔5〕で与えられているので，ここでは (C) の意味を考えてみよう．まず，ϕ を厚生指標測定の尺度で表示した投資財の帰属単位価格ないしは需要単位価格と解釈する．そうすると，(C) は，$\hat{t}$-最適経路上では，終端資本労働力比率がその最小目標値を上回る，すなわち，終端時刻において（ある意味で）資本過剰となるならば，終端帰属単位価格は 0 となり，一方，終端帰属単位価格が 0 でないならば，終端資本効率労働力比率とその最小目標値とは等しくなる．すなわち，終端時刻における資本財ストックには（ある意味で）過不足がない，という意味である．

次の定理は基本定理から直接導かれる．

定理 3.1　$\hat{t}$-最適経路上では，時間視野 $[0, \hat{t})$ を通じて関係 (3.14) 及び (3.15) が成立し，また，終端時刻 $\hat{t}$ に関して関係 (3.16) が成立する．

$$(3.14)\quad \begin{cases} \text{所与の変数の組 } (t,\ k,\ \phi) \text{ に対して,} \\ (1)\quad \begin{cases} \phi = u_1(\cdot) \Rightarrow 0 \leqq z < y, \\ 0 < z < y \Rightarrow \phi = u_1(\cdot), \end{cases} \\ (2)\quad \begin{cases} \phi < u_1(\cdot) \Rightarrow z = 0, \\ z = 0 \Rightarrow \phi \leqq u_1(\cdot), \end{cases} \\ (3)\quad u_1(\cdot) = u_2(\cdot), \end{cases}$$

1)　最適終端値 $k(\hat{t})$ は $[k_{\hat{t}}, \infty)$ 上を自由に動き得るのであるが，特に $k(\hat{t})>k_{\hat{t}}$ の場合には，自由終端点の事例と全く同様に処理することができるので，$\phi(\hat{t})e^{-\delta \hat{t}}=0$ となる．一方，$k(\hat{t})=k_{\hat{t}}$ の場合には，固定終端点の事例と考えて，終端補助変数については無条件となる．これらの点を考慮すると，結局，(C) のように書かれる．

(3.15)　$\dot{\phi}=-u_1(\cdot)y'(k)+\xi\phi$，ただし，$\xi\equiv\kappa+\lambda+\tau+\delta>0$,

(3.16)　$\phi(\hat{t})[k(\hat{t})-k_{\hat{t}}]=0.$

証明　(3.16) は基本定理の (C) そのものである．(3.7) 及び (1.33) により，Hamiltonian (3.13) は

$$H=[u[\{y(k)-z-c_{\mathrm{II}}\},\ c_{\mathrm{II}}]+\{z-(k+\lambda+\tau)k\}\phi]e^{-\delta t}$$

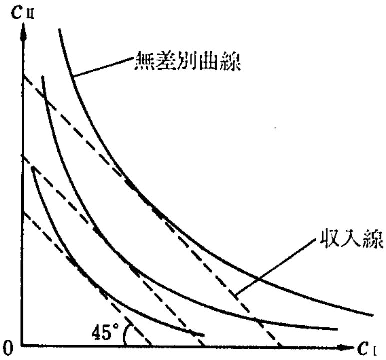
となる．それゆえ，条件 (B) により，直ちに (3.15) が得られる．さて，もしある $t^{\circ}\in[0,\hat{t})$ に対して $z=y$ となったとすれば，そのときには $c_{\mathrm{I}}=c_{\mathrm{II}}=0$ となるが，(3.3) を考慮すると，このような t° が存在する場合については $\hat{t}$-最適経路を特定することはできないことが分かる．また，もしある $t^{\circ\circ}\in[0,\hat{t})$ に対して $c_{\mathrm{II}}=0$，又は，$c_{\mathrm{II}}=y-z$ すなわち $c_{\mathrm{I}}=0$ となったとすれば，たとえ $0\leqq z<y$ であっても，(3.3) 及び (3.15) により，やはりいかなる特定の $\hat{t}$-最適経路をも見いだすことができない．したがって，これらの事から，条件 (A) は (3.14) と書かれる.[1]　　(証了)

(3.14.3) は，$\hat{t}$-最適経路上では，両消費財の限界一時的社会厚生は均等であることを意味している．一方，(3.14.1) と (3.14.2) とは，$\hat{t}$-最適経路上では，(a) 限界一時的社会厚生は帰属単位価格を下回ることはないこと，(b) もし両者が均等ならば，総投資は総生産を下回る非負値を取り，また，もし総投資が総生産を下回る正値を取れば，限界一時的社会厚生と帰属単位価格は等しいこ

1)　(3.14.3) は通常の消費者選択の理論にほかならない．すなわち，$y-z$（＝平均的消費主体が自由に処分することのできる収入）を所与とすると，(3.7) により，

$$u(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})=u(y\text{-}z\text{-}c_{\mathrm{II}},\ c_{\mathrm{II}})$$

であるから，平均的消費主体の一時的効用（＝一時的社会厚生）最大化の1次条件を求めると，結局，(3.14.3) になる（第a図参照）．



第 a 図

と,(c)もし前者が後者を上回るならば,総投資は0であること,を意味している.

ところで,定理3.1によれば,$\hat{t}$-最適経路上では(3.14)が成立しなければならない.そこで,次に検討すべきは,所与の組(t, k, ϕ)に対して,(3.14)が成立すべく操作変数 z と c_{II} を適切に選ぶことが可能か否かという点である.もしこれが可能であることを明示し得ないならば,$\hat{t}$-最適経路の存在を積極的に主張することができないのであるから,この点の解明は重要である.

まず,仮定3.1,(3.3)(3.7)及び(3.14.3)により,(平均的消費主体の)消費均衡状態においては,

(3.17) $$\begin{cases} dc_{\mathrm{I}}/d(y-z)=(u_{22}-u_{12})/B>0, \\ dc_{\mathrm{II}}/d(y-z)=(u_{11}-u_{12})/B>0, \end{cases}$$

ただし,

(3.18) $$\begin{cases} u_{11}(\cdot)+u_{22}(\cdot)-2u_{12}(\cdot)\equiv B<0, \\ u_{11}(\cdot)-u_{12}(\cdot)<0, \quad u_{22}(\cdot)-u_{12}(\cdot)<0 \end{cases}$$

が成立することに注目しておく.次に,関係

(3.19) $$\phi=u_1(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})=u_2(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})$$

の下では,(3.3)及び(3.18)により,

(3.20) $$dc_{\mathrm{I}}/d\phi=(u_{22}-u_{12})/A<0, \quad dc_{\mathrm{II}}/d\phi=(u_{11}-u_{12})/A<0$$

が成立するので,所与の ϕ に対して,$c_{\mathrm{I}}(>0)$ と c_{II} (>0) は一意的に確定する.このとき,所与の k に対して $c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}}\leqq y(k)$ ならば,(3.7)と両立する $z(\geqq 0)$ も一意的に確定する.ところが,関係(3.19)及び(3.20)は(3.7)とは独立に考察し得る関係であるから,所与の組(t, k, ϕ)に対して,(3.19)を満たす c_{I} と c_{II} が(3.7)と両立するという保証はない.特に,所与の ϕ が所与の k に対して過小であると,(3.19)と(3.7)を両立させる c_{I} と c_{II} を選ぶことができず,(3.19)を満たす c_{I} と c_{II} については $c_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{II}}>y(k)$ となってしまうであろう.このような場合には,c_{I}, c_{II} 及び z は $z=0$ かつ $\phi<u_1=u_2$ となるように選ばれることになる.ただし,(3.3)のゆえに,$u_1=u_2$ を満たすどのような組($c_{\mathrm{I}}, c_{\mathrm{II}}$)に対しても $\phi>u_1$ となるほどに所与の ϕ が過大である

という事例は排除されている．かくて，所与の組 $(t,\ k,\ \phi)$ に対して，(3.14) が成立するように操作変数 z と c_{II} を適当に選定することができることが明らかになった．

次の定理は $\hat{t}$-最適経路のための十分条件を与えている．

定理 3.2 仮定 1.1—1.6，1.9，2.2，3.1 及び 3.3の下では，$\hat{t}$-最適性の必要条件 (3.14) (3.15) (3.16) 及び $\phi(\hat{t})\geqq 0$ を満たす $\hat{t}$-実行可能経路は $\hat{t}$-最適経路となる．[1]

証明 定理の仮定を満たす経路を

$$F=(y,\ c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}},\ z,\ k,\ \phi\ ;\hat{t})$$

と表し，また，ある $t^{\circ}\in(0,\ \hat{t})$ に対して $I(t^{\circ})$ を t° のある開区間とすれば，$t\in I(t^{\circ})$ に対して $k\neq\tilde{k}$ という意味において F と異なる任意の $\hat{t}$-実行可能経路を

$$\tilde{F}=(\tilde{y},\ \tilde{c}_{\mathrm{I}},\ \tilde{c}_{\mathrm{II}},\ \tilde{z},\ \tilde{k}\ ;\hat{t})$$

と表す．更に，

$$u(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})=u,\qquad u(\tilde{c}_{\mathrm{I}},\ \tilde{c}_{\mathrm{II}})=\tilde{u},\qquad y-\tilde{y}=\underline{y},$$
$$c_{\mathrm{I}}-\tilde{c}_{\mathrm{I}}=\underline{c}_{\mathrm{I}},\qquad c_{\mathrm{II}}-\tilde{c}_{\mathrm{II}}=\underline{c}_{\mathrm{II}},\qquad z-\tilde{z}=\underline{z},\qquad k-\tilde{k}=\underline{k}$$

と置く．$\tilde{u}$ を $(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{I}})$ の回りで展開すると，

$$\begin{cases}\tilde{u}=u-(u_1,\ u_2)(\underline{c}_{\mathrm{I}},\ \underline{c}_{\mathrm{II}})'+\dfrac{1}{2}(\underline{c}_{\mathrm{I}},\ \underline{c}_{\mathrm{II}})U[\Delta](\underline{c}_{\mathrm{I}},\ \underline{c}_{\mathrm{II}})'^{\,[2]}\\ \text{ただし,}\qquad U[\Delta]\equiv\begin{pmatrix}u_{11}(\Delta), & u_{12}(\Delta)\\ u_{21}(\Delta), & u_{22}(\Delta)\end{pmatrix}\\ \qquad\qquad \Delta\equiv(c_{\mathrm{I}}-\alpha\underline{c}_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}-\alpha\underline{c}_{\mathrm{II}}),\qquad 0<\alpha<1\end{cases}$$

となるが，(3.3) により，u は強い意味の凹関数，すなわち，Hesse 行列 U

---

1) (3.14) 及び (3.15) の下では，$\phi(\hat{t})\geqq 0$ はすべての $t\in[0,\ t)$ に対して $\phi>0$ を意味する．なぜなら，ある $\hat{t}^{\circ}\in[0,\ t)$ に対して $\phi\leqq 0$ となると，(3.3) (3.14) 及び (3.15) により，すべての $\hat{t}\in[t^{\circ},\ t]$ に対して $\phi<0$ である．

2) $(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})'$ は列ベクトルを意味している．

は負定値であるから，$c_{\mathrm{I}}=\tilde{c}_{\mathrm{I}}$ かつ $c_{\mathrm{II}}=\tilde{c}_{\mathrm{II}}$ という事例をも含めると，右辺第3項は非正である.[1] ゆえに，$(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}},\ k)\neq(\tilde{c}_{\mathrm{I}},\ \tilde{c}_{\mathrm{II}},\ \tilde{k})$ ならば，

$$
\begin{aligned}
u-\tilde{u} &\underset{(=)}{>} \underline{c}_{\mathrm{I}}u_1+\underline{c}_{\mathrm{II}}u_2 \\
&=(\underline{y}-\underline{z})u_1 && (3.8)\ (3.15) \\
&\underset{(=)}{>} ky'u_1-\underline{z}u_1 && (1.21) \\
&=-[(\dot{\phi}-\delta\phi)\underline{k}-(\underline{z}-\dot{\underline{k}})\phi+\underline{z}u_1] && (1.33)\ (3.15) \\
&\geqq-[(\dot{\phi}-\delta\phi)\underline{k}+\dot{\underline{k}}\phi] && (3.14)
\end{aligned}
$$

となり，$\tilde{F}$ の定め方を考慮すると，結局，次の結果が得られる.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\hat{t}}(u-\tilde{u})e^{-\delta t}dt &> -\int_0^{\hat{t}}[(\dot{\phi}-\delta\phi)\underline{k}+\dot{\underline{k}}\phi]e^{-\delta t}dt \\
&=-[\underline{k}\phi e^{-\delta t}]_0^{\hat{t}} \\
&=[\tilde{k}(\hat{t})-k(\hat{t})]\phi(\hat{t})e^{-\delta\hat{t}} \\
&\geqq 0 \qquad (3.8).
\end{aligned}
$$

（証了）

§4 $\hat{t}$-最適経路の存在と一意性

定義 3.5 （異質消費財の下における）定常経路

資本効率効労力比率 k（＝基本変数）及び帰属単位価格 ϕ（＝補助変数）の時間変化率が時間視野 $(0,\ \hat{t})$ を通じて0，すなわち，$\dot{k}=0$ かつ $\dot{\phi}=0$ の状態で (3.7) (1.33) (3.14) 及び (3.15) を満たすような特異経路が存在するとき，それを定常経路または均斉経路と呼び，

$$P^*=(y^*,\ c_{\mathrm{I}}^*,\ c_{\mathrm{II}}^*,\ z^*,\ k^*,\ \phi^*)$$

によって表すことにする.

補助定理 3.1 仮定 1.1—1.6, 1.9, 2.2, 3.1, 3.2 及び 3.3の下では，定常経路 P^* が一意的に存在する.

証明 (1.33) により，$\dot{k}=0$ かつ $k=0$ ならば $z=0$ となるが，このときに

1) 福尾〔4〕pp. 88-9 の脚注を参照されたい.

は，(2.14) (3.14) 及び (3.15) により，$\dot{\phi}<0$ となる．したがって，定常経路が存在するならば，$k^*>0$ である．そこで今，関係 (3.14.3) 及び (3.17) を保つ $y-z$ によって定義される関数を ${}_1c_{\mathrm{I}}$ 及び ${}_1c_{\mathrm{II}}$ と置き，更に，

$$(3.21)\quad \begin{cases} y'(k^*)=\xi, \\ y^*=y(k^*)>0, \\ z^*=(\kappa+\lambda+\tau)k^*>0, \\ c_{\mathrm{I}}{}^*={}_1c_{\mathrm{I}}(y^*-z^*)>0, \\ c_{\mathrm{II}}{}^*={}_1c_{\mathrm{II}}(y^*-z^*)>0, \\ \phi=u_1(c_{\mathrm{I}}{}^*,\ c_{\mathrm{II}}{}^*)=u_2(c_{\mathrm{I}}{}^*,\ c_{\mathrm{II}}{}^*)>0 \end{cases}$$

によって組 $(y^*,\ c_{\mathrm{I}}{}^*,\ c_{\mathrm{II}}{}^*,\ z^*,\ k^*,\ \phi^*)$ を定義すると，この経路は確かに定常経路である．しかも，(1.21) 及び (2.14) により，k^* は一意的に確定するので，この経路は一意的である．　　　　　　　　　　　　(証了)

補助定理 3.2 仮定 1.1—1.6，1.9，2.2，3.1 及び 3.3 の下では，(3.7) 及び (3.14) を満たす連立微分方程式系

$$(3.22)\quad \begin{cases} \dot{k}=z-(\kappa+\lambda+\tau)k, \\ \dot{\phi}=-u_1(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})y'(k)+\xi\phi \end{cases}$$

の特異点 $(k^*,\ \phi^*)$ はとうげ点となる．

証明 $(k^*,\ \phi^*)$ に対しては $0<z^*<y^*$ であるから，$(k^*,\ \phi^*)$ のごく近傍，すなわち，$0<z<y$ となる領域においては，関係 (3.19) 及び (3.20) を保つ ϕ によって定義される関数を ${}_2c_{\mathrm{I}}$ 及び ${}_2c_{\mathrm{II}}$ と置くと，(3.7) 及び (3.14) により，(3.22) は

$$(3.23)\quad \begin{cases} \dot{k}=y(k)-{}_2c_{\mathrm{I}}(\phi)-{}_2c_{\mathrm{II}}(\phi)-(\kappa+\lambda+\tau)k, \\ \dot{\phi}=-[y'(k)-\xi]\phi \end{cases}$$

となっている．これを $(k^*,\ \phi^*)$ の回りで展開し 2 次以後の項を無視すると，$(k^*,\ \phi^*)$ の近傍における線形微分方程式系が得られる．このとき，固有根は

$$\frac{1}{2}[\delta\pm\sqrt{\delta^2+4y''(k^*)\phi^*B^*/A^*}]$$

によって与えられるが，これは，1根は正，1根は負であるから，$(k^*,\ \phi^*)$ はとうげ点となる.[1]　　　　（証了）

補助定理 3.2 の内容を今度は図式を用いて説明してみよう.

$\breve{k}$ を最適黄金時代に対応する資本効率労働力比率，すなわち，

$$y'(\breve{k})=\kappa+\lambda+\tau \tag{3.24}$$

とすると，(3.7) (1.33) (3.14) 及び $\dot{k}\equiv 0$ を満たす k によって定義される関数 $\phi|_{\dot{k}\equiv 0}$ については，(3.20) (1.21) (3.3) 及び (3.18) により，$k>0$ に対して，

$$\begin{cases}\phi'|_{\dot{k}\equiv 0}=[y'(k)-(\kappa+\lambda+\tau)]A/B \\ \mathrm{sgn}\,\phi'|_{\dot{k}\equiv 0}=-\mathrm{sgn}\,(k-\breve{k}),\ \ \phi'(\breve{k})|_{\dot{k}\equiv 0}=0\end{cases} \tag{3.25}$$

が成立する．なお，k° の定義式 (3.10) 及び (3.3) を考慮すると，$k\geqq k^\circ$ に対しては $\phi|_{\dot{k}\equiv 0}$ を定義することはできない.

(3.7) (3.14) (3.15) 及び $\dot{\phi}\equiv 0$ を満たす k によって定義される関数 $\phi|_{\dot{\phi}\equiv 0}$ については，(1.21) (3.3) 及び (3.18) により，

$$\begin{cases}\dot{\phi}\equiv 0\ \ \&\ \ 0<z<y\Rightarrow k=k^*, \\ z=0\Rightarrow\begin{cases}\phi|_{\dot{\phi}\equiv 0}=u_1y'/\xi\lesseqq u_1\ \text{as}\ k\geqq k^*, \\ \phi|_{\dot{\phi}\equiv 0}=(y'^2A+y''u_1B)/\xi B<0\end{cases}\end{cases} \tag{3.26}$$

が成立する．なお，(3.26) を見ると，$z=0$ かつ $k<k^*$ に対しては $\phi_{\dot{\phi}\equiv 0}>u_1$ となって，(3.14) と両立しないように思れる．しかし，(3.7) 及び (3.19) の下では，(3.3) 及び (3.18) により，

$$\partial u_1/\partial z=\partial u_2/\partial z=-A/B>0 \tag{3.27}$$

であることを考えると，実は，$k<k^*$ に対しは $z>0$ かつ $\phi|_{\dot{\phi}\equiv 0}=u_1$ となっており，結局，関数 $\phi|_{\dot{\phi}\equiv 0}$ は $k=k^*$ に帰着することが分かる．かくて，(3.26) と (3.14) は何ら矛盾しない.

(3.7) (3.19) 及び $z\equiv 0$ を満たす k によって定義される関数 $\phi|_{z\equiv 0}$ につい

1) A^* 及び B^* はそれぞれ $(k^*,\ \phi^*)$ のときの A 及び B の数値である.

ては，(1.21) (3.3) 及び (3.18) により，$k>0$ に対して

$$(3.28)\qquad \phi'|_{z\equiv 0}=y'B/A<0$$

が成立し，また，(3.26) 及び (3.27) により，

$$(3.29)\qquad \begin{cases} (1)\quad 0<k<k^{\circ} \Rightarrow \phi|_{z\equiv 0}<\phi|_{\dot{k}\equiv 0}, \\ (2)\quad z=0 \Rightarrow \phi|_{z\equiv 0}\geqq \phi|_{\dot{\varphi}\equiv 0} \text{ as } k\geqq k^{*} \end{cases}$$

が成立している.[1]

ここで，(3.7) (1.33) 及び (3.14) を満たす $\dot{k}$ については (3.20) (3.3) 及び (3.18) により，(3.7) (3.14) 及び (3.15) を満たす $\dot{\phi}$ については (3.3) (1.21) 及び (3.18) により，

$$(3.30)\qquad \begin{cases} (1) & \begin{cases} 0<z<y \Rightarrow \partial\dot{k}/\partial\phi=-B/A>0, \\ z=0 \qquad\ \Rightarrow \partial\dot{k}/\partial\phi=0, \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} 0<z<y \Rightarrow \partial\dot{\phi}/\partial k=-y''\phi>0, \\ z=0 \qquad\ \Rightarrow \partial\dot{\phi}/\partial k=-(y'^{2}A+y''u_{1}B)/B>0 \end{cases} \end{cases}$$

が成立することに注目すると，第3.1図が得られる. (3.10) (3.24) (3.6) 及び (1.21) により，$k^{*}\leqq\breve{k}$ であることと，(3.10) (3.24) 及び (1.21) により，

$$y(k^{\circ})-k^{\circ}y'(k^{\circ})=[y'(\breve{k})-y'(k^{\circ})]k^{\circ}>0$$

であるから，再び (1.21) により，$\breve{k}<k^{\circ}$ であることを考えると，第3.1図に見られるように，

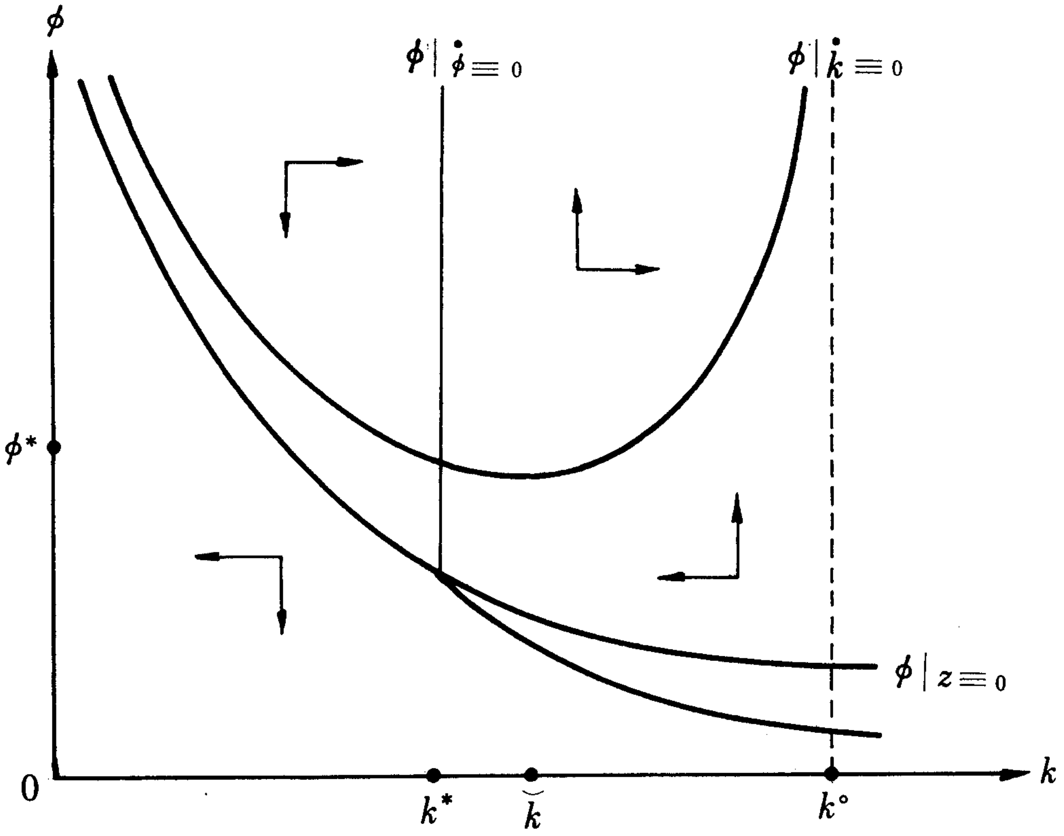
$$k^{*}\leqq\breve{k}<k^{\circ}$$

という関係が成立している.[2]

1) 本稿の仮定の範囲では，$k=0$ のときの $\phi|_{\dot{k}\equiv 0}$ 及び $\phi|_{z\equiv 0}$ の数値については確定的なことを言うことはできない，しかし，この点は議論の帰結に何ら重要な影響を及ぼさない.

2) (3.14) (3.20) 及び (3.3) により，$0<z<y$ の領域においては，

$$\begin{cases} \dot{c}_{\mathrm{I}}=(u_{22}-u_{12})\dot{\phi}/A, & \operatorname{sgn}\dot{c}_{\mathrm{I}}=-\operatorname{sgn}\dot{\phi}, \\ \dot{c}_{\mathrm{II}}=(u_{11}-u_{12})\dot{\phi}/A, & \operatorname{sgn}\dot{c}_{\mathrm{II}}=-\operatorname{sgn}\dot{\phi}, \\ \dot{z}=y'\dot{k}-B\dot{\phi}/A \end{cases}$$



第 3.1 図

さて，補助定理 3.1 とその図式による説明により，特異点（k^*，ϕ^*）とその近傍の性質が明らかになったのであるが，ここで我々は次の定理※を証明なしに利用する．

定理※　$t\to\infty$ に対して，（k^*，ϕ^*）に収束する方程式系 (3.23) の2つの解経路 S^+ が存在し，これに（k^*，ϕ^*）を付け加えると微分可能な連続曲線が得られる．また，$t\to-\infty$ に対して，（k^*，ϕ^*）に収束する (3.23) の2つの解

が成立し，また．(3.14) (3.18) (1.33) (1.21) 及び (3.3) により，$z=0$ 及び $k>0$ が持続する場合には，

$$\dot{c}_{\mathrm{I}}=(u_{22}-u_{12})y'\dot{k}/B<0,\quad \dot{c}_{\mathrm{II}}=(u_{11}-u_{12})y'\dot{k}/B<0$$

が成立している．したがって，$\dot{k}$ 及び $\dot{\phi}$ の符号が確定すれば，$\dot{c}_{\mathrm{I}}$ 及び $\dot{c}$ の符号は確定する．しかし，$\dot{z}$ の符号については，$\dot{k}$ と $\dot{\phi}$ が異符号の場合には一意的には確定しない．

経路 S^- が存在し，これに (k^*, ϕ^*) を付け加えるとやはり微分可能な連続曲線が得られる．

この定理を参考にすることによって，次の定理が得られる．

定理 3.3 仮定 1.1—1.6，1.9，2.2 及び 3.1—3.4 の下では，$\hat{t}$-最適経路が一意的に存在する．しかも，$\hat{t}$-最適経路上では，

$$(3.31)\quad \begin{cases} [\forall t \in [0, \hat{t})] : \phi(t) > 0, \\ \phi(\hat{t}) \geqq 0 \end{cases}$$

となっている．

証明 (k, ϕ) 平面上の図式（第3.2.①—第3.2.⑥）を利用しながら証明する．

段階 1 生じ得る6つの事例

① $0 < k_0 \leqq k_{\hat{t}} \leqq k^*$,

② $0 < k_0 \leqq k^* \leqq k_{\hat{t}} < k^\circ$,

③ $0 \leqq k_{\hat{t}} \leqq k_0 \leqq k^*$, $\quad (k_0 > 0)$,

④ $0 \leqq k_{\hat{t}} \leqq k^* \leqq k_0$, $\quad (k^* > 0)$,

⑤ $0 < k^* \leqq k_0 \leqq k_{\hat{t}} < k_0$,

⑥ $0 < k^* \leqq k_{\hat{t}} \leqq k_0$

のそれぞれについて，(3.7) (3.22) (3.14) 及び

$$(3.32)\quad [\exists t \geqq 0] : k(t) \geqq k_{\hat{t}} \geqq 0 \ \ \& \ \ \phi(t)[k(t) - k_{\hat{t}}] = 0$$

を満たす $\hat{t}$-実行可能経路の候補経路 (k, ϕ) の中から，一意的な $\hat{t}$-最適経路を見いだすことにする．そのため，これら候補経路 (k, ϕ) のうち，k_0 から $k(t) = k_{\hat{t}}$ となるまで，あるいは，$\phi(t) = 0$ となるまでに，$\dot{k}$ の符号が変化しない経路を (k^0, ϕ^0) 経路，$\dot{k}$ の符号が変化する経路を (k^1, ϕ^1) 経路とする．更に，これら候補経路 (k, ϕ) が，ある時刻 t に対して，$k(t) = k_{\hat{t}}$ かつ $\phi(t) \geqq 0$ で (3.32) を満たす場合には $k(t) = k_{\hat{t}}$ となる時刻 $\bar{t}$ を考え，$k(t) > k_{\hat{t}}$ かつ $\phi(t) = 0$ で (3.32) を満たす場合には $\phi(t) = 0$ となる時刻 $\bar{\bar{t}}$ を考えることにする.[1]

---

1) (3.7) (3.22) (3.15) 及び (3.32) を満たす経路を $(k, \phi) \equiv (k(t; k_0, \phi_0), \phi(t; k_0, \phi_0))$ とすると，$\bar{t}$ 及び $\bar{\bar{t}}$ は次のように定義される．

$$\bar{t} = \bar{t}(k_0, \phi_0, k_{\hat{t}}) \equiv \int_{k_0}^{k_{\hat{t}}} (1/\dot{k}) dk, \quad \bar{\bar{t}} = \bar{\bar{t}}(k_0, \phi_0) \equiv \int_{\phi_0}^{0} (1/\dot{\phi}) d\phi, \quad \text{ただし，} \phi_0 \equiv \phi(0)$$

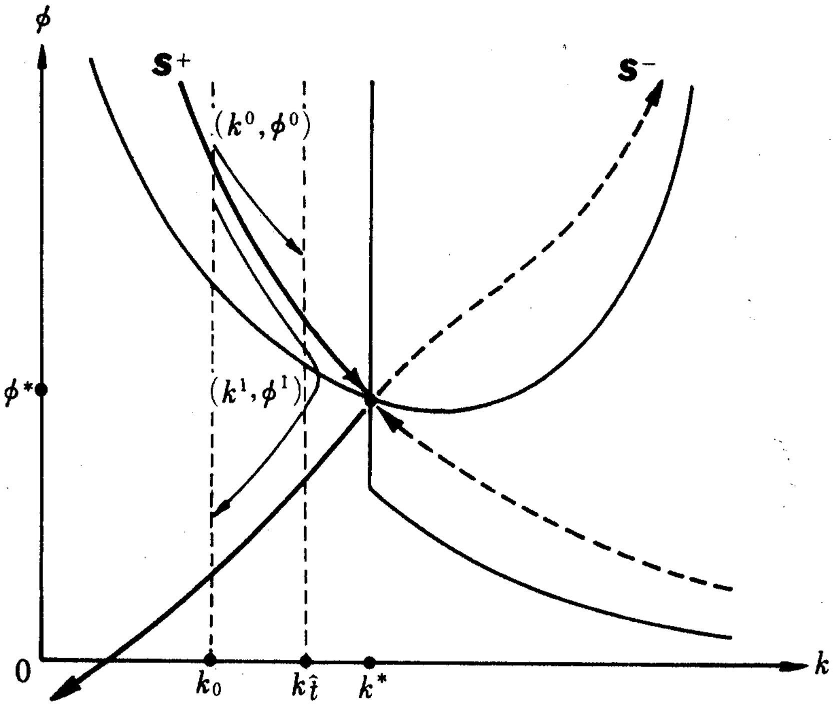
段階 2　候補経路 (k^0, ϕ^0) 上においては，(3.30.1) 及び微分方程式の解の初期値に対する一意性により，事例①②⑤については，$\bar{t}$ は $\phi_0 \equiv \phi(0)$ の減少関数となるから，ϕ_0 が増大 ((減少)) するとともに $\bar{t}$ は減少 ((増大)) し，また，事例③④⑥については，$\bar{t}$ 又は $\bar{\bar{t}}$ は ϕ_0 の増加関数となるから，ϕ_0 が増大 ((減少)) するとともに $\bar{t}$ 又は $\bar{\bar{t}}$ は増大 ((減少)) する．(k^1, ϕ^1) 経路が生じ得るのは事例①③⑤⑥である．この候補経路 (k^1, ϕ^1) 上においては，(3.30.2) 及び微分方程式の解の初期値に対する一意性により，事例①③については，$\bar{t}$ 又は $\bar{\bar{t}}$ は ϕ_0 の増加関数となるから，ϕ_0 が増大 ((減少)) するとともに $\bar{t}$ 又は $\bar{\bar{t}}$ は増大 ((減少)) し，また，事例⑤⑥については，$\bar{t}$ は ϕ_0 の減少関数となるから，ϕ_0 が増大 ((減少)) するとともに $\bar{t}$ は減少 ((増大)) する．しかも，①③⑤⑥のいずれの事例においても，(k^0, ϕ^0) 経路中の最大の $\bar{t}$ 又は t は (k^1, ϕ^1) 経路中の最小の $\bar{t}$ 又は $\bar{\bar{t}}$ よりも小さいことが分かる．

段階 3　ある候補経路 $(\tilde{k}, \tilde{\phi})$ がある時刻 $\overset{\triangle}{t}$ において，$\tilde{k}(\overset{\triangle}{t}) = k_{\hat{t}}$ かつ $\tilde{\phi}(\overset{\triangle}{t}) < 0$ となり得る事例は①③④⑥である．しかし，S^+ 経路は $t \to \infty$ に対して (k^*, ϕ^*) に収束する経路として定義されていることと微分方程式**の解の初**期値に対する一意性とを考慮すると，初期値 ϕ_0 を適当に選ぶことによって，$\overset{\triangle}{k}(\overset{\triangle}{t}) > k_{\hat{t}}$ かつ $\overset{\triangle}{\phi}(\overset{\triangle}{t}) = 0$ となる別の候補経路 $(\overset{\triangle}{k}, \overset{\triangle}{\phi})$ を必ず見いだすことができる．しかも，定理 3.2 によると，この $(\overset{\triangle}{k}, \overset{\triangle}{\phi})$ 経路は $\overset{\triangle}{t}$-最適経路となる．したがって，一般に，終端時刻 $\hat{t}$ に対して $k(\hat{t}) = k_{\hat{t}}$ かつ $\phi(\hat{t}) < 0$ となる候補経路 (k, ϕ) は $\hat{t}$-最適経路ではない．すなわち，$\hat{t}$-最適経路上では，(3.31) が成立しなければならない．

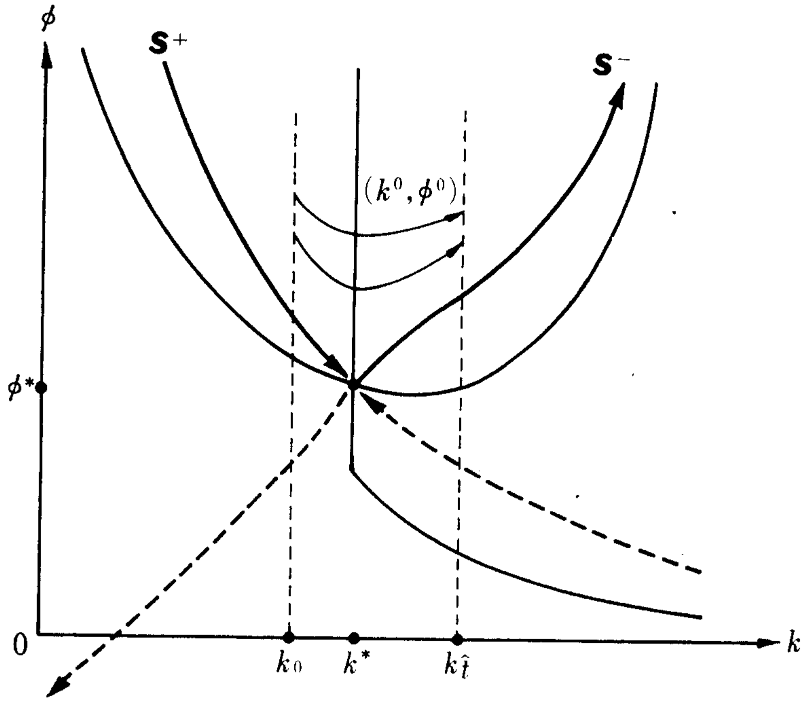
段階 4　微分方程式の解の初期値に対する一意性と上記段階 1，2 及び 3 とにより，仮定 3.4 が成立している限りにおいて，任意の所与の有限時間視野 $[0, \hat{t}]$ に対して，$\hat{t}$-最適経路が一意的に存在し，しかもその経路上では (3.31) が成立している．　(証了)

補足　以上によって証明は完了するが，ここで事例①—⑥の性質を少し整理しておくことにする．

事例	$\dot{k}$ の符号	$\dot{\phi}$ の符号	$\frac{\partial \bar{t}}{\partial \phi_0}$ 又は $\frac{\partial \hat{t}}{\partial \phi_0}$ の符号	$\phi \geqq 0$ の証明	仮定3.4
①	$(k^0, \phi^0) \Rightarrow \oplus$	$\ominus$	$(k^0, \phi^0) \Rightarrow \ominus$ $(k^1, \phi^1) \Rightarrow \oplus$	要	要
②	$\oplus$	$k < k^* \Rightarrow \ominus$ $k > k^* \Rightarrow \oplus$	$\ominus$	不要	要
③	$(k^0, \phi^0) \Rightarrow \ominus$	$\ominus$	$\oplus$	要	不要
④	$\ominus$		$\oplus$	要	不要
⑤	$(k^0, \phi^0) \Rightarrow \oplus$	$\oplus$	$\ominus$	不要	要
⑥	$(k^0, \phi^0) \Rightarrow \ominus$		$(k^0, \phi^0) \Rightarrow \oplus$ $(k^1, \phi^1) \Rightarrow \ominus$	要	不要

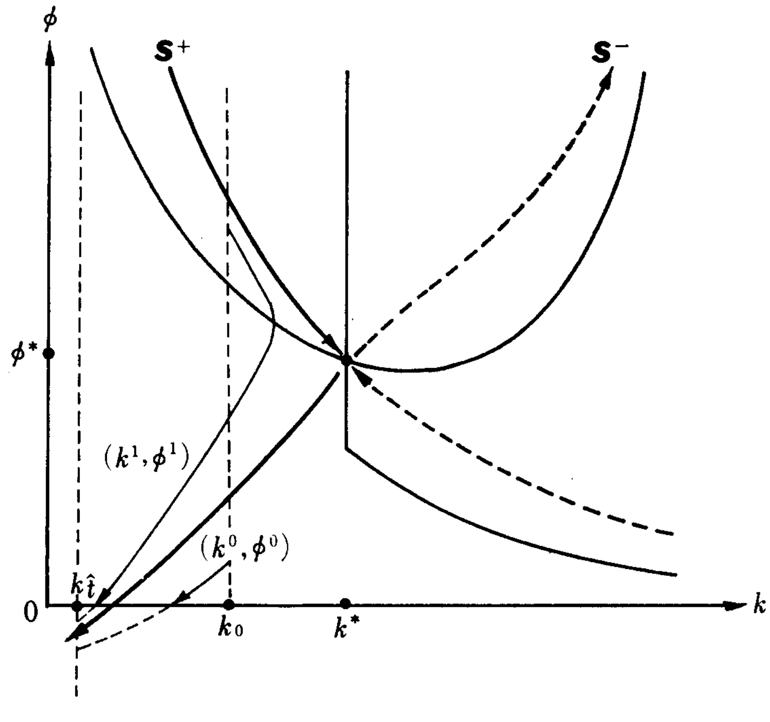


第3.2.①図



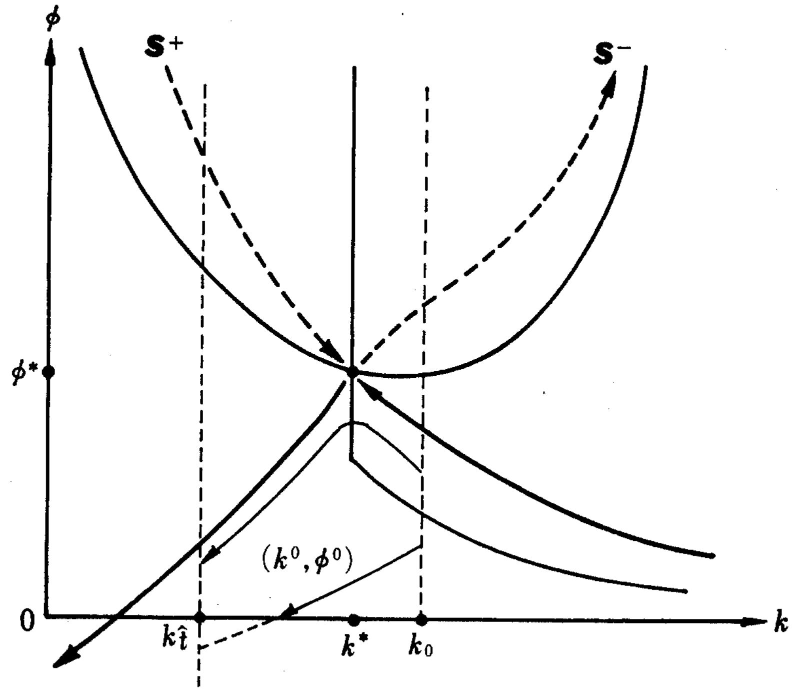
ϕ
S^+
S^-
(k^0, ϕ^0)
ϕ^*
0
k_0
k^*
$k_{\hat{t}}$
k

第 3.2.② 図



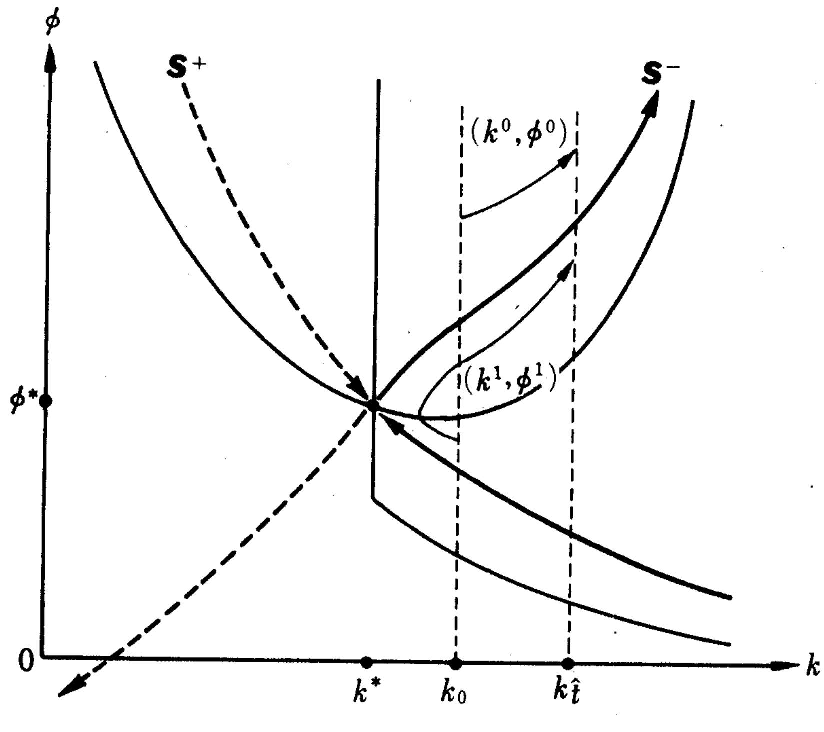
ϕ
S^+
S^-
ϕ^*
(k^1, ϕ^1)
(k^0, ϕ^0)
$k_{\hat{t}}$
0
k_0
k^*
k

第 3.2.③ 図



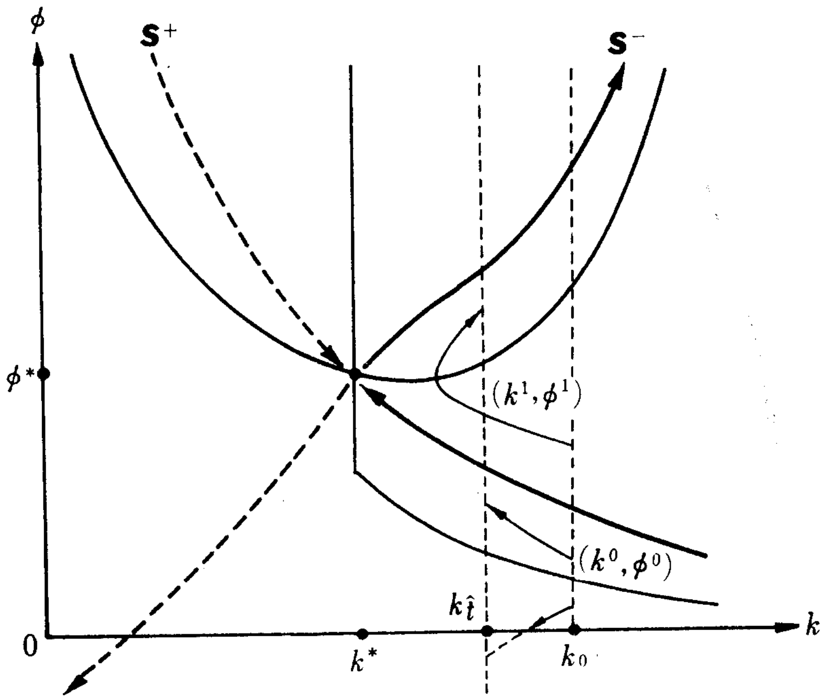
ϕ
S^+
S^-
ϕ^*
(k^0, ϕ^0)
0
$k\hat{t}$
k^*
k_0
k

第 3.2.④ 図



ϕ
S^+
S^-
(k^0, ϕ^0)
(k^1, ϕ^1)
ϕ^*
0
k^*
k_0
$k\hat{t}$
k

第 3.2.⑤ 図



第 3.2.⑥ 図

§5 $\hat{t}$-ローリング計画

これまで展開されてきた有限時間視野分析においては，時間視野は言わば歴史上のある期間に固定されている．例えば，1980年から開始される10か年最適経済成長計画は1989年に終了すべく立案されることになる．計画者又は計画当局が関心を抱く期間には終端時刻が刻まれており，それ以後に発生するであろう諸状況については，終端時刻に残される資本財ストックの評価を別にすれば，彼らは多大の関心を払いはしなかったという結果を呈するであろう．しかし，ここにおいて現実問題との関連で我々にとって興味深い 1 つの事例は，本稿の最初に述べたように，一定の長さの計画時間視野が保持されながら順次繰り延べられていくという事例である．そこで，この§ではこのような事例について少し考察する．

定義 3.5 （異質消費財の下における）$\hat{t}$-ローリング計画

毎時刻連続的に修正されながら，しかも，一定の長さの有限時間視野が将来に

わたって維持される場合の最適経済成長経路，すなわち，計画初期時刻は時と共に連続的に改訂されるが，それと同時に計画終端時刻もまた連続的に改訂される結果，終端時刻と初期時刻との差（＝計画時間視野）は常に一定 $\hat{t}$ に保たれる場合の $\hat{t}$-最適経路を $\hat{t}$-ローリング計画という.[1]

定理 3.4 仮定 1.1—1.6，1.9，2.2 及び 3.1—3.4 の下では，最小目標終端資本効率労働力比率が各計画修正時の資本効率労働力比率と等しいという終端制約条件を持つ $\hat{t}$-ローリング計画は,[2] 時と共に，定常経路に収束する.

証明 便宜上，計画修正時刻を 0，それに対応する終端時刻を $\hat{t}$ とすると，当該 $\hat{t}$-ローリング計画は，各修正時刻において，終端条件（3.8）を

$$(3.8') \qquad k(\hat{t}) \geqq k_{\hat{t}} = k_0$$

に特定した場合の $\hat{t}$-最適経路の初期条件を満たすべきことに注目しておく.次に，任意の所与の有限時間視野 $[0, \hat{t}]$ に対して，定理 3.3 によってその一意的存在が保証された，（3.8′）を終端制約条件とする $\hat{t}$-最適経路の初期帰属単位価格 ϕ_0 を初期資本効率労働力比率によって定まる関数として $\phi_0(k_0)$ で表し，また，定理※の S^+ 経路を $\phi(k)|_{S^+}$ で表す．そうすると，生じ得る3つの事例

① $0 < k_0 = k_{\hat{t}} < k^*$,

② $0 < k_0 = k_{\hat{t}} = k^*$,

③ $0 < k^* < k_0 = k_{\hat{t}} < k^\circ$

1）中山-篠原〔10〕pp. 136-52 によれば，ローリング計画の実際例としては，西ドイツの中期経済計画（1967年から），オランダの中期経済計画（1971年から）などがある．なお，日本経済新聞（1974年 9 月14日）の記事によれば，日本においても，産業構造審議会（通産相の諮問機関）の報告「わが国産業構造の方向」（1974年 9 月13日）の中で，ローリング計画方式の採用が主張されている.

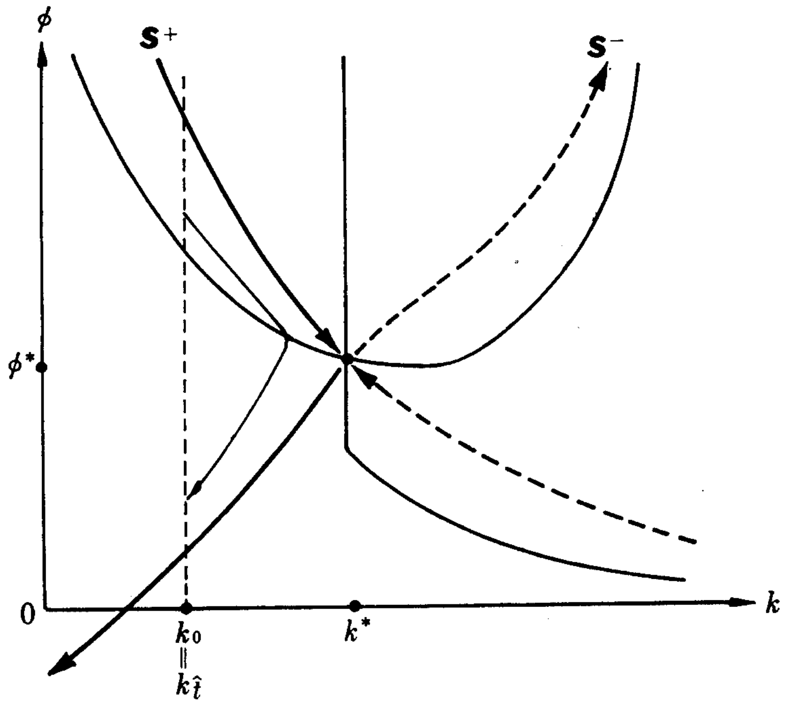
2）$\hat{t}$-ローリング計画を考察する場合の終端制約条件としては，この条件は恐らく比較的妥当なものと思われる．もちろん，そのときどきで気まぐれに変化することがないという意味で一定の規則性を持つ制約条件の下では，$\hat{t}$-ローリング計画に対して何らかの特性を見つけることができるであろう.

を検討することによって，任意の所与の k_0 に対して，$\phi_0(k_0)$ は k_0 の連続一価関数であり，

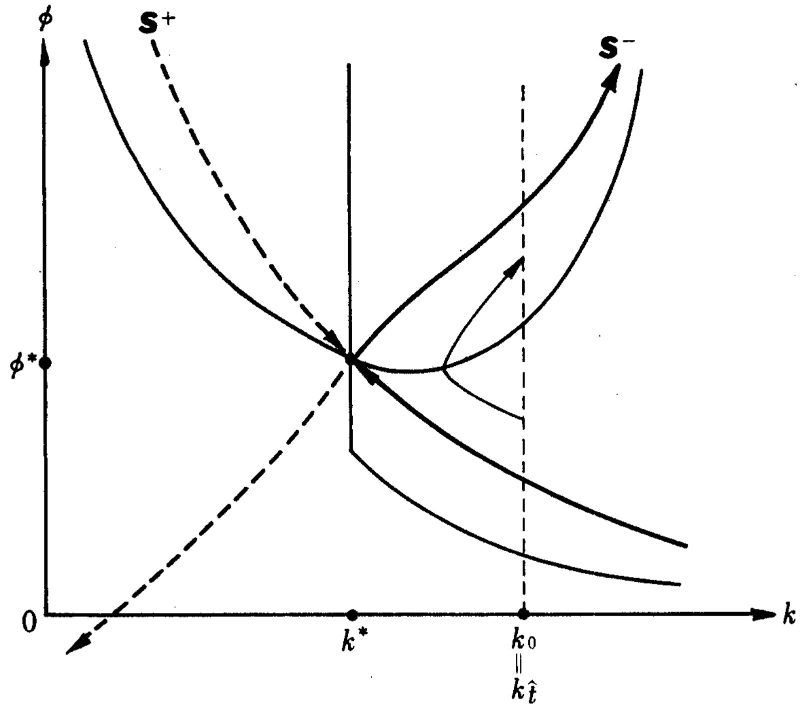
$$\mathrm{sgn}\,[\phi_0(k_0)-\phi(k_0)|_{S^+}]=\mathrm{sgn}\,(k_0-k^*),\quad \phi_0(k^*)=\phi(k^*)|_{S^+}$$

となることが分かる（第3.3.①図及び第3.3.③図参照）．つまり，$\phi_0(k_0)$ 曲線は，$k_0<k^*$ に対しては S^+ 経路より下方に，そして $k_0>k^*$ に対しては S^+ 経路より上方に位置し，ただ1点 $k=k^*$ において S^+ 経路と交わる．かくて，当該 $\hat{t}$-ローリング計画は，福尾〔5〕及び〔6〕で考察されたC-最適経路又はR-最適経路と類似して，時と共に定常経路に収束する（第3.4図参照）．

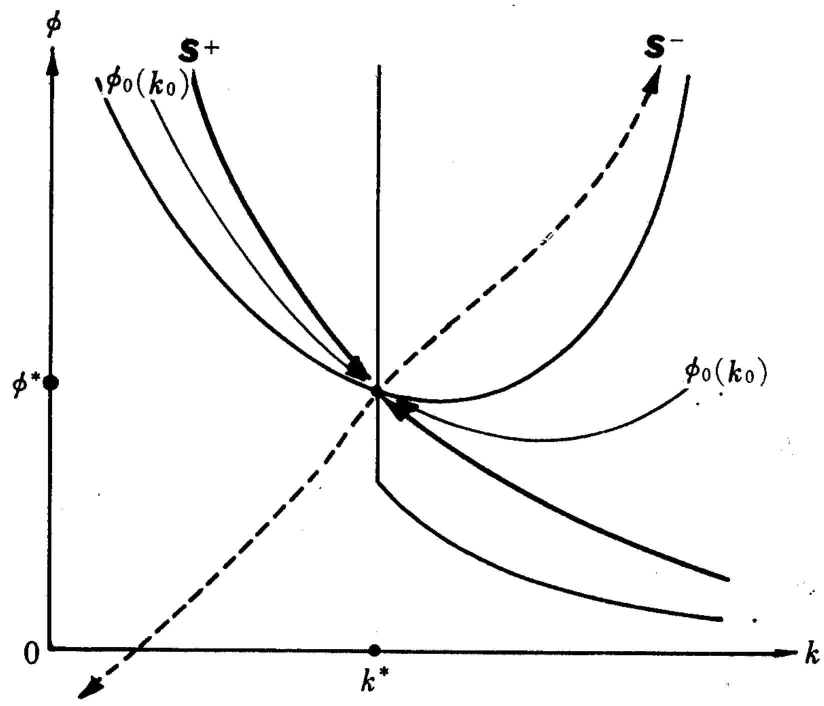
（証了）



第3.3.①図



第 3.3. ③図



第 3.4 図

§6 結 び

我々の $\hat{t}$-最適経済成長モデルは，次の諸点で Cass〔1〕モデルと相違している．(1) Cass は1種類の同質消費財の存在を想定したのに対し，我々は2種類の異質消費財の存在を認めた．(2) Cass は Cobb-Douglas 生産関数を暗に採用しているのに対し，我々は Cass の生産関数を含む CES 生産関数を暗に採用している．(3) Cass は技術進歩を考慮しなかったのに対し，我々は Harrod 中立技術進歩を想定している．

これらの相違点にもかかわらず，得られた帰結すなわち定理 3.1, 3.2 及び 3.3 は Cass の帰結と基本的には極めて類似している．もちろん，モデルの細部においては，仮定の相違に相応する相違が見られる．例えば，消費財の構成に対する仮定の相違は社会厚生汎関数の形式の相違に及んでいる．形式上の相違ほどには中心結果が変らなかった理由は，恐らく，(a) 我々の $\hat{t}$-最適成長モデルが本質的には1部門（＝単一産出物・単一資本財）モデル以外の何物でもないこと，(b) 両モデルの（一時的社会）厚生関数がいずれも強い意味の凹関数であること，(c) 我々の消費財はいずれも上級財であるということ，(d) 両モデルの生産関数がいずれも強い意味の凹関数であること，(e) 我々のモデルの技術進歩は Harrod 中立型であること，などに由来するのであろう．

消費財の種類がもっと多く存在する場合に結論がどのように変化するであろうか．これは残された問題であり，若干の知的興味を感じないわけではない．しかし，我々としては，適当に仮定を施すならば，基本的帰結そのものは余り変化を受けないであろう，と類推することによって――この類推は正しくないかもしれない――，この種の分析をこれで打ち切りたいと思っている．いずれにせよ，我々の諸仮定が正当化され得る程度に応じて，我々の得た結論は正当化されるであろう．

$\hat{t}$-ローリング計画は $\hat{t}$-最適経済成長モデルの応用であった．既に何度も指摘したように，有限時間視野の下での最適経済成長計画の分析は，終端時刻に残

される資本財ストックの評価を除けば，終端時刻以後の状況を暗に等閑に付してしまっている．その点，少くともローリング計画には，終端制約条件選定の問題は依然残っているとしても，有限時間分析に特有のこの種の恣意性は存在しない．しかも，定理 3.4 によれば，$\hat{t}$-ローリング計画は，$\phi_0(k_0)$ 経路と S^+ 経路の相違はあるものの，無限時間視野分析の場合と同様に，結局のところ定常最適経路に収束する．したがって，この点に注目すると，ローリング計画の分析は本来的に無限時間視野分析であると考えることができる．

ところで，本稿で考察した $\hat{t}$-ローリング計画は Goldman〔8〕によって考察されたものと類似しており，しかも，定理 3.4 は彼の定理 5 と同一内容である．彼のローリング計画モデルは 1 種類の同質資本財・1 種類の同質消費財の技術進歩のない状況下の分析であり，その帰結（=定理 1—5）は非常に興味深い．しかし，Goldman モデルは，(a) 負の総投資を容認する可逆的投資モデルである，(b) その生産関数は，我々の記号で書けば，

$$\begin{cases} [\forall k \in \boldsymbol{R}_+] : y(k) > 0, \quad y'(k) > 0, \quad y''(k) < 0 \\ \lim\limits_{k \to 0} y(k) = 0, \quad \lim\limits_{k \to \infty} y(k) = \infty, \\ \lim\limits_{k \to 0} y'(k) < \infty, \quad \lim\limits_{k \to \infty} y'(k) = 0 \end{cases}$$

という経済成長理論の文献では幾分なじみが薄いと思われる性質を持っている，(c) その（一時的社会）厚生関数は，c を人口 1 人当たり消費とすると，

$$\begin{cases} [\forall c \in \boldsymbol{R}_+] : u'(c) > 0, \quad u''(c) < 0, \\ \lim\limits_{c \to 0} u'(c) = \infty, \quad \lim\limits_{c \to \infty} u'(c) = 0, \\ d[-u'(c)/u''(c)]/dc < 0 \end{cases}$$

という最適経済成長理論の文献ではほとんどなじみがないと思われる性質を持っている，という点において弱点を持つ．善意に解釈すると，特徴 (a) は Ramsey〔13〕モデルにも見られるものであり，経済学的には余り説得的であるとは思われないが，分析を単純化させるという長所を持っている．また，特徴 (b) は，生産関数が CES 型や Cobb-Douglas 型ではないことを示唆して

いるが，例えば，

$$y=\log(k+1),\ \text{or}$$

$$y=(k+C_0)^{\alpha}-C_0^{\alpha},\ C_0=\text{const.}>0,\ 0<\alpha=\text{const.}<1$$

という型の関数は，経済学的説得性の有無を不問にすれば，この特徴を満たしている．したがって，(a) 及び (b) の限りでは，我々の疑問はそれほど強いものではない．しかし，特徴 (c) については多大の疑問がある．関数 u に3次条件を課している点を仮に容認するとしても，我々は，経済学的に比較的妥当と思われる初等関数で，しかも彼の条件を満たすような特定の関数 u を容易に見いだすことができない．はたして，Goldman の仮定には経済学的に正当な裏付けを与えることができるのであろうか．

最後に，終端不等式条件 (3.8) の意味をもう一度考えて，本稿を閉じることにする.[1] 既述のように，有限時間視野分析においては，最小目標資本効率労働力比率が極めて非合理的に選定されることを考慮すると，(3.8) に対しては次のような疑問が発せられることが当然予想される．すなわち，(3.8) は不等式でなければならないのであろうか，なぜ等式条件であってはならないのであろうか．この疑問を解明するためには，等式条件の不合理性を明示する必要がある．そのため，(3.8) の代わりに，終端資本効率労働力比率は外生的に与えられた終端目標資本効率労働力比率と均等であるべきであって，終端資本に過不足があってはならない (=等式条件) と仮定してみよう．そうすると，(3.30) により，所与の初期資本効率労働力比率に対して，(3.14) (3.15) 及び終端等式条件を満たす $\hat{t}$-実行可能経路は一意的に存在し，その経路は確かに $\hat{t}$-最適経路になる.[2]

さて，今，この一意的 $\hat{t}$-最適経路において，終端帰属単位価格が負になるという場合，すなわち，終端時刻に十分近い時刻に対しては総投資が0そして帰

1) この箇所は Cass〔1〕p. 845 を参考にしている．

2) 定理 3.2 の証明の最終部分を見れば明らかである．

属単位価格が負になるという場合を考えよう．明らかに，このような状況の下においては，資本財の破壊すなわち負の総投資が可能であれば，たとえ資本財を消費財に転用できなくても，終端時刻に十分近い時刻においては，総投資を0にとどめておくよりも負にした方が社会的厚生指標を大きくすることができる．[1] しかも，そうしてはならないという経済学的理由は何もない．もちろん，数学的には何の矛盾もない．しかし，一方，限界一時的社会厚生は両消費財の正消費に対して常に正であることに注目すると，終端時刻に十分近い時刻においては，資本財ストックを（破壊するのではなく）利用してできるだけ多くの消費財を確保した方が常に社会厚生指標を大きくすることができる．ここにおいて，終端時刻に終端目標値に到達することと社会厚生指標を最大化することとの間には，経済学的観点からの矛盾が生ずる――ここにおいても，数学的矛盾は何もない――．

(3.8) が不等式条件となった理由は，等式条件の持つ上述のような矛盾を回避するためである．そして実際，終端資本効率労働力比率がその最小目標値を上回りかつ終端帰属価格が0の下で社会厚生指標が最大になるという事例は幾らでもあり得る．しかも，不等式条件のゆえに主張し得ることになった(3.31)は，補助変数を帰属単位価格と解釈することに対して，一層好ましい事態を提供しているのである．

参考文献

〔1〕 Cass, D., "Optimam Growth in an Aggregattive Model of Capital Accumulation : A Turnpike Theory," *Econometrica*, **34** (1966), 833-849.

〔2〕 Chase, E.S., "Leisure and Consumption," in *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, ed. by Shell, K., MIT Press, Cambridge, U.S.A., 1967, 175-180.

〔3〕 Douglas, A., "A Theory of Saving and Portfolio Selection," *Rev. Econ. Stud.*,

1） 資本財の消費財への転用不能という状態の下では，$\phi<0$ ならば，$z<0$ でしかもその絶対値を可能な限り大きくするとき，Hamiltonian は最大になる．

35 (1968), 453-463.

〔4〕 福尾洋一, "生産関数と厚生関数についての若干の覚書", 経済学論究, **28** (**1**) (1974), 77-109.

〔5〕 ――――, "Cass の最適経済成長理論", 経済学論究, **28** (**2**) (1974), 89―109.

〔6〕 ――――, "非可逆的投資の下における Ramsey の最適経済成長理論", 経済学論究, **28** (**3**) (1974), 41-58.

〔7〕 Gale, D., "On Optimal Development in a Multi-Sector Economy," *Rev. Econ. Stud.*, **34** (1967), 1-18.

〔8〕 Goldman, S.M., "Optimal Growth and Continual Planning Revision," *Rev. Econ. Stud.*, **35** (1968) 145-154.

〔9〕 Henderson. J.M.-Quandt. R.E., *Microeconomic Theory : A Mathematical Approach, sec. ed.*, McGrow-Hill, New York, 1971. (小宮隆太郎-兼光秀郎訳『現代経済学――価格分析の理論――増訂版』, 創文社, 1973).

〔10〕 中山伊知郎-篠原三代平編『日本経済事典』, 講談社, 1973.

〔11〕 Sidrauski, M., "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," *Amer. Econ. Rev.*, **57** (1967), 534-544.

〔12〕 Solow, R.M., *Growth Theory*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1970. (福岡正夫訳『成長理論』, 岩波書店, 1971.)

〔13〕 Ramsey, F.P., "A Mathematical Theory of Saving," *Econ. J.*, **38** (1928), 543-559.

〔14〕 渡部経彦-筑井甚吉『経済政策』, 岩波書店, 1972.