非可逆的投資の下における Ramsey の最適経済成長理論[1)]

福　尾　洋　一

本稿では，拙稿〔4〕及び〔5〕での議論を前提とすることによって，Koopmans-Cass〔3〕が解釈した意味での可逆的投資の下における Ramsey の最適経済成長理論——それは純粋 Ramsey モデル〔6〕に必ずしも忠実であるとは言い難い——を，非可逆的投資の下に適用する．§1では，投資の非可逆性という面に焦点を合わせることによって，C-最適経路（定義2.3）の特質を検討する．§2では，Cass モデルを土台として，非可逆的投資の下における Ramsey モデルを構成する．§3は少し長文の結びに充てられる．

§1　C-最適経路の特性[2)]

拙稿〔5〕の§4においては，効率労働力1単位当たり資本財ストック（＝資本効率労働力比率）k の初期値 k_0 に対して，C-最適経路が一意的に存在することが示された．そして第2.3図を見れば明らかなように，C-定常最適経路（定義2.4）上の資本効率労働力比率 k^* に対して，C-最適経路上では，$0<k<k^*$ ならば $\dot{k}>0$ であり，$k>k^*$ ならば $\dot{k}<0$ である．しかし，$k>k^*$ に対しては，効率労働力1単位当たり総投資 z の正値性は必ずしも保証されない．そこでこの§では，C-最適経路上の k が

1）拙稿〔5〕は未定稿であることを断っておいたが，本稿は言わば〔5〕を補足するためのものである．したがって，記号は〔5〕と統一的に使用し，また，式番号や定理番号等はすべて〔5〕との通し番号を採用する．

2）この§の議論は，Arrow-Kurz の論文〔2〕の主旨を，我々の立論の脈絡に沿うように，できるだけ簡潔にまとめたものである．

(†) $k > k^*$, i.e. $\dot{k} < 0$, & $y'(k) < \xi \equiv \kappa + \lambda + \tau + \delta$,

を満たす場合に限って，C-最適経路上の z の運行について検討する．ただし，ここで，y は生産関数（1.19），κ は資本減耗率，λ は人口成長率，τ は技術進歩率を意味し，また，δ は技術進歩が将来世代に及ぼす優遇度を考慮した時間割引率であり，技術進歩の効果を考慮しない以前の時間割引率を ∂，一時的社会厚生（定義1.17）の消費に対する弾力性を $\gamma = \text{const.} \in (0,1)$ とすると，$\delta = \partial - \tau\gamma$ である．

以下においては，c は効率労働力１単位当たり消費（＝平均的消費主体（定義1.16）の消費），y は効率労働力１単位当たり総生産（＝効率労働力生産性），ϕ は厚生指標測定の尺度で表示した投資財の単位帰属価格，u は一時的社会厚生関数（1.27.1）を表す．

定義2.4 自由区間，閉塞区間

C-最適経路上において，(a) $\phi = u'(c) \geqq u'(y)$ が成立しているときの k の最大区間を自由区間（free interval）といい，(b) $\phi < u'(c) = u'(y)$ が成立しているときの k の最大区間を閉塞区間（brocked interval）という．なお，最大区間とは，同じ条件が成立しているもっと大きな区間に含まれることがない区間という意味である．

さて，(2.6) に照らして自由区間と閉塞区間を考えてみると，自由区間は $z \geqq 0$ という条件が制約として働いていない最大区間であり，閉塞区間は，$z \geqq 0$ という制約条件があるために z が負になり得ず，$z=0$ となっている最大区間である．ここで，C-最適経路に対して

$$h = h(k) \equiv \phi(k) - u'[y(k)] \tag{2.20}$$

と置くと，(2.6) 及び (2.7) により，

$$\begin{cases} \text{自由区間} \Rightarrow h \geqq 0, \ h' = [(\xi - y')\phi(k)/\dot{k}] - y'u''(y), \\ \text{閉塞区間} \Rightarrow h < 0, \ h' = [\{\xi\phi(k) - yu'(y)\}/\dot{k}] - y'u''(y) \end{cases}$$

となる．かくて，(1.27.1) を考慮して，

$$(2.21)\quad \begin{cases} \varsigma=\varsigma(k)\equiv(\xi-y')+[(\kappa+\lambda+\tau)ky'u''(y)/u'(y)] \\ \qquad\qquad \equiv(\xi-y')-[(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau)ky'/y], \\ \varsigma'=-[(y/k)+(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau)(1-\sigma)]ky''/y, \\ \sigma\equiv-(y-ky')y'/kyy'' \end{cases}$$ [1]

と置くと，(1.33) (2.15) 及び (†) により，

$$(2.22)\quad \begin{cases} \text{自由区間} \Rightarrow h\geqq 0,\ h'\dot{k}/u'(y)\geqq\varsigma, \\ \text{閉塞区間} \Rightarrow h<0,\ h'\dot{k}/u'(y)<\varsigma \end{cases}$$

となる.

補助定理2.5 任意の有界自由区間 $[k_F,\ k^F]$ $(k_F>k^*)$ と任意の有界閉塞区間 $(k_B,\ k^B)$ に対して，各区間に少くとも1つのある k が存在して，$\varsigma(k)=0$ となる.

証明 区間 $[k_F,\ k^F]$ 及び $(k_B,\ k^B)$ に対して，適当な開区間 $(k_F-\varepsilon,\ k^F+\varepsilon)$ 及び $(k_B-\varepsilon,\ k^B+\varepsilon)$ (ε は十分小さい正数) を考えると，(2.22) により，

$$\begin{cases} k\in(k_F-\varepsilon,\ k_F) \Rightarrow h<0, \\ k\in[k_F,\ k^F] \Rightarrow h\geqq 0, \\ k\in(k^F,\ k^F+\varepsilon) \Rightarrow h<0, \end{cases} \qquad \begin{cases} k\in(k_B-\varepsilon,\ k_B] \Rightarrow h\geqq 0, \\ k\in(k_B,\ k^B) \Rightarrow h<0, \\ k\in[k^B,\ k^B+\varepsilon) \Rightarrow h\geqq 0 \end{cases}$$

が成立するから，

$$h'(k_F)>0,\ h'(k^F)<0\ ;\ h'(k_B)<0,\ h'(k^B)>0$$

となり，結局，$[\cdot]\equiv[h'\dot{k}/u'(y)]$ とすると，

$$\varsigma(k_F)=[\cdot]_{k=k_F}<0,\qquad \varsigma(k^F)=[\cdot]_{k=k^F}>0\ ;$$
$$\varsigma(k_B)=[\cdot]_{k=k_B}>0,\qquad \varsigma(k^B)=[\cdot]_{k=k^B}<0$$

という関係が得られる．もちろん ς は k の連続関数であるから，中間値の定理により[2]，結論を得る. (証了)

1) 拙稿〔4〕の定理1.4と (1.12)を参照すると，σ は時刻 t の代替の弾力性にほかならないことが分かる.

2) 閉区間 $[a,\ b]$ を定義域とする実数値連続関数 $\Gamma:[a,\ b]\longrightarrow \boldsymbol{R}$ について，$\Gamma(a)<\Gamma(b)$《$\Gamma(a)>\Gamma(b)$》ならば，任意の実数 $\alpha\in(\Gamma(a),\ \Gamma(b))$《$\alpha\in(\Gamma(b),\ \Gamma(a))$》に対して，ある実数 $x\in[a,\ b]$ が存在して，$\Gamma(x)=\alpha$ が成立する．この中間値の定理の証明については，例えば，高木の書物〔9〕p. 26 を参照されたい.

定義2.5　終端区間

右端点が無限大に及ぶ区間，すなわち，$[a, \infty)$ あるいは (a, ∞) によって表示される区間を終端区間（terminal interval）という．ここで，a は k^* より大きいある正数である．

定理2.4　C-最適経路上では，

$$\langle 1 \rangle \qquad \liminf_{k\to\infty} \varsigma(k)>0$$

ならば終端閉塞区間が存在し，

$$\langle 2 \rangle \qquad \limsup_{k\to\infty} \varsigma(k)<0$$

ならば終端自由区間が存在する．

証明　〈1〉：補助定理2.5により，有界区間においては少くとも1度 $\varsigma(k)=0$ となるから，十分に大きなすべての k に対して $\varsigma(k)\neq 0$ ならば，終端区間となっているはずである．$\liminf_{k\to\infty} \varsigma(k)>0$ のとき，終端自由区間になったとすると，(†) 及び (2.22) により，十分に大きなすべての k に対して $h'(k)<-\varepsilon$（ε はある適当な正数）である．よって，$\lim_{k\to\infty} h(k)=-\infty$ となるが，これは (2.22) の $h\geqq 0$ という条件に反している．〈2〉：$\limsup_{k\to\infty} \varsigma(k)<0$ のとき，終端閉塞区間になったとすると，$h'(k)>\varepsilon$（ε はある適当な正数）すなわち $\lim_{k\to\infty} h(k)=\infty$ となるが，これは (2.22) の $h<0$ という条件に反している．

（証了）

系1　C-最適経路上では，

$$\langle 1 \rangle \qquad \begin{cases} \lim_{k\to\infty} y'(k)=0, \ \& \\ \limsup_{k\to\infty} [ky'(k)/y(k)]<\xi/(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau) \end{cases}$$

ならば終端閉塞区間が存在し，

$$\langle 2 \rangle \qquad \begin{cases} \lim_{k\to\infty} y'(k)=0, \ \& \\ \liminf_{k\to\infty} [ky'(k)/y(k)]>\xi/(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau) \end{cases}$$

ならば終端自由区間が存在する.

証明　(2.21) 及び定理2.4により，直ちに導かれる.　(証了)[1]

系 2　C-最適経路上では，

〈1〉　$$0<\lim_{k\to\infty} y'(k)<\xi-(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau)$$

ならば終端閉塞区間が存在し，

〈2〉　$$\lim_{k\to\infty} y'(k)>\max[0,\ \xi-(1-\gamma)(\kappa+\lambda+\tau)]$$

ならば終端自由区間が存在する.

証明　$\lim_{k\to\infty} y'(k)>0$,（1.21）及び不定形の極限値の公式（=L'Hospital の定理）により，

$$\lim_{k\to\infty}[ky'(k)/y(k)]=\lim_{k\to\infty} y'(k)[1/\lim_{k\to\infty} y'(k)]=1^{2)}$$

であるから，(2.21) 及び定理2.4により，結論を得る.　(証了)

定理 2.4 は k が無限大に向かう場合を取り扱っているが，今度は有限の k に対応するC-最適経路の運行を見ることにする.

定理2.5　$\varsigma(k)=0$ の回数を $n(\varsigma=0)$，終端自由区間を $[F$，有界自由区間を $[F]$，その個数を $n[F]$，終端閉塞区間を $(B$，有界閉塞区間を (B)，その個数を $n(B)$ によって表すと，C-最適経路上では，次の結果が得られる.

〈1〉　$n(\varsigma=0)=0$ のときには，$[F$のみが存存する.

〈2〉　$n(\varsigma=0)=1$ のときには，

$$\begin{cases} [F \Rightarrow n[F]=0,\ n(B)=0, \\ (B \Rightarrow n[F]=1,\ n(B)=0, \end{cases}$$

〈3〉　$n(\varsigma=0)=2\nu$（ν は自然数）のときには，

$$\begin{cases} [F \Rightarrow n[F]\leqq\nu,\ n(B)\leqq\nu, \\ (B \Rightarrow n[F]\leqq\nu,\ n(B)\leqq\nu-1, \end{cases}$$

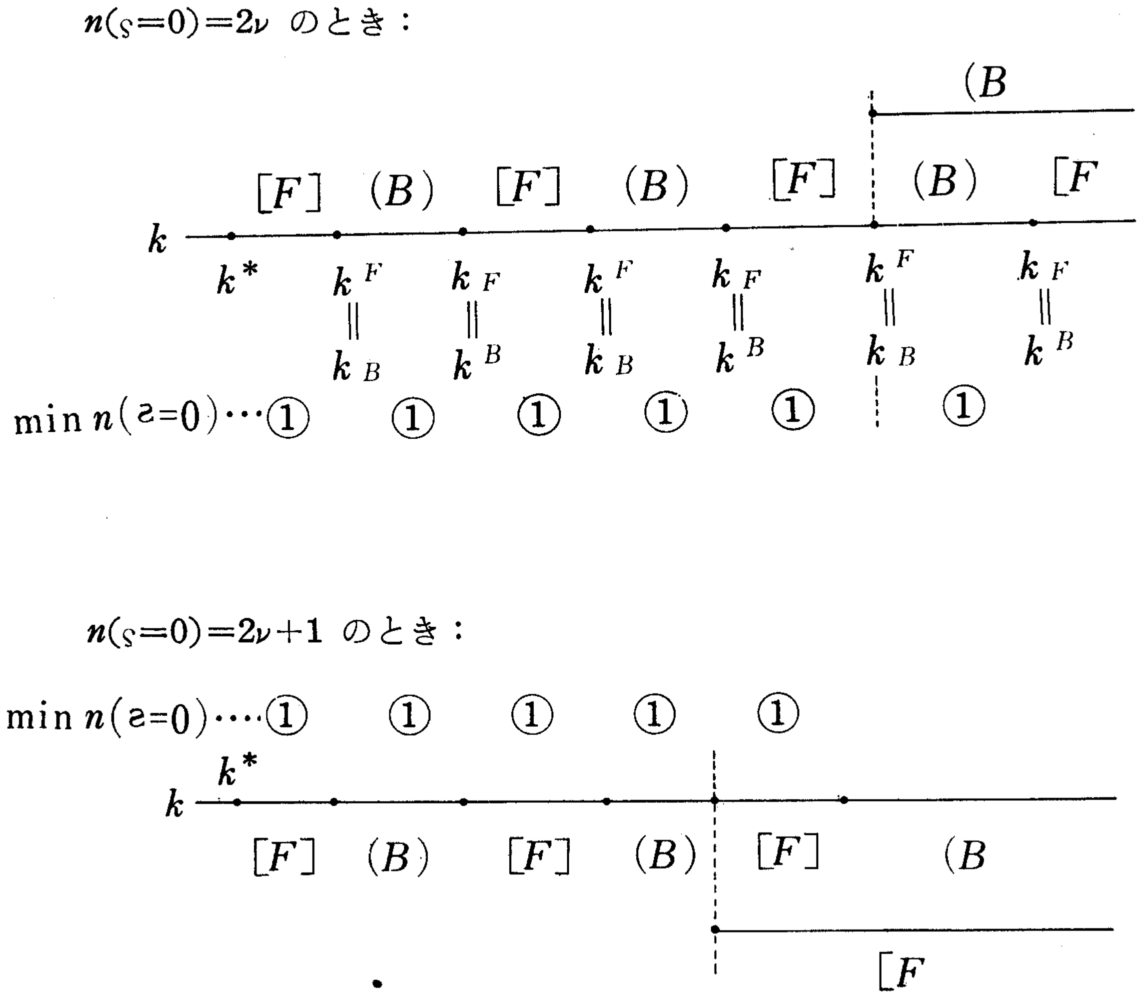
1)　$0<\gamma<1$ かつ $\sigma=\text{const.}\leqq 1$ ならば，終端閉塞区間が存在する.

2)　(1.21) により，一般に，$ky'/y\leqq 1$ である.

〈4〉 $n(\varsigma=0)=2\nu+1$（ν は自然数）のときには,

$$\begin{cases} [F \Rightarrow n[F] \leqq \nu,\ n(B) \leqq \nu, \\ (B \Rightarrow n[F] \leqq \nu+1,\ n(B) \leqq \nu. \end{cases}$$

証明 (2.15) 及び (2.21) により, $\varsigma(k^*) \leqq 0$ であるから, (2.23) を見ると, 最初の閉塞区間 (k_B, k^B) に至るまでに, 少くとも1つのある $k \in (k^*, k_B)$ に対して, $\varsigma(k)=0$ となる. かくて, このことと補助定理2.5を考えると, すべての結論が得られる（第2.4図参照）. （証了）



第2.4図

系 C-最適経路上では, $\varsigma'(k)>0$, したがって, 例えば $\sigma=\text{const.} \leqq 1$ であるとき,

〈1〉 $\lim_{k\to\infty} \varsigma(k)>0$

ならば，1つの［F］と1つの（B のみが存在する．

〈2〉 $\lim_{k\to\infty} \varsigma(k)\leqq 0$

ならば，1つの［F のみが存在する．

証明 定理2.4及び定理2.5の〈2〉によって，直ちに結論が導かれる．（証了）[1]

§2 Ramsey モデル

この§では，Cassモデルに諸種の土台を提供したであろうと思われる Ramsey の最適経済成長モデルを，逆に Cass モデルを基礎に置くことによって，再構成してみよう.[2] 拙稿〔5〕の最初に述べたように，純粋 Ramsey モデル〔6〕は次の諸点を想定しているところが Cass モデルと異なっている.（1）時間割引率 ∂，人口成長率 λ 及び技術進歩率 τ がいずれも0であると想定している.（2）総生産に対応する生産関数ではなく，純生産に対応する生産関数を想定している——したがって，我々としては，資本減耗率 κ が0であることを暗黙のうちに想定していると解釈することも可能である——.（3）総投資に対する（経済学的観点からする）非負条件を暗黙のうちに除外している.

一見すると，上記(1)(2)及び(3)は，Cass モデルの特別な事例として，Cassモデルの中に吸収されてしまうように思われる．しかし，実際はそれほど単純ではない．まず，$\partial=\lambda=\tau=0$ とすると，$\delta=\partial-\tau\gamma=0$ となり，正しく Ramsey は各世代を平等に処遇している.[3] 我々は各世代平等待遇という価値判断の

1） 定理2.4とその系1,及び定理2.5とその系とにより，$0<\gamma<1$ かつ $\sigma=\text{const.}\leqq 1$ ならば，1つの［F］と1つの（B のみが存在することが分かる．

2） 純粋 Ramsey モデルを解説したものとしては，安部〔1〕が丁寧で分かりやすい．

3） Ramsey は，「倫理的には弁解できるものではないが，ただ単に想像力の乏しさに由来する慣行として，($\partial=0$ と仮定する.)」と語っている(〔6〕p. 543)．この文言からすると，Ramsey 自身は倫理的には正の時間割引率を想定したかったのかもしれない——事実，〔6〕p. 553 以下においては，彼は $\partial>0$ の事例を考察している——．

是非を論じようとは思わない．しかし，$\delta=0$ とすると，目標関数（2.4）が

$$W=\int_0^\infty u(c)dt \tag{2.24}$$

となることから，生産関数と一時的社会厚生関数の性質によっては，（2.24）が収束しないような無数の実行可能経路（定義2.2）が存在し，結局，（2.24）を最大化する実行可能経路は存在しないという純粋に数学的な側面から来る困難に直面する．

もちろん，Ramsey はこの点に十分留意し，そのため，彼は次の条件（＝Ramsey 条件）を設定することによってそのモデルを構成した．

定義2.6 Ramsey 条件

（a） ある実行可能な有限の資本財投入量に対して資本財の限界生産性が0となる（＝生産の飽和状態）か，あるいは，（b） ある実行可能な有限の消費に対して消費の限界（一時的）社会厚生が0となる（＝一時的社会厚生の飽和状態）が成立するとき，Ramsey 条件が成立するということにする．

すなわち，Ramsey は，生産関数と一時的社会厚生関数に対して（a）と（b）の特質を与えることによって，達成可能な最大の一時的社会厚生指標の状態，つまり，至福（Bliss あるいは B）状態を設定し，そして，目標汎関数

$$\int_0^\infty [u(c)-B]dt,\quad B<\infty \tag{2.25}$$

を最大化する実行可能経路を特定しようとした．[1)]

しかし，我々がこれまで設定してきた生産関数（1.19）（1.21）及び一時的社会厚生関数（1.27.1）は Ramsey 条件を満たさない．もちろん，この段階において，例えば Samuelson〔7〕が行ったように，Ramsey 条件を満たす生産関数を Ramsey が論じたよりももっと明確な形であらかじめ特定するこ

1） （2.25）は上に有界であり，また，Ramsey の仮定によれば $\kappa+\lambda+\tau=0$ であるから，（2.25）を有限にすることは可能である．したがって，（2.25）を最大化しようという問題は意味を持つ．なお，Ramsey は $\int_0^\infty [B-u(c)]dt$ を最小化する問題を考えた．

とは可能であるし，また，Ramsey 条件を満たす一時的社会厚生関数を特定することも可能であるかもしれない．それにもかかわらず，我々がこれまで採用してきた生産関数と一時的社会厚生関数は，それぞれ多くの分析において見られるものであり，ある意味で相当の説得力を有すると思われる．したがって，我々としては，分析の便宜上とはいえ，別の型の関数を新しく想定することにはかなりの抵抗が感じられる．そこで我々は，次に定義する最適黄金時代の概念を媒介にして，Ramsey の目標汎関数の1変種を Koopmans-Cass〔3〕に倣って設定するであろう．

定義2.7 最適黄金時代

一時的社会厚生指標又は効率労働力1単位当たり消費が最大となる黄金時代（定義1.20）を最適黄金時代という．

新古典定理（＝定理1.5）を想起しながら，最適黄金時代を $\breve{F}_g=(\breve{y},\ \breve{c},\ \breve{z},\ \breve{k})$ によって表示すると，$\breve{F}_g$ は

$$(2.26)\qquad \begin{cases} y'(\breve{k})=\kappa+\lambda+\tau, \\ \breve{z}=(\kappa+\lambda+\tau)\breve{k}, \\ \breve{c}=\breve{y}-\breve{z} \end{cases}$$

によって定義されることになる．

我々は，改訂 Ramsey モデルの目標汎関数を，現実の一時的社会厚生指標と最適黄金時代の一時的社会厚生指標との差の全時間視野［0, ∞）にわたる総和（＝積分）によって定義する．しかし，実はここに再び新たな問題に直面することになる．なぜなら，純粋 Ramsey モデルの下では $\kappa=\lambda=\tau=0$ であったが，この場合には，生産関数（1.19)(1.21)と一時的社会厚生関数（1.27.1）の下では，最適黄金時代（2.26）そのものが定義できなくなり，目標汎関数最大化の問題は無意味になってしまう．それゆえ，我々は，この§の最初に述べた Ramsey の想定(1)(2)及び(3)をすべて改め，経済学的にもっと意味を持つように，

$$(\dagger\dagger)\qquad \kappa+\lambda+\tau>0,\ \ \&\ \ \delta\equiv\partial-\tau\gamma\equiv0$$

と仮定し，更に，総投資に対して非負条件を設けることにする.[1] そうすると，基本的には，改訂 Ramsey モデルは，$\delta\equiv 0$ という点においてのみ Cass モデルと異なることになる．もちろん，(††) を仮定した関係上，仮定2.2に代って，再び仮定1.10，すなわち，

$$(1.34)\qquad \lim_{k\to\infty} y'(k)<\kappa+\lambda+\tau<y'(0)$$

が採用されることになるが，これは言わば技術的な事柄である．

定義2.2 R-最適経路

仮定 1.1—1.7，1.8.1，1.9，1.10 及び (††) の下で，目標汎関数

$$(2.27)\qquad \mathrm{W}_R=\int_0^\infty [u(c)-u(\breve{c})]dt$$

を最大化するという意味で最適な実行可能経路を R-最適経路ということにする．

そうすると，Ramsey の問題とは R-最適経路の存在を検討するという問題である.[2]

定理2.6 R-最適経路上では，全時間視野 $[0,\ \infty)$ を通じて，次の関係 (2.28) (2.29) 及び(2.30) が成立する．

$$(2.28)\qquad \begin{cases} \text{所与の変数 } t,\ k \text{ 及び } \phi \text{ に対して，} \\ (1)\ \begin{cases} \phi>u'(y)-u'(\breve{c}) \Rightarrow 0<z<y,\ \&\ \phi=u'(c)-u(\breve{c}), \\ 0<z<y \Rightarrow u'(y)-u'(\breve{c})<\phi=u'(c)-u'(\breve{c}), \end{cases} \\ (2)\ \ \phi\leqq u'(y)-u'(\breve{c}) \Longleftrightarrow z=0, \end{cases}$$

$$(2.29)\qquad \dot{\phi}=-u'(c)y'(k)+(\kappa+\lambda+\tau)[\phi+u'(\breve{c})],$$

$$(2.30)\qquad \lim_{t\to\infty}(y,\ c,\ z,\ k,\ \phi)=(\breve{y},\ \breve{c},\ \breve{z},\ \breve{k},\ 0).$$

---

1) Cass は $z>0$ の事例についてのみ考察した．Cass の論文〔3〕p. 238 を参照されたい．

2) 無限の期間にわたって現実の効率労働力1単位当たり消費 c が最適黄金時代の効率労働力1単位当たり消費 $\breve{c}$ を上回ることは不可能であり，また，c が $\breve{c}$ に至る実行可能経路は無数に存在するから，(2.27) は上に有界で有限値を取ることが予想される．したがって，(2.27) を最大化するという問題は意味を持ち得る．

証明 (††) 及び (2.27) を見て，Hamiltonian を

$$(2.31)\qquad H=H(k,\ \phi,\ z)$$
$$=[u(c)-u(c)|_{(k,\ z)=(\breve{k},\ \breve{z})}]+\phi\dot{k}$$

と置く——この式は拙稿〔5〕の§2の基本定理の (2.5) に対応している——と，(1.32) (1.33) 及び基本定理の(A)(B)により，直ちに (2.28) 及び (2.29) が導かれる．一方，基本定理の(C)は

$$①\qquad \lim_{t\to\infty} k(t)\phi(t)=0$$

を意味している．もし $\lim_{t\to\infty} k(t)=0$ ならば，(1.32) 及び (1.33) により $\lim_{t\to\infty} z(t)=0$ かつ $\lim_{t\to\infty} c(t)=y(0)$ となるが，(1.21) (1.34) 及び (2.26) によれば $y(0)<\breve{c}$ であるから，結局，$\lim_{t\to\infty} c(t)<\breve{c}$ となって，(2.27) は負の無限大となる．かくて，$\lim_{t\to\infty} k(t)=0$ となる経路は明らかに R-最適経路ではない．換言すると，R-最適経路上では，$\lim_{t\to\infty} k(t)>0$ となる．それゆえ，①は，(1.27.1) 及び (2.28) とあいまって，$\lim_{t\to\infty} \phi(t)=0$ かつ $\lim_{t\to\infty} c(t)=\breve{c}$ を意味する．この点に留意して，R-最適経路上の c に対して，

$$c=\breve{c}-\varepsilon,\ \text{ただし，}\ \varepsilon=\varepsilon(t),\ \&\ \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)=0$$

と置くことにする．そうすると，(1.19) (1.21) (1.32) (1.33) 及び (2.26) により，

$$\dot{k}=y-\breve{c}+\varepsilon-(\kappa+\lambda+\tau)k$$
$$\leqq\breve{y}+(k-\breve{k})\breve{y}'-\breve{c}-(\kappa+\lambda+\tau)k+\varepsilon=\varepsilon$$

であるから，$\lim_{t\to\infty} \dot{k}(t)\leqq\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)=0$ となる．もし $\lim_{t\to\infty} \dot{k}(t)<0$ ならば，結局 $\lim_{t\to\infty} k(t)=0$ となって，$\lim_{t\to\infty} c(t)=\breve{c}$ と矛盾する．それゆえ，$\lim_{t\to\infty}\dot{k}(t)=0$ でなければならない．そしてこのことは，$\lim_{t\to\infty} k(t)=\breve{k}$ かつ $\lim_{t\to\infty} z(t)=\breve{z}$ を意味している．

（証了）

系　R-最適経路上では，

(2.32) $$\dot{k}=[u(\breve{c})-u(c)-\{u'(c)-u'(\breve{c})-\phi\}(\kappa+\lambda+\tau)k]/u'(c)$$
$$\leqq[u(\breve{c})-u(c)]/u'(c)$$

が成立し，特に自由区間上では，不等号が等号で成立する.[1)]

証明 制御変数 z は t に関して区分的に連続であったことを想起して，z が t° において微分不能であるときには，その左方微係数 $\dot{z}(t^{\circ}-0)$ と右方微係数 $\dot{z}(t^{\circ}+0)$ を考えることにすると，(2.31) (1.32) (1.33) 及び (2.29) により，

$$\dot{H}=(\phi+\breve{u}'-u')(\kappa+\lambda+\tau)\dot{k}+(\phi-u')\ddot{k}$$

となる．これを積分して，(2.31) を考慮すると，R-最適経路上では，全時間視野を通じて，

$$\dot{k}=[\breve{u}-u-(u'-\breve{u}'-\phi)(\kappa+\lambda+\tau)k+\text{定数}]/u'$$

という関係が成立する．ここで (2.30) を見ると，

$$\lim_{t\to\infty}\dot{k}(t)=\text{定数}/\breve{u}'=0,\ \text{i.e. 定数}=0$$

であるから，(2.32) の最初の式が成立する．また，(2.28) により，一般に第2の不等式が成立し，特に自由区間上では等号で成立する． (証了)

次の定理は条件 (2.28) (2.29) 及び (2.30) がある種の限定条件の下で十分条件になっていることを保証する．

定理2.7 最適性の必要条件 (2.28) (2.29) 及び (2.30) を満たす実行可能経路は，汎関数 (2.27) が (正及び負の無限大をも含めて) 極限値を持つようなすべての実行可能経路の中で，(2.27) を最大化するという意味で R-最適経路である．

証明 (2.28) (2.29) 及び (2.30) を満たす実行可能経路を

$$F=(y,\ c,\ z,\ k,\ \phi)$$

で表し，(正及び負の無限大をも含めた意味で) 汎関数 (2.27) を収束させる

1) (2.32) が等号で成立する事例，すなわち，自由区間の事例は Ramsey の論文〔6〕p. 547 の(5)に対応している．Ramsey は自由区間についてのみ考察したのであるが，その場合には，(2.32) は変分学における既知の事実——例えば，杉山の書物〔8〕p. 49 の例1——からも容易に導出される．

$\boldsymbol{F}$ と異なる任意の実行可能経路を

$$\boldsymbol{F}^A=(y^A,\ c^A,\ z^A,\ k^A)$$

で表す．更に，

$$y-y^A=\underline{y},\quad c-c^A=\underline{c},\quad z-z^A=\underline{z},\quad k-k^A=\underline{k}$$

と書くと，$c\neq c^A$ 又は $k\neq k^A$ ならば，

$$\begin{aligned}
&u(c)-u(c^A)\\
&\overset{(\geqq)}{}\quad u'(c)(\underline{y}-\underline{z})\quad (1.27.1)(1.32)\\
&\overset{(\geqq)}{}\quad u'(c)[y'(k)\underline{k}-\underline{z}]\quad (1.21)\\
&=-\dot{\phi}\underline{k}+[\phi+u'(\check{c})-u'(c)](\kappa+\lambda+\tau)\underline{k}-u'(c)\dot{\underline{k}}\quad (2.29)(1.33)\\
&=-\dot{\phi}\underline{k}-[\phi+u'(\check{c})]\dot{\underline{k}}\quad (2.28)(1.33)
\end{aligned}$$

となるから，

① $$\begin{aligned}
&\int_0^\infty[u(c)-u(\check{c})]dt-\int_0^\infty[u(c^A)-u(\check{c})]dt\\
&=\int_0^\infty[u(c)-u(c^A)]dt\\
&>-\int_0^\infty[\dot{\phi}\underline{k}+\phi\dot{\underline{k}}+u'(\check{c})\dot{\underline{k}}]dt\\
&=-[\phi\underline{k}+u'(\check{c})\underline{k}]_0^\infty\\
&=-u'(\check{c})[\check{k}-\lim_{t\to\infty}k^A(t)]\quad (2.30)\\
&=\text{有限値}\quad (1.34)
\end{aligned}$$

が成立する．したがって，証明を完了するためには，①が（有限値に）収束する場合のみを考えればよい．$\lim_{t\to\infty} u[c(t)]=\lim_{t\to\infty} u[c^A(t)]=u(\check{c})$ であるから，(1.27.1)により，$\lim_{t\to\infty} c^A(t)=\check{c}$ である．このとき，定理2.6の証明の中に見られたように，$\lim_{t\to\infty} k^A(t)=\check{k}$ となるから，積分①は正値に収束する．　　(証了)[1]

---

1) c^A が $\check{c}$ に収束しないような実行可能経路 $\boldsymbol{F}^A$ に対しても，

$$\int_0^\infty(\check{c}-c^A)dt=\infty$$

※

次の定理は，汎関数（2.27）が（正及び負の無限大をも含めた意味で）収束するようなすべての実行可能経路の集合に対して，R-最適経路が一意的に存在することを保証している．

定理2.8 仮定1.1—1.7，1.8.1，1.9，1.10及び（††）の下では，任意の正初期値 k_0 に対して，R-最適経路が一意的に存在し，しかもこの経路は時と共に最適黄金時代 $\breve{F}_g$ 収束する．

証明 定理2.3を導出したときと全く同様にすればよい（第2.5図参照）．

（証了）

なお，若干の修正を施せば，Ramsey モデルについても，拙稿〔5〕の§3，

※ ならば，F と F^A は比較可能であって，F は F^A よりも優れている．今，

$$c^\circ \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t c^A dt$$

と置くと，$\breve{c}>c^\circ$ であり，また，（1.27.1）により，

$$\int_0^\infty u(c^A)dt \leqq \int_0^\infty u(c^\circ)dt$$

であるから，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty [u(c)-u(c^A)]dt\\ &\geqq \int_0^\infty [u(c)-u(c^\circ)]dt\\ &= \int_0^\infty [u(c)-u(\breve{c})]dt - \int_0^\infty [u(c^\circ)-u(\breve{c})]dt = \infty\end{aligned}$$

となるからである．しかし，c^A が $\breve{c}$ に収束せず，しかも

$$\int_0^\infty (\breve{c}-c^A)dt = \text{有限値}$$

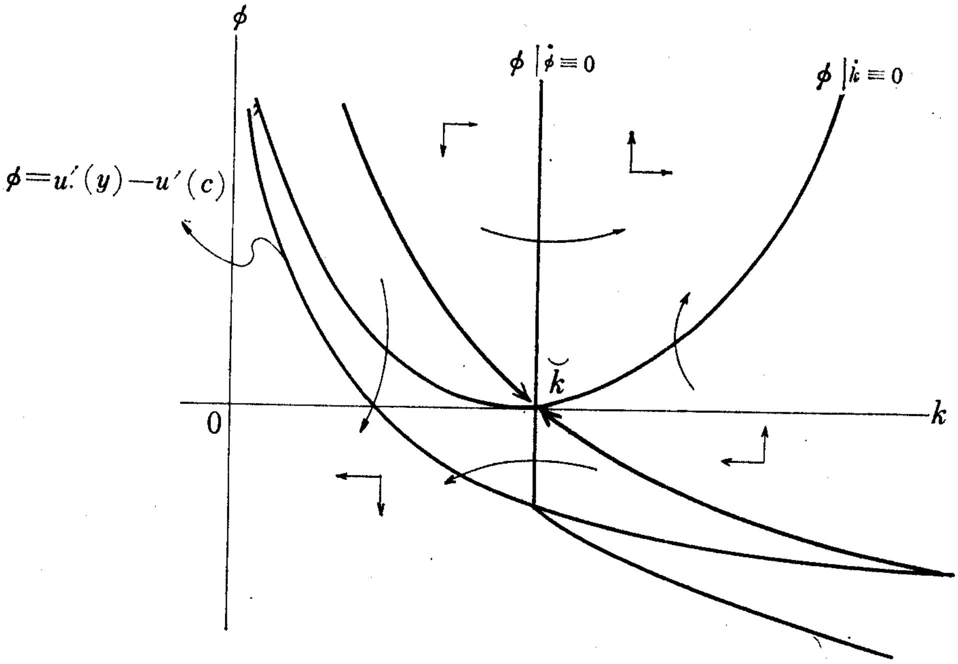
となるような実行可能経路 F^A が存在するという場合には，目標汎関数（2.27）の下では F と F^A は比較不能となる場合がある．なお，（1.21）（1.32）（1.33）及び（1.34）により，

$$\int_0^\infty (\breve{c}-c^A)dt = -\infty$$

という事例は起り得ない．なぜなら，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} k^A(t)-k_0 &= \int_0^\infty \dot{k}^A dt\\ &= \int_0^\infty [y^A-(\kappa+\lambda+\tau)k^A-c^A]dt\\ &\leqq \int_0^\infty (\breve{c}-c^A)dt = -\infty\end{aligned}$$

は明らかに無意味である．



第2.5図

§4後段の注意及び本稿§1と同様の考察を行うことができることを付記しておこう．

§3 結 び

前稿〔5〕と本稿において，我々は，拙稿〔4〕の議論を土台として，最適経済成長理論――動学的厚生経済学の一側面――の中でも取り分け理論的基礎を提供したと思われる，Ramsey=Cass モデルを種々の角度から検討してきた．各定理が得られた結論のすべてを物語っているのであるが，これら各定理は，一見酷似した問題を取り扱っている Ramsey モデルと Cass モデルとの間にはある意味において大きな差異があり，その発端が時間割引率 ∂ についての想定にあることを示している．すなわち，近接世代優遇（$\delta\equiv\partial-\tau\alpha>0$）か各世代平等処遇（$\delta\equiv0$）かという，時間割引率に対する両者の処理法の相違は目標汎関数の設定の仕方に大きな影響を与えたのである．

ところで，本稿で我々が Ramsey モデルとして考察したモデルは，純粋

Ramsey モデルではなく，我々の立論に好都合となるように各種の改訂を施した，Koopmans-Cass が解釈した意味での Ramsey モデルであった．生産関数，一時的社会厚生関数及び技術進歩等に関する想定において，§2の我々の Ramsey モデルと Cass の解釈した Ramsey モデルとは相違するが，Cass もまた彼の体系に基づいて定理2.7に対応する定理を導出している.[1] しかし，Cass は自由区間のみについて分析しているという点を別にしても，彼の証明には難点があるように思われる．彼は，自身のモデルを展開するに当っては基本定理の条件(C)（〔5〕p. 95）に十分留意しているにもかかわらず，改訂 Ramsey モデルを説明するに当たってはこの条件を全く無視してしまっている．したがって，彼の証明は一見成功しているように思われるのであるが，よく検討してみると幾つかの疑問が生ずる．ここでは次の一点のみを指摘しておこう．すなわち，彼の補助変数（〔3〕p. 238 の q）は基本定理の条件(C)を満たさない．

Ramsey 自身は，総投資の非負性，総投資が0のときの端点条件，資本の減耗等については全く考慮を払わず，資本財ストック——我々の記号では k ——が時と共に無限大となることを暗黙のうちに想定することによって，その問題を変分学の固定端点問題にあてはめたのであろう．もしそうだとすれば，Ramsey にとっては（変分学における）自然境界条件——基本定理の条件(C)に対応する条件——は不要であったのであろう．しかし，Cass が論じた意味での Ramsey モデルのわく組みの中では，その問題を固定端点問題として処理することは明らかに不可能である．なぜなら，生産関数，資本減耗及び人口成長等に関する Cass の想定下では，終端基本変数——我々の記号では $\lim_{t\to\infty} k(t)$ ——は，決して無限大にはならず，0とある到達可能な最大の基本変数値との間の任意の数値を取り得るのであるが，それは正しく変分学の可動端点問題ないしは固定域［0, ∞）問題となるからである．

---

1) Cass の論文〔3〕pp. 239-240.

以上のように，時間割引率 ∂ （正確には δ ）に対してどのような解釈を与えるか，換言すれば，近接世代を優遇するか各世代を平等に処遇するかという一種の価値判断は，数学上の微妙な問題と絡み合うことになる．我々が設定した諸仮定の下では，$\delta\equiv\partial-\tau\alpha$ を正と考える場合には，（2.4）によって社会厚生汎関数を定義すれば，それが収束することが予想されるのであるが，$\delta=0$ と考える場合には，経済学的にも数学的にも好都合な社会厚生汎関数又は目標汎関数をどのように定義すべきかということが難しい問題となるであろう．Weizsäcker〔10〕は，いわゆる追付き基準（overtaking criterion）を設定し，定理2.7の①に見られる形で最適経路の有無を検討している．議論の組み立て方が我々の方法とは若干異なっているのであるが，我々の改訂 Ramsey モデルに即して Weizsäcker の最適経済成長モデルを解釈すると，それは R-最適経路の十分条件を提示しようとしたものであると理解することができる．本稿の§2において，我々は，汎関数（2.27）が極限値を持たないかもしれないという理由から，

$$c^A \not\rightarrow \breve{c} \quad \& \quad \int_0^\infty (\breve{c}-c^A)\,dt = \text{有限値}$$

となるような実行可能経路 F^A を暗に考察対象から外したのであるが，Weizsäcker もまた，その理由付けは必ずしも明確ではないが，すべての時刻 t に対して $x^*(t)-x(t)\geqq 0$——$x^*(t)$ はある適当な条件を満たす実行可能経路に対応する資本財ストックであり，我々の記号法では F に対応する $k(t)$ に相当するようなものである；$x(t)$ は任意の実行可能経路に対応する資本財ストックであり，我々の記号法では F^A に対応する $k^A(t)$ に相当するようなものである——という事例のみに注意を払えばよいとして，$x^*(t)-x(t)$ の符号が無限回変化するという可能性を全く排除している．かくて，我々の改訂Ramseyモデルは Weizsäcker モデルを再構成したものと解釈することも可能である．しかし，より基本的には，Weizsäcker モデルは Koopmans-Cass が解釈した意味での Ramsey モデルの中に包含されると考えるのが妥当であろう．

$\delta=0$ としたとき，実行可能経路の優劣を比較する方策としては，Ramsey 条件を導入すること，追付き基準を設定すること，あるいは，追付き基準の一変種として，本稿で考察したごとく，(我々の諸前提を認めた上で) 汎関数 (2.27) を採用すること等が考えられる．そして，これらの分析方法のうち，いずれが最良であるかという点に関しては一般的な結論を下すことはできない．しかし，ここでやや結論的に言うならば，我々の設定してきた諸前提の下で，しかも，$\delta=0$ を仮定する場合には，目標汎関数 (2.27) を採用することは，数学上の障害を乗り切るための，そして，経済学的に不自然さを感じさせない妥当な第一次接近であるという気がする．

参考文献

〔1〕 安部栄造，“ある成長モデルについて”，経済学論究，**22** (**2**) (1968)，15-37.

〔2〕 Arrow, K. J.-Kurz, M., “Optimal Growth with Irreversible Investment in a Ramsey Model,” *Econometrica*, **38** (1970)，331-344.

〔3〕 Cass, D., “Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation,” *Rev. Econ. Stud.*, **32** (1965)，233-240.

〔4〕 福尾洋一，“生産関数と厚生関数についての若干の覚書”，経済学論究，**28** (**1**) (1974)，77-109.

〔5〕 ——，“Cass の最適経済成長理論”，経済学論究，**28** (**2**) (1974)，89-109.

〔6〕 Ramsey, F. P., “A Mathematical Theory of Saving,” *Econ. J.*, **38** (1928)，543-559.

〔7〕 Samuelson, P. A., “A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule,” *Amer. Econ. Rev.*, **55** (1965)，486-496.

〔8〕 杉山昌平『最適問題』，共立出版，1967.

〔9〕 高木貞治『解析概論（改訂第三版）』，岩波書店，1961.

〔10〕 von Weizsäcker, C. C., “Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon,” *Rev. Econ. Stud.*, **32** (1965)，85-104.