Cassの最適経済成長理論[1)]

福　尾　洋　一

拙稿〔4〕の最後で述べたように，新古典派定理は異時点間における移行過程の問題には論究しなかった．本稿では，移行過程を明示的に包摂した Cass の最適経済成長モデル〔3〕を中心として，最適経済成長の可能性を検討する．

ところで，この種の動学的厚生経済理論の端緒は，新古典派定理発見のはるか以前，Ramsey の論文〔9〕に求められる．既に1928年に，Cambridge 大学の青年数学者 Ramsey は最適経済成長の問題を厳密に論じていた．しかし，その直後に勃発した世界的大不況のためにか，あるいは一世代早期に過ぎた着想のためにか，彼の問題意識は長らく文庫の中に眠ったままであった．ところが，1950年代末期に入ると，幾つかの理由によって，彼の問題意識が大きく脚光を浴びるところとなった[2)]．Cass モデルはそうした流れの比較的初期段階に発表された最適経済成長の基礎理論である．

Cass モデルは基本的には Ramsey モデルを踏襲しているが，両モデルは次の諸点において相違している．（1）Ramsey は各世代を平等に処遇したのに対し，Cass は近接将来世代を優遇する．（2）Ramsey は純投資概念から出発したのに対し，Cass は総投資概念から出発する．（3）Ramsey は負の総投資を暗に容認した（＝可逆的投資）のに対し，Cass は負の総投資を認め

1)　以下においては，拙稿〔4〕での議論が前提とされる．

2)　我々の知る限りでは，Ramsey を蘇生させたのは Samuelson-Solow〔10〕である．

ない（＝非可逆的投資）．これら相違点のうち，（1）は倫理的思考にかかわる問題であり，その優劣を語ることは難しいが，（2）（3）については，Cass の想定の方が説得的であるように思われる．この意味から，我々は Cass モデルを Ramsey モデルの1つの発展化として理解する．

さて，最適経済成長理論そのものはある特定の経済システムを前提としているわけではない．それにもかかわらず，この分野の初期の文献は暗黙のうちに中央計画経済システムを前提としていると言っても過言ではない．Ramsey＝Cass モデルは正しくそのような構造を採っており，いわゆる混合経済システム下のモデルとは言い難い．もちろん，このモデルを混合経済システム下に応用することは可能であろう．しかし，そのような応用化は本稿の目的を超えるものである．

§1では，Cass モデルを紹介する．それは我々の今後の立論に好都合なように幾らか改訂されている．§2では，Cass の最適化問題の必要十分条件について述べる．§3では，Cass モデルの拡張のために，彼が取り上げなかったやや微細な論点について若干考察する．§4では，Cass の問題には最適解が一意的に存在することを，彼の論旨に沿って，明らかにする．我々は，Ramsey＝Cass モデルについて，もう少し議論を続行したいという気持を持っている．しかし，それについては別の機会に稿を改めることにし，本稿は未定稿のまま§4で閉じられる．

§1　Cass モデル

我々は純粋に労働力増大的な体化されない技術進歩を想定している（仮定1.6）．技術進歩が体化されないとすれば，仮定1.1により，過去から蓄積されてきた生産要素としての資本財と新たに生産される生産物としての資本財（＝投資財）とは全く同質的な物として取り扱われるので，その単位販売価格（＝単位供給価格）は等しいであろう．一方，単一生産物経済（仮定1.2）においい

ては消費財と投資財の単位販売価格は等しいと考えられる[1)]．したがって，本稿で考察されるモデル経済においては，ストックとしての資本財とフローとしての生産物の単位販売価格は等しいであろう．かくて，一般性を失うことなく，すべての財の単位販売価格を1とすることができる．まず，この点を念頭に置いて議論を進めることにする．

定義 2.1 社会厚生汎関数

仮定1.8.1を満たす一時的社会厚生関数（定義 1.7），すなわち

$$(1.27.1)\quad \begin{cases} u[\bar{c}(t)]=\varepsilon\bar{c}(t)^{\gamma}, & \varepsilon,\gamma=\text{const.}\neq 0,\ \gamma<1, \\ \varepsilon>0 \Longleftrightarrow 0<\gamma<1, & \varepsilon<0 \Longleftrightarrow \gamma<0 \end{cases}$$

に基づいて，最大化目標である社会厚生指標Wを汎関数

$$(2.1)\qquad W=\int_0^{\infty}u[\bar{c}(t)]e^{-\partial(t)t}dt$$

によって定義する．ここで，∂は一時的社会厚生指標uの時間割引率を意味し，それは一般に非負である．かくて，社会厚生指標Wとは，一時的社会厚生指標uの現在価値の全時間視野$[0,\ \infty)$にわたる総和（＝積分）によって表示される指標である．なお，$\bar{c}(t)$は時刻tにおける労働力1単位当たりの消費（定義 1.19）又は平均的消費主体（定義 1.16）の消費であり，消費をC，総消費主体量（＝人口）をN，その成長率をλ（仮定 1.9）とすると，

$$\bar{c}(t)=C(t)/N(t)\equiv C(t)/e^{\lambda t}$$

である．

さて，$c(t)$は時刻tにおける効率労働力1単位当たりの消費又は効率単位で測定した平均的消費主体の消費であり，労働効率をT，その成長率をτ（仮定 1.6）とすると，

1) Shell-Sidrauski-Stiglitzの論文〔11〕では，単一生産物が消費財又は投資財のどちらか一方のみに使用されるというような状況においては，消費財と資本財の単位（市場）価格が等しくないこともあり得ると考えられている．しかし，本稿では，単位販売価格（＝単位供給価格）といわゆる単位帰属価格（＝単位需要価格）とを区別する．我々の解釈では，単一生産物が一方の用途のみに使用される場合，不均等となっているかもしれない価格は単位帰属価格である．

$$c(t) \equiv C(t)/N(t)T(t) = C(t)/e^{(\lambda+\tau)t}$$

であることから，(1.27.1) を考慮すると，(2.1) は

$$(2.2) \qquad W = \int_0^\infty u[c(t)]e^{-[\partial(t)-\tau\alpha]t}dt$$

と書かれる．

ここで，以下の議論の単純化を図って，次のように仮定する．

仮定 2.1 時間割引率 ∂ は

$$(2.3) \qquad \begin{cases} [\forall t \in \boldsymbol{R}_{\oplus}] : \partial(t) = \partial = \text{const.} \\ \partial - \tau\gamma \equiv \delta > 0 \end{cases}$$

という関係を満たす[1]．

時間割引率不変の仮定は，一方では各世代の行為は同一の選好システムに基づいていることを暗に意味すると同時に，他方では選好システム同一性の仮説に対して矛盾することなしに設定することのできる唯一の仮定でもある[2]．もしかすると，各世代は同一の選好システムによって行動するとは限らないかもしれない．しかし，そのように考える場合には，我々は各将来世代の行動の基盤となる別の選好システムを明示するという必要に迫られる．これは倫理的思考にかかわる難問である．したがって，第一次接近としては，選好システム同一性の仮説の採用も許されるであろう．

一方，δ が正という仮定は，数学的には社会厚生汎関数Wを収束させるという効果を持つのに対し，経済学的には近接将来世代ほど優遇するという意味を持つと解釈することができる[3]．その理由は，技術進歩が将来世代に及ぼす優遇度を $\tau\gamma$ によって測定するものとすれば[4]，将来世代の一時的社会厚生指標の割引現在価値を導出する際の時間割引率 ∂ が $\tau\gamma$ である場合——このことは $\delta=0$ を意味する——に，そしてその場合にのみ，各世代の平等待遇が保証されるの

1) $\boldsymbol{R}_{\oplus}=[0,\ \infty)$，$\boldsymbol{R}_{+}=(0,\ \infty)$．
2) Ramsey〔9〕p. 553 を参照されたい．
3) 技術進歩がない，すなわち，$\tau=0$ という場合には，理由を説明するまでもない．
4) 仮定 1.8.1 すなわち (1.27.1) の下では，このような考え方は必ずしも不自然ではないように思われる．

に対し，時間割引率 ∂ が $\tau\gamma$ より大きい場合——このことは $\delta>0$ を意味する——には，各世代の平等待遇が保証される以上に将来世代の一時的社会厚生指標の割引現在価値が低く評価される，ということになるからである．

Koopmans〔5〕が指摘したように，近接将来世代優遇の仮説は各世代平等待遇の倫理的思考からは確かに逸脱している．しかし，そのことは各世代平等待遇の仮説が近接将来世代優遇の仮説よりも優れていることを保証するものではない．どちらの仮説を採用するかということは正しく価値判断にかかわる問題であって，簡単に結論を下すことはできない．我々は，δ がゼロの事例については別の機会に考察することにし，以下では（2.3）を仮定する．

定義 2.2　実行可能経路

今，生産関数

(1.19)　$y(t)=y[k(t)]$, $k(t)\in \boldsymbol{R}_{\oplus}$, $y(t)\in y(\boldsymbol{R}_{\oplus})\subset \boldsymbol{R}_{\oplus}$

が特性

$$(1.21)\quad \begin{cases} [\forall k(t)\in \boldsymbol{R}_{+}]: \\ y(\cdot)>0,\ y'(\cdot)>0,\ y''(\cdot)<0,\ y(\cdot)-ky'(\cdot)>0 \end{cases}$$

を持っているようなモデル経済を考える．このとき，資本財ストックの初期条件 $k_0\equiv k(0)\equiv K(0)$ から出発し，全時間視野 $[0,\ \infty)$ を通じて，関係

(1.32)　$y(\cdot)=c(t)+z(t)$, $k(t)$, $c(t)$, $z(t)\geqq 0$,

(1.33)　$\dot{k}(t)=z(t)-(\kappa+\lambda+\tau)k(t)$

を満たすような経済諸変数の時間経路（$y(t)$, $c(t)$, $z(t)$, $k(t)$）を実行可能経路又は実行可能計画という．なお，$y(t)$, $z(t)$ 及び $k(t)$ はそれぞれ時刻 t における効率労働力1単位当たりの，総生産（定義 1.10），総投質（定義 1.19）及び資本財ストックであり，総生産をY，総投資をZ，資本財ストックをKとすると，

$$y(t)=Y(t)/e^{(\lambda+\tau)t},\quad z(t)=Z(t)/e^{(\lambda+\tau)t},\quad k(t)=K(t)/e^{(\lambda+\tau)t}$$

である．また，κ は資本減耗率（仮定 1.9）である．

定義 2.3　C-(最適) 経路

仮定 1.1—1.7，1.8.1，1.9 及び2.1 の下で，社会厚生汎関数

(2.4) $\quad W=\int_0^{\infty}u(c)e^{-\delta t}dt$

を最大化するという意味で最適な実行可能経路を C-最適経路又は単に C-経路ということにする.

そうすると，Cass の問題とは C-経路の存在を検討するという問題である.

§2 C-最適経路の特性——必要十分条件——

社会厚生汎関数（2.4）を最大化するという形式の問題は変分学や最大値・最小値原理が中心的に取り扱ってきた問題であり，我々は既に知られている次の基本定理を証明する必要なしに利用することができる.[1]

基本定理 $k(t)$ を基本変数，$z(t)$ を操作（=制御）変数，$\phi(t)e^{-\delta t}$ を補助変数とすると，Hamiltonian が

(2.5) $\quad H=H\ (t,\ k,\ \phi,\ z)=[u(c)+\phi\dot{k}]e^{-\delta t}$

によって定義される.[2] このとき，C-最適経路上では，変数の組（t，k，ϕ，z）

1) Понтрягин (Pontriagin)-Болтянскии (Boltianskii)-Гамкрелидзе (Gamkrelidze)-Мишенко (Miščenco) の書物〔8〕が基本文献であり，同書の定理 3*（p. 63）及び pp. 197-199 の注意に対応する．この定理の一層初等的な証明については，Болтянскии (Boltianskii) の書物〔2〕pp. 276-277 の V.3., V.4. 及び pp.285-290 を参考にするとよい．ただし，〔2〕の定理を援用するためには，$u(c)>0$ つまり $\varepsilon>0$ かつ $0<\gamma<1$ を仮定する必要がある． ほかに解説書として，Athans-Falb〔1〕，杉山〔12〕，辻〔13〕等がある.

2) この Hamiltonian の形式はПонтрягин等〔8〕やБолтянскии〔2〕によって提示された形式と若干異なっている．彼らに忠実であるためには，新しい補助変数 ϕ_0 を追加して，

$$H=[\phi_0 u(c)+\phi\dot{k}]e^{-\delta t}$$

と書くべきである．Понтрягин 等〔8〕によって示された定理によれば，C-経路上では，ϕ_0 は定数であるがゼロとなることもあり得る． ところで，$\phi_0\equiv0$ となれば，Cass の問題は明示的には $u(c)$ に依存しなくなってしまう．Cass と共に我々は，そのような病理的問題に関心があるのではないから，$\phi_0\neq0$ とした．また，もし C-経路上の終端基本変数 $k(\infty)$ が正値であることがあらかじめ分かっているならば，実際，$\phi_0\neq0$ を証明することができる．ϕ_0 が非ゼロ定数ならば，Hは補助変数に関して線形であるから，一般性を失うことなく，$\phi_0\equiv1$ とすることができる．なお，これら諸点については，Athans-Falb の前掲書〔1〕の pp. 340-344 及び pp. 350-351 を参照されたい.

に対して，次の条件(A)(B)(C)が成立している．

(A)　C-最適経路に対応する操作変数を z とするとき，任意の実数 $z \in [0,\ y]$ に対して，

$$[\forall t \in \boldsymbol{R}_{\oplus}] : H(\cdot,\ z) \geqq H(\cdot, \tilde{z}),$$[1]

(B)　$$[\forall t \in \boldsymbol{R}_{\oplus}] : \partial H/\partial k \equiv H_k = -\frac{d}{dt}(\phi e^{-\delta t}),$$

(C)　$$\lim_{t \to \infty} k(t)\phi(t)e^{-\delta t} = 0.$$[2]

Cass の問題はこの基本定理を土台として解かれていく．しかし，その仕事に取りかかる前に，基本定理の各式に対する経済学的解釈を与えおこう．まず，ϕ を厚生指標測定の尺度で表示した投資財の単位帰属価格（＝単位需要価格）と解釈すると，H の［　］内は厚生指標測定の尺度で表示した効率労働力１単位当たりの，又は効率単位で測定した平均的消費主体の純生産（定義 1.19）の帰属価値額であり，H はその割引された価値額を示している．

(A)は，C-経路上では，全時間視野を通じて，所与の t，k 及び ϕ に対して，操作変数 z は割引された帰属純生産額 H を最大化するように選ばれる必要がある，ということを意味している．次に(B)は，C-経路上では，全時間視野を通じ

---

1)　この式の不等号の向きは補助変数（特に前ページ注 2）の ϕ_0）の符号の定め方と関連している．例えば，

$$H = -[u(c) + \phi\dot{k}]e^{-\delta t}$$

と定めれば，不等号の向きは逆になる．

2)　この条件は横断条件（transversality condition）又は境界条件（boundary condition）と呼ばれ，固定終端点問題以外の問題に特有の条件である．目下の問題では，終端基本変数は $\boldsymbol{R}_{\oplus}$ 上を自由に動き得るのであるが，C-経路上の終端基本変数が正値，つまり $k(\infty)$ が $\boldsymbol{R}_{\oplus}$ の内点，である場合には，この問題は自由終端点問題と全く同様に処理することができるので，$\lim_{t \to \infty} \phi(t)e^{-\delta t} = 0$ となる――なお，この点については，Athans-Falb の前掲書〔1〕pp. 306-307 の定理 5-6P，又は辻の前掲書〔13〕pp. 50-51 を参照されたい――．一方，C-経路上の終端基本変数がゼロ，つまり $k(\infty)$ が $\boldsymbol{R}_{\oplus}$ の境界点，である場合には，固定終端点問題と考えて，終端補助変数については無条件となる．これら諸点を勘案・総合すると，結局，横断条件は(C)のように書かれる．

て，割引された帰属純生産額Hに対する資本財の限界生産性と投資財の割引された単位帰属価格の変化率とは絶対値が等しく符号が異なる，ということを意味している．なお，このことは，投資財の単位帰属価格ϕの変化が完全に予測され得る，と暗に仮定していることになる．最後に(C)は，C-経路上では，終端時刻に向かうにつれて，資本財ストックの割引された帰属価値額はゼロに収束する，ということを意味している．

さて，基本定理はC-経路の必要条件をある程度一般的に述べたものであるが，以下の議論の便宜を図って，この定理を次のように書き換えておくことにする．

定理 2.1 C-最適経路上では，全期間視野を通じて，次の関係 (2.6) (2.7) (2.8) が成立する．

$$(2.6)\quad \begin{cases} \text{所与の変数 } t,\ k \text{ 及び } \phi \text{ に対して,} \\ (1)\quad \begin{cases} \phi > u'(y) \Rightarrow 0 < z < y \ \ \&\ \ \phi = u'(c), \\ 0 < z < y \Rightarrow u'(y) < \phi = u'(c), \end{cases} \\ (2)\quad \phi \leqq u'(y) \iff z = 0, \end{cases}$$

$$(2.7)\quad \begin{cases} \dot{\phi} = -u'(c)y'(k) + \xi\phi, \ \text{ただし,} \\ \xi \equiv \kappa + \lambda + \tau + \delta > 0, \end{cases}$$

$$(2.8)\quad \lim_{t\to\infty} k(t)\phi(t)e^{-\delta t} = 0.$$

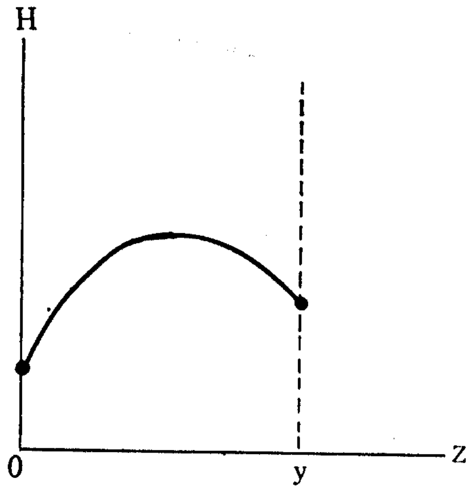
証明 (2.8) は基本定理の(C)そのものである．(1.32)(1.33) により (2.5) は

$$H = H(\cdot) = [u\{y(k) - z\} + \{z - (\kappa + \lambda + \tau)k\}\phi]e^{-\delta t}$$

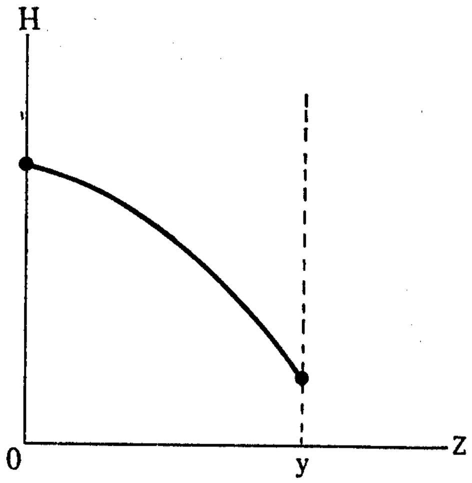
となる．ゆえに，(B)により直ちに (2.7) が得られる．更に，z の領域は $[0, y]$ であることと(A)とにより (2.6) が得られる（第 2.1 図及び第 2.2 図参照）[1]．なお，(A)は所与の $\phi(<\infty)$ に対して述べられているので，$u'(0)=\infty$ であることを考えると，$z=y$ つまり $\phi \geqq u'(0)$ は起り得ない．また，仮に $\phi=\infty$ を許容し得るとしても，この場合にはC-経路を特定することはできない．（証了）

1) Hは変数 $z \in (0,\ y)$ に関して凹関数となる．すなわち，

$$H_z = [\phi - u'(c)]e^{-\delta t},\quad H_{zz} = u''(c)e^{-\delta t} < 0.$$



第 2.1 図



第 2.2 図

系　C-最適経路上では，全時間視野を通じて，次の関係が成立する．

(2.9)　$\phi(t)>0$.

証明　ある時刻 t° に対して $\phi(t^\circ)\leqq 0$ となったとする．$0<c(t^\circ)<y(t^\circ)$ ならば，(1.32)(2.6) により $\phi(t^\circ)=u'[c(t^\circ)]>0$ となるので，$\phi(t^\circ)\leqq 0$ ならば $c(t^\circ)=y(t^\circ)$ である．そうすると，(2.7) によりすべての $t(>t^\circ)$ に対して $\phi(t)<0$ つまり $c(t)=y(t)$ となるので，t° 以後のある時刻を $t^{\circ\circ}$ とすると，

$$[\forall t>t^{\circ\circ}]:\phi(t)<\phi(t^{\circ\circ})e^{\xi(t-t^{\circ\circ})},\quad \text{ただし，}\phi(t^{\circ\circ})<0$$

が成立する．一方，すべての $t(>t^{\circ\circ})$ に対しては $c(t)=y(t)$ であったから，(1.32)(1.33) により

$$[\forall t>t^{\circ\circ}]:k(t)=k(t^{\circ\circ})e^{-(\xi-\delta)(t-t^{\circ\circ})}$$

が成立する．かくて，上の 2 つの関係により

$$\lim_{t\to\infty} k(t)\phi(t)e^{-\delta t}\leqq k(t^{\circ\circ})\phi(t^{\circ\circ})e^{-\delta t^{\circ\circ}}<0$$

となって，(2.8) が成立しない．　　(証了)

次の定理は，条件 (2.6) (2.7) (2.8) が十分条件にもなっていることを保証する．

定理 2.2　最適性の必要条件 (2.6)(2.7)(2.8) を満たす実行可能経路は C-最適経路となる．

証明 (2.6)(2.7)(2.8) を満たす実行可能経路を $\boldsymbol{F}=(y, c, z, k, \phi)$，それ以外の任意の実行可能経路を $\tilde{\boldsymbol{F}}=(\tilde{y}, \tilde{c}, \tilde{z}, \tilde{k})$ によって表す．更に，

$$y-\tilde{y}=\underline{y},\quad c-\tilde{c}=\underline{c},\quad z-\tilde{z}=\underline{z},\quad k-\tilde{k}=\underline{k}$$

と置くと，$c \neq \tilde{c}$ 又は $k \neq \tilde{k}$ ならば，

$$\begin{aligned}
&u(c)-u(\tilde{c})\\
&\quad \underset{(}{\geqq}{}_{)} u'(c)\underline{c} \qquad (1.27.1)\\
&\quad = u'(c)(\underline{y}-\underline{z}) \qquad (1.32)\\
&\quad \underset{(}{\geqq}{}_{)} u'(c)y'(k)\underline{k}-u'(c)\underline{z} \qquad (1.21)\\
&\quad = -[(\dot{\phi}-\delta\phi)\underline{k}-(\underline{z}-\dot{\underline{k}})\phi+u'(c)\underline{z}] \qquad (2.7)(1.33)\\
&\quad \geqq -[(\dot{\phi}-\delta\phi)\underline{k}+\dot{\underline{k}}\phi] \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

という関係が成立する．ゆえに，

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty [u(c)-u(\tilde{c})]e^{-\delta t}dt\\
&\quad > -\int_0^\infty [(\dot{\phi}-\delta\phi)\underline{k}+\dot{\underline{k}}\phi]e^{-\delta t}dt\\
&\quad = -[\underline{k}\phi e^{-\delta t}]_0^\infty\\
&\quad = \lim_{t\to\infty} \tilde{k}(t)\phi(t)e^{-\delta t} \qquad (2.8)\\
&\quad \geqq 0 \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

となる． (証了)

§3 若干の論点——Cass モデルの拡張のために——

この § では，C-最適経路の存在と一意性の問題に入る前段階として，Cass が取り上げなかった諸点について若干考察する．

Cass〔3〕は最初から，我々の記号法で書けば，

$(*)\quad [\forall k \in \boldsymbol{R}_+] : y(k)>0,\ y'(k)>0,\ y''(k)<0,$

$(\ast\ast)\quad y(0)=0,\ y'(0)=\infty,\ y'(\infty)=0$

と仮定することによって，暗に Cobb-Douglas 関数を想定していた（と解釈

することができる[1)]．本稿では，(*) は仮定されているが，(⁑) は仮定されていない．この意味において，本稿の考察範囲は Cass のそれよりも広範である．しかし一方では，そのことが新しい問題点を提起することになる．それに関連して，この § では，2つの補助定理を提示する．

補助定理 2.1 生産関数 (1.19) が (1.21) のほかに，関係

(2.10) $y(0)=0,$[2)] $y'(0)\leqq\xi$

を満たすならば，C-最適経路上では，次の関係が成立する．

(2.11) $\lim_{t\to\infty} c(t)=0,\ \lim_{t\to\infty} k(t)=0.$

証明 (2.10)を仮定すると，C-経路上では，〈1〉 c は常に下落していること，〈2〉 c がある正定値に収束することはないこと，〈3〉 k は常に下落していること，〈4〉 k がある正定値に収束することはないことを示す．なお，所与任意時刻を $t°\in\boldsymbol{R}^{\oplus}$ とするとき，ここでの議論に関する限り，C-経路上の k について，$k(t°)>0$ と置くことができる．〈1〉: $t°$ において (2.6.1) が成立した場合には，(2.7)(2.9)(2.10) により $\dot{\phi}(t°)>0$ であるから，(2.6)の関係を維持するためには $\dot{u}'[c(t°)]>0$ が必要であり，それゆえ (1.27.1) により $\dot{c}(t°)<0$ が必要となる．一方，$t°$ において (2.6.2) が成立した場合には，もし z が $t°$ において微分可能ならば，$z(t°)=0,\ z(t)\geqq0$ 及び (1.33) により $\dot{z}(t°)=0$ かつ $\dot{k}(t°)<0$ となるので，(1.32) により

① $\dot{c}(t°)=\dot{y}(t°)-\dot{z}(t°)=y'[k(t°)]\dot{k}(t°)-\dot{z}(t°)<0$

となる．(2.6.2) が成立したときに，もし z が $t°$ において微分不能ならば，それは，(a) $z(t°+0)>z(t°)=0$ か，(b) $z(t°+0)=z(t°)=0$ かつ $\dot{z}(t°+0)>$

1) 前掲論文〔3〕の p. 233 の(2)(3)式及び p. 236 の(20)式．性質 (*)(⁑) を持つ生産関数を Cobb-Douglas 関数と断定するのは行き過ぎかもしれない．なぜなら，Cobb-Douglas 関数は (*)(⁑) の十分条件であるにすぎないからである．しかし，(*)(⁑) は通常の意味での CES 関数を意味しないだけではなく，性質 (*) を持つ生産関数であって Cobb-Douglas 関数でも CES 関数でもない生産関数は，経済学の文献においては，余り普及していないように思われる．

2) 拙稿〔4〕の (1.23) 式を参照されたい．

0，を意味している[1]．(b)の場合には，①と全く同様にして，

② $\dot{c}(t^\circ+0)=y'[k(t^\circ+0)]\dot{k}(t^\circ+0)-\dot{z}(t^\circ+0)<0$

となる．(a) の場合には，z は t° において不連続になっているのであるが，(1.32) により

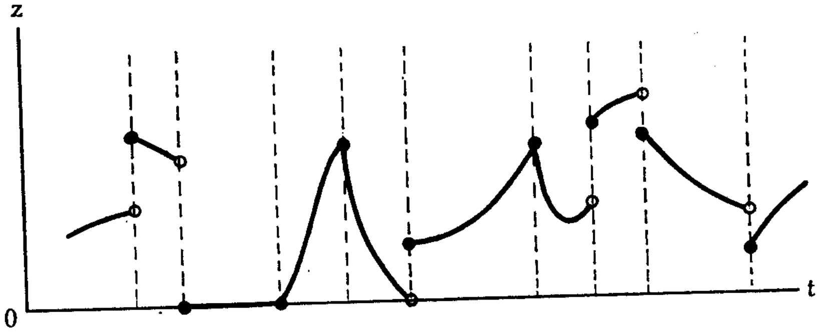
③ $c(t^\circ)+z(t^\circ)=y[k(t^\circ)]=y[k(t^\circ+0)]=c(t^\circ+0)+z(t^\circ+0)$

であるから，$c(t^\circ+0)<c(t^\circ)$ となる．〈2〉：C-経路上で $c(\infty)=c^\circ=$正定値ならば，十分大きい t° を適当に与えると，すべての $t(>t^\circ)$ に対して，$u'(c)\fallingdotseq u'(c^\circ)=$正定値となるので (2.6.1) は生じ得ず，(2.6.2) すなわち $z=0$ かつ $\dot{z}=0$ が成立し，その結果 (1.33) により $k(\infty)=0$ となる．そうすると (1.32)(2.10) により $c(\infty)=0<c^\circ$ となるが，これは矛盾である．〈3〉：C-経路上において $\dot{k}(t^\circ)\geqq 0$ かつ $\dot{k}(t^\circ+0)<0$ となったならば，(1.33) と $k(t^\circ)=k(t^\circ+0)$ とにより $z(t^\circ+0)<z(t^\circ)$ であるから，③を考慮すると $c(t^\circ+0)>c(t^\circ)$ となっている．しかしこれは〈1〉を満たさないので，C-経路上では，一度 $\dot{k}(t^\circ)\geqq 0$ となるとそれ以後は $\dot{k}\geqq 0$ となる必要がある．ところで，このときには，(1.33) により $z>0$ であるから，(2.6) により $\phi=u'(c)$ が成立している．そしてこのことはまた，〈1〉〈2〉により $c(\infty)=0$ かつ $z(\infty)=y[k(\infty)]$ をも意味している．ゆえに，(1.21)(1.33)(2.2)(2.9) により，十分大きい t° を適当に与えるとき，すべての $t(>t^\circ)$ に対して，

④ $\dfrac{d}{dt}(k\phi)=\dot{k}\phi+k\dot{\phi}=[z-ky'(k)]\phi+\delta k\phi>\delta k\phi$

---

1) 一般に，$z(t)$ は区分的に連続な関数（下図参照）である．



つまり

$$k\phi > k(t^{\circ})\phi(t^{\circ})e^{\delta(t-t^{\circ})}$$

となるので，

$$\lim_{t\to\infty} k(t)\phi(t)e^{-\delta t} > k(t^{\circ})\phi(t^{\circ})e^{-\delta t^{\circ}} > 0$$

となり，(2.8) が成立しない．かくて，C-経路上では，すべての t に対して，$\dot{k}<0$ である．〈4〉：〈3〉の④以下の説明を反復してみれば，C-経路上では，k が正定値に収束するということは起り得ないことが容易に分かる．（証了）

補助定理 2.1 は，(2.10) の下では，C-経路上の y，c，z 及び k はゼロに収束するということを明らかにしている．経済学的には，このことは，時間割引率 ∂ あるいは δ がある意味で余りにも大き過ぎる，換言すると，生産関数との相対的な意味において中央計画局ないし人々の選好が将来世代によりも現世代に偏重であるために，総生産のうちの過大なまでの部分が経常消費に充てられる結果，資本財が十分に蓄積されず，将来世代に残される消費がますます小さくなっていく，ということを意味している．

補助定理 2.2 生産関数（1.19）が（1.21）のほかに，関係

(2.12) $y'(\infty) \geqq \xi$

を満たすならば，C-最適経路上では，次の関係のいずれかが成立する．

(2.13.1) $\lim_{t\to\infty} c(t) = y(0)$, $\lim_{t\to\infty} k(t) = 0$,

(2.13.2) $\lim_{t\to\infty} c(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} k(t) = \infty$.

証明 任意時刻 t° を所与とするとき，C-経路上では $k(t^{\circ})>0$ であると考えておく．(2.13.1) の場合：C-経路上で t° において (2.6.2) が成立したとする．このときには，(1.21)(1.27.1)(1.33) により $\dot{u}'[y(k(t^{\circ}))]>0$ となる一方，(2.12)(2.7) により $\dot{\phi}(t^{\circ})<0$ となるので，$\phi<u'(y)$ という関係が持続する．したがって，C-経路上では (2.6.2) すなわち $z=0$ が持続し，(2.13.1) を得る．(2.13.2) の場合：一般性を失うことなく，C-経路上では (2.6.1) が持続していると考えてよい．そのためには，(2.7)(2.12) により，す

べての $t \in \boldsymbol{R}_{\oplus}$ に対して，$\dot{\phi}=\dot{u}'(c)<0$ つまり $\dot{c}>0$ でなければならない.[1] 一方，(1.32)(1.33) により

① $\ddot{k}=\dot{z}-(\kappa+\lambda+\tau)\dot{k}=[y'(k)-(\kappa+\lambda+\tau)]\dot{k}-\dot{c}$

であるから，(2.12) 及び $\dot{c}>0$ により，一度 $\dot{k}(t^{\circ})\leqq 0$ となると，すべての $t(>t^{\circ})$ に対して $\dot{k}<0$ となる．そしてこのときには，k がある正定値に収束することもあり得ない．かくて，一度 $\dot{k}(t^{\circ})\leqq 0$ となると，$k(\infty)=0$ となる．ところで，$k(\infty)=0$ は (1.32) とあいまって $c(\infty)\leqq y(0)$ を意味するのに対し，(2.6.1)(2.7)(2.9)(2.12) は (1.27.1) とあいまって $c(\infty)=\infty$ を意味する．これは矛盾である．ゆえに今証明している事例においては，C-経路上では常に $\dot{k}>0$ となっている．ここで再び①と $\dot{c}>0$ とを考慮すると，k がある正定値に収束することはあり得ない．かくて (2.13.2) が証明された．(証了)

補助定理 2.2 は，(2.12) の下では，C-最適経路上の c，z 及び k は，(a)ある t° 以後 $z=0$ すなわち $\phi\leqq u'(y)$ となる結果ゼロに収束するか，(b) $\phi>u'(y)$ を持続する結果無限大に発散するか，のいずれかであることを示している．(b) に対しては，時間割引率 ∂ あるいは δ がある意味で余りにも小さ過ぎる，換言すると，生産関数の形状との相対的な意味において中央計画局ないし人々の選好が現世代によりも将来世代に偏重であるために，総生産のうち経常消費に充てられる部分が相対的に極めてわずかであり，過大なまでの資本形成がある結果，ますます多くの消費が将来世代に残されていく，という経済学的な意味付けが与えられる．一方(a)は，一時的社会厚生関数 (1.27.1) の形状のゆえに，(2.6.1) と (2.7) とがいつかは両立し得なくなるときに生ずるであろう．生産関数，一時的社会厚生関数そして時間割引率の関係が，経済学的意味付けを与えるのに必ずしも十分適切ではない事例であると考えられる．

1) 目下のところでは，(2.6.1) が持続することと (2.7) とにより c は連続的に微分可能であり，かくて (1.32) により z もまた連続的に微分可能である．

§4　C-最適経路の存在と一意性

定義 2.4　C-定常（最適）経路

効率労働力1単位当りの資本財ストック $k(t)$（＝基本変数）及び厚生指標測定の尺度で表示した投資財の単位帰属価格 $\phi(t)$（＝補助変数）が全時間視野を通じて一定不変，すなわち $\dot{k}=0$ かつ $\dot{\phi}=0$，であるような特異 C-最適経路が存在するとき，それを C-定常最適経路又は単に C-定常経路と呼び，$\boldsymbol{F}^*=(y^*,\ c^*,\ z^*,\ k^*,\ \phi^*)$ で表す.

さきに提示した補助定理 2.1 と 2.2 のいずれの事例においても，C-定常経路は存在せず，また当然のことながら，C-定常経路に収束する C-経路も存在しなかった．この意味から言うと，条件（2.10）又は（2.12）は不均斉最適成長の可能性を示唆している．したがってそれはそれとして興味深い帰結であると言えるのかもしれないが，ここでは，Ramsey=Cass の問題に立ちもどるためにも，新古典派定理との対比のためにも，仮定 1.10 に代替する仮定を採用する．次の仮定は，C-定常経路の存在を保証すると同時に，任意の正値初期条件 k_0 に対して，C-定常経路に収束する C-経路の存在を保証するものである.

仮定 2.2　生産関数（1.19）は（1.21）のほかに，次の関係を満たしている.

(2.14)　$y'(\infty)<\xi\equiv\kappa+\lambda+\pi+\delta<y'(0)$.[1]

補助定理 2.3　仮定 1.1—1.7，1.8.1，1.9，2.1 及び 2.2 の下では，C-定常最適経路 $\boldsymbol{F}^*$ が一意的に存在する.

証明　(1.32)(1.33)(2.6)(2.7) に基づいて考える．$k=0$ ならば，$z=0$，$c=y(0)$ となるが，このときには (2.6.2)(2.7)(2.14) により $\dot{\phi}<0$ となる．したがって，C-定常経路が存在するとすれば，$k^*>0$ である．この点を考えて，

1）拙稿〔4〕の仮定 1.10 に対する脚注を参照されたい.

$$(2.15)\quad \begin{cases} y'(k^*)=\xi, \\ y^*=y(k^*), \\ z^*=(\kappa+\lambda+\tau)k^*>0, \\ c^*=y^*-z^*>0, \\ \phi^*=u'(c^*)>0 \end{cases}$$

によってベクトル $(y^*,\ c^*,\ z^*,\ k^*,\ \phi^*)$ を定義すると，この経路は確かにC-定常経路である．しかも，(1.21) により k^* は一意的に定まるので，C-定常経路は一意的である．　(証了)

補助定理 2.4 C-定常最適経路 $\boldsymbol{F}^*$ の適当な近傍を定義域とする (2.6) を満たす連立微分方程式系

$$(2.16)\quad \begin{cases} \dot{k}=z-(\kappa+\lambda+\tau)k, \\ \dot{\phi}=-u'(c)y'(k)+\xi\phi \end{cases}$$

に対して，特異点 $(k^*,\ \phi^*)$ はとうげ点 (saddle point) となる.

証明 補助定理 2.3 に示されているとおり，C-定常経路上では $0<z^*<y^*$ であるから，C-定常経路のごく近傍——そこでは $0<z<y$ —— においては，(1.32) をも考慮すると，(2.6) は $\phi=u'(c)=u'[y(k)-z]$，すなわち

$$(2.17)\quad \begin{cases} z=z(k,\ \phi),\ \text{ただし},\ \phi=u'(c), \\ z_k\equiv\partial z/\partial k=y'(k),\ \ z_\phi\equiv\partial z/\partial\phi=-1/u''(c), \end{cases}$$

という関係が成立することを示している．したがって，(2.17) を満たすような C-定常経路の開近傍によって (2.16) を定義すると，(2.16) は

$$(2.18)\quad \begin{cases} \dot{k}=z(k,\ \phi)-(\kappa+\lambda+\tau)k \\ \dot{\phi}=-[y'(k)-\xi]\phi \end{cases}$$

と書かれる．(2.18) を $(k^*,\ \phi^*)$ の回りで展開し 2 次以後の項を無視すると，$(k^*,\ \phi^*)$ の開近傍における線形微分方程式系が得られ，その 1 次の項の係数は

$$\dot{k}_k{}^*=\delta,\quad \dot{k}_\phi{}^*=-1/u''(c^*),$$
$$\dot{\phi}_k{}^*=-y''(k^*)\phi^*,\quad \dot{\phi}_\phi{}^*=0$$

となっている[1]. Jacobian をJ，単位行列をE

$$J=\begin{pmatrix} \dot{k}_k^*, & \dot{k}_\phi^* \\ \dot{\phi}_k^*, & \dot{\phi}_\phi^* \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

と置くと，固有方程式は

$$|xE-J|=0$$

によって与えられる．ここで，xは固有根である．これを整理すると，

$$x=\frac{1}{2}[\delta\pm\sqrt{\delta^2+\{4y''(k^*)\phi^*/u''(c^*)\}}]$$

となるが，1根は正，1根は負であることから，$(k^*,\ \phi^*)$ はとうげ点となる．

（証了）

補助定理2.4により $(k^*,\ \phi^*)$ がとうげ点であることが示されたが，とうげ点の近傍における体系（2.18）の経路の状態については，次の微分方程式論の定理を利用することができる．

定理※[2] 時と共に $(k^*,\ \phi^*)$ に収束する微分方程式系（2.18）の2つの解経路が存在し，これに $(k^*,\ \phi^*)$ を付け加えると，微分可能な連続曲線 S^+ が得られる．

定理※を参考にすることによって次の定理が導かれる．

定理 2.3 仮定 1.1—1.7，1.8.1，1.9，2.1 及び 2.2 の下では，任意の正値初期条件 k_0 に対して，C-最適経路 $F=(y,\ c,\ z,\ k,\ \phi)$ が一意的に存在し，しかもこの経路は時と共に C-定常最適経路 F^* に収束する．

証明 まず，(2.18) において $\dot{k}\equiv 0$ を満たす関数 $\phi(k)|_{\dot{k}\equiv 0}$ を考えると，(1.21) により

$$\phi'(k)|_{\dot{k}\equiv 0}=[y'(k)-(\kappa+\lambda+\tau)]u''(c)\gtreqqless 0 \text{ as } k\lesseqqgtr\check{k}$$

が得られる．ただし，

$$k\in R_{\oplus},\quad y'(\check{k})=\kappa+\lambda+\tau$$

1) 例えば，$\dot{k}_k^*\equiv\frac{\partial}{\partial k}\dot{k}(k^*,\ \phi^*)$.

1) Понтрягин(Pontriagin)〔7〕p. 244，占部〔14〕pp. 73-74 を参照されたい．

とする.[1] (2.17)(2.18) を見ると，$\phi(k)|_{\dot{k}\equiv 0}$ 曲線の上方では $\dot{k}>0$, 下方では $\dot{k}<0$ となることが容易に分かる．次に，(2.6)(2.7) 及び $\dot{\phi}\equiv 0$ を満たす関数 $\phi(k)|_{\dot{\phi}\equiv 0}$ を考えると，(1.21)(2.15) により

$$\begin{cases} \dot{\phi}\equiv 0\ \&\ 0<z<y \Rightarrow k=k^*\ \&\ \phi=u'(c), \\ z=0 \Rightarrow \begin{cases} \phi(k)|_{\dot{\phi}\equiv 0}=u'(y)y'(k)/\xi \lesseqgtr u'(y)\ \text{as}\ k\gtreqless k^*, \\ \phi'(k)|_{\dot{\phi}\equiv 0}<0 \end{cases} \end{cases}$$

が得られる．そして (2.6)(2.7) を見ると，$\phi(k)|_{\dot{\phi}\equiv 0}$ 曲線の左側では $\dot{\phi}<0$, 右側では $\dot{\phi}>0$ となることが容易に分かる．以上の考察によって，任意の正値初期条件 k_0 に対して，定理※の経路 S^+ を採ると[2]，正値初期条件 $\phi_0\equiv\phi(0)$ が一意的に確定する．そして，$(k_0,\ \phi_0)$ を初期条件とする経路は時と共に$(k^*,\ \phi^*)$ に収束する（第2.3図参照）.[3),4)] S^+ は最適性の必要条件をすべて満足する経路であるから，証明は完了している．　（証了）

この § の最後に，補助変数 ϕ （＝厚生指標測定の尺度で表示した投資財の単位帰属価格）の特質について若干考察しておこう.[5]

---

1) 条件 (2.14) の限りでは，$\check{k}$ の存在は必ずしも保証されない．なお，もし

$$y(0)=0,\ [\exists k^\circ \in \boldsymbol{R}_+]:\ y(k^\circ)=(\kappa+\lambda+\tau)k^\circ$$

が成立するならば，

$$\lim_{k\to 0}\phi(k)|_{\dot{k}\equiv 0}=\infty,\quad \lim_{k\to k^\circ}\phi(k)|_{\dot{k}\equiv 0}=\infty$$

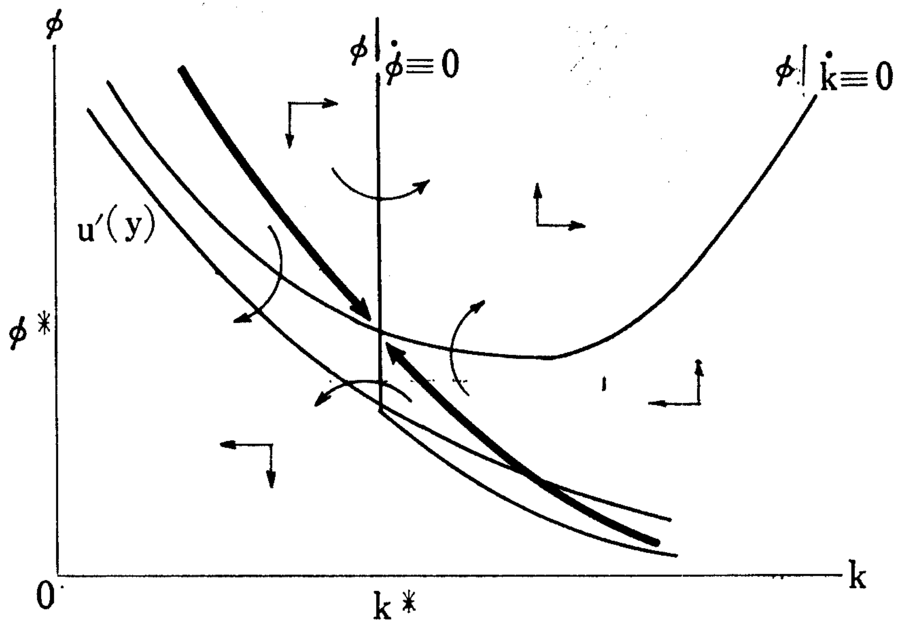
となる．

2) S^+ 経路そのものは $(k^*,\ \phi^*)$ のある適当な開近傍上で定義されたものであった．したがって，k_0 がその開近傍内の k の領域に属さない場合には，ϕ_0 を定義することはできないのではないかという疑問が生ずるかもしれない．しかし，S^+ 経路の後進経路 (backward path) をも S^+ 経路であると解釈すれば，この疑問は解消する．

3) 第 2.3 図は $\phi|_{\dot{k}\equiv 0}$ 及び $\phi|_{\dot{\phi}\equiv 0}$ の2次導関数の符号を考慮せずに描かれており，その意味では必ずしも正確なものではない．しかし，2次導関数の符号は議論の帰結に何らの重要な影響も及ぼさないであろう．

4) 第 2.3 図からも (2.9) が視覚的に導出される．

5) この § の以下の議論は大規〔6〕p. 38 の議論を少し一般化したものである．



第 2.3 図

注意 k_0 を初期条件とする C-経路を

$$F(t,\ k_0)=(y(t,k_0),\ c(t,k_0),\ z(t,k_0),\ k(t,k_0),\ \phi(t,k_0)),$$

$$F(0,\ k_0)=(y_0,\ c_0,\ z_0,\ k_0,\ \phi_0)$$

と書き，また，

$$W[t,\ k(t,\ k_0)]=\int_t^{\infty} u[c(t,\ k(t,\ k_0))]e^{-\delta t}dt$$

と置くとき，次の関数が成立する.

(2.19)　$[\forall t\in \boldsymbol{R}_{\oplus}]:\phi[t,\ k(t,\ k_0)]e^{-\delta t}=W_k[t,\ k(t,\ k_0)].$

証明 今，異なる2つの初期条件を k_0 と $\hat{k_0}$ とする. 定理2.2を証明したときと全く同様の方法を2回繰り返すことによって，すべての $t\in \boldsymbol{R}_{\oplus}$ に対して，関係

$$\begin{aligned}&\phi[t,\ k(t,\ \hat{k_0})][k(t,\ \hat{k_0})-k(t,\ k_0)]e^{-\delta t}\\ &\quad<W[t,\ k(t,\ \hat{k_0})]-W[t,\ k(t,\ k_0)]\\ &\quad<\phi[t,\ k(t,\ k_0)][k(t,\ \hat{k_0})-k(t,\ k_0)]e^{-\delta t}\end{aligned}$$

が導かれる. S^+ は連続であることから，結局，W は $k(t,\ k_0)$ において偏微分可能となって結論が得られる. なお，言うまでもなく，

$$W_k[t,\ k(t,\ k_0)]\equiv\lim_{k(t,\hat{k_0})\to k(t,k_0)}\left\{\frac{W[t,\ k(t,\ \hat{k_0})]-W[t,\ k(t,\ k_0)]}{k(t,\ \hat{k_0})-k(t,\ k_0)}\right\}$$

である.　（証了）

(2.19)の意味するところは，所与の効率労働力1単位当りの初期資本財ストック k_0 に対して，C-経路上では，全時間視野を通じて，厚生指標測定の尺度で表示した投資財の割引された単位帰属価格は効率労働力1単位当りの資本財の限界社会厚生に等しい，ということである.

参　考　文　献

〔1〕 Athans, M.-Falb, P. L., *Optimal Control : An Introduction to the Theory and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1966.

〔2〕 Болтянский, В. Г. (Boltianskii, V. G.), *Математические методы оптимального управления*, Наука, Москва 1967. （坂本実訳『最適制御の数学的方法』，総合図書，1968.）

〔3〕 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *Rev. Econ. Stud.*, **32** (1965), 233-240.

〔4〕 福尾洋一，"生産関数と厚生関数についての若干の覚書"，経済学論究 **28** (1) (1974), 77-109.

〔5〕 Koopmans, T. C., "Objectives, Constraints, and Outcomes in Optimal Growth Models," *Econometrica*, **35** (1967), 1-15.

〔6〕 大規芳孝，"一部門成長モデルにおける最適成長"，研究年報・経済学 **31** (**1**) (1969), 34-48.

〔7〕 Понтрягин, Л. С. (Pontriagin, L. S.), *Обыкновенные дифференциальные уравненения*, Наука, Москва, 1965. (千葉克裕訳『常微分方程式』，共立出版，1968).

〔8〕 Понтрягин, Л. С. (Pontriagin, L. S.)-Болтянскии, В. Г. (Boltianskii, V. G.)-Гамкрелидзе, Р. В. (Gamkrelidze, R. V.)-Мишенко, Е. Ф. (Miščenco, E. F.), *Математическая теория оптималых процессов*, Физматгиз, Москва, 1961. (関根智明訳『最適過程の数学的理論』，総合図書，1967).

〔9〕 Ramsey, F. P., "A Mathematical Theory of Saving," *Econ. J.*, **38** (1928), 543-559.

〔10〕 Samuelson, P. A.-Solow, R. M., "A Complete Capital Model Involving Heterogeneous Capital Goods," *Quar. J. Econ.*, **70** (1956), 537-562.

〔11〕 Shell, K.-Sidrauski, M.-Stiglitz, J. E., "Capital Gains, Income and Saving," *Rev. Econ. Stud.* **36** (1969), 15-26.

〔12〕 杉山昌平『最適問題』, 共立出版, 1967.

〔13〕 辻節三『最適制御概論』, 養賢堂, 1971.

〔14〕 占部実『非線形問題——自励振動論——』, 共立出版, 1968.