相関係数と回帰係数

井　上　勝　雄

§1

この§では相関係数と回帰係数の定義，およびそれらのデータ解析上の意味について記述統計的に考察する．

1.1　いま，変量 X_1 と X_2 の T 個のデータ $(x_{1t},\ x_{2t})$ $(t=1 \cdots\cdots T)$ が得られたとする．変量 X_1，X_2 の因果関係や，影響の方向を考えないで，2変量間の関係の強弱を表わす概念を相関係数によって表わす．例えば，月々の平均気温とビールの消費量であるとか，各家計における世帯主の年令とその家計における平均月収，あるいは財政支出における土木建築費と教育費等のように，必ずしも原因結果の関係としてみることより，関係の有無，つまり相関関係の強弱を問題とするとき，その2変量の相関係数 r_{12} を

(1.1)
$$r_{12}=\frac{\sum_t (x_{1t}-\bar{x}_1)(x_{2t}-\bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_t (x_{1t}-\bar{x}_1)^2\cdot\sum_t (x_{2t}-\bar{x}_2)^2}}$$

(1.2)
$$\bar{x}_1=\frac{1}{T}\sum_t x_{1t}\ ,\quad \bar{x}_2=\frac{1}{T}\sum_t x_{2t}$$

で表わす．

相関係数 r_{12} は

(1.3)
$$-1\leqq r_{12}\leqq 1$$

なる値をとることは容易に示せる．

上に定義した相関係数 r_{12} は，X_1，X_2 の相関の強弱を表わすが，たとえば，

$$x_{1t}=kx_{2t}+h \qquad (k>0)\quad (t=1,\cdots,T)$$

ならば $r_{12}=1$ であり，

$$x_{1t} = -kx_{2t}+h \qquad (k>0) \quad (t=1, \cdots, T)$$

ならば $r_{12}=-1$ となることからわかるように，X_1，X_2 が完全な線型関係にあるとき，最も相関があることになる．これは，相関係数が1あるいは -1 であるか，またはそれらの値に近い2変量 X_1，X_2 は線型関係が強いということを示すに過ぎない．

他方，相関係数が0あるいは0に近い値ということは，線型関係が弱いということを表わしているのであって，2変量 X_1，X_2 が無関係である，とかあるいは関係がほとんどないということを意味するのではない．

たとえば，変量 X_1，X_2 のデータが次のように得られたとしよう．

X_1；	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
X_2；	9.0	5.5	3.0	1.5	1.0	1.5	3.0	5.5	9.0

この場合，相関係数は0となり一見無相関に考えられるが，上のデータを散布図に描いても明かになるようにこの2変量は完全な2次の関係にあって[1]，線型相関にはないが，2変量は関係ないとはできない．

上の例からもわかるように，相関係数 r_{12} は線型相関の強弱を判定するものであることには注意しなければならない．

1.2 相関係数 r_{12} は変量 X_1，X_2 の線型関係の強弱を判定するものと考えられ，その際，因果関係を必ずしも問題としない．一方，変量 X_1，X_2 の原因結果の関係，あるいは影響の方向性をも考え合わせるのが回帰係数と考えられる．

変量 X_2 を原因として変量 X_1 を結果すると考えたとき，

$$X_1 = \beta_{10}+\beta_{12} X_2 \tag{1.4}$$

なる関係を想定し係数 β_{10}，β_{12} を X_1 の X_2 への回帰係数と言う．β_{10}，β_{12} は通常最小二乗法で求める．最小二乗法の原理は以下の様である．

T個のデータ (x_{1t}, x_{2t}) $(t=1, \cdots, T)$ は一般的には上述のような厳密な線型

1) (x_{1t}, x_{2t}) は $x_{2t}=0.5(x_{1t}-5.0)^2+1.0$ なる関係を満たす．

関係にない．そこで，

$$x_{1t} = b_{10} + b_{12} x_{2t} + u_t \qquad (t=1, \cdots, T) \tag{1.5}$$

と誤差項 u_t を導入して，

$$\sum_{t=1}^{T} u_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (x_1 - b_{10} - b_{12} x_{2t})^2 \tag{1.6}$$

を最小なるよう，b_{10}，b_{12} を決定する．b_{10}，b_{12} は，

$$b_{10} = \bar{x}_1 - b_{12} \bar{x}_2 \tag{1.7}$$

$$b_{12} = \frac{\sum (x_{1t} - \bar{x}_1)(x_{2t} - \bar{x}_2)}{\sum (x_{2t} - \bar{x}_2)^2} \tag{1.8}$$

と導出できる．

例えば，各家計の所得水準と消費水準との関係で，その影響の方向性は所得水準に応じて消費水準が決まるということであろう．あるいは費用関数においてその影響の方向性は，生産量水準から費用水準を導くことになるだろう．これらの例の場合，消費水準の所得水準への回帰係数あるいは費用の生産量水準への回帰係数は，結果たる変量の変動を原因になる変量の変動が与える影響の大きさを表わしている．つまり，その原因になる変量が結果たる変量へ与える影響の大きさを示している．

一方，各々の変量を，それぞれの平均からの変差で分析するならば，当初より

$$x_{1t} - \bar{x}_1 = b_{12}(x_{2t} - \bar{x}_2) + u_t \tag{1.9}$$

で考察していることになり，やはり，最小二乗法の原理によって，b_{12} は(1.8)に示されるように得られる．

また，原因結果の方向性を上では変量 X_2 から変量 X_1 へと考えたが，この方向性を逆にして X_1 から X_2 へと考えると，X_2 の X_1 への回帰係数 b_{21} は，

$$b_{21} = \frac{\sum (x_{1t} - \bar{x}_1)(x_{2t} - \bar{x}_2)}{\sum (x_{1t} - \bar{x}_1)^2} \tag{1.10}$$

となり，明かに，一般的には $b_{12} \neq b_{21}$ である．

回帰係数を求めるとき，注意しなければならないのは，データを分析する際に，どの変量を原因とし，どの変量を結果とするかという先験的な仮説が必要になる．さらに，その定式化からも明らかになる様に，回帰係数は相関係数の場合と同様に，線型関係における影響の大きさを与えるのであって，非線型の関係式における説明の仕方については何ら情報を与えないのである．[1)]

1.3 先の相関係数，回帰係数の定義においては2変量間のそれらである．次に3変数あるいはそれ以上についての相関係数，回帰係数の概念に拡張しよう．

先述の変量 X_1，X_2 の単純相関係数や X_1 の X_2 への単純回帰係数の定義においても常に変量の取り扱いはそれぞれの平均からの偏差でなされてきた．それは，たとえば相関係数の場合，変量 X_1，X_2 のそれぞれ固有の平均的な水準 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$ からの変動の関係で把えるものであった．単純回帰係数 b_{12}，b_{21} の場合も同様である．したがって，これより以下では，特に明記しない限り，変数 x_{1t}，$x_{2t}\,(t=1, \cdots T)$ はすべて平均からの偏差を表わしていることにする．つまり，先の r_{12}，b_{12}，b_{21} は，

$$(1.11)\qquad r_{12}=\frac{\sum x_{1t}\,x_{2t}}{\sqrt{\sum x_{2t}{}^2\cdot\sum x_{2t}{}^2}}$$

$$(1.12)\qquad b_{12}=\frac{\sum x_{1t}\,x_{2t}}{\sum x_{2t}{}^2}$$

$$(1.13)\qquad b_{21}=\frac{\sum x_{1t}\,x_{2t}}{\sum x_{1t}{}^2}$$

と記す．さらに記号の簡単化のため

$$(1.14)\qquad m_{ij}=\sum_{t=1}^{T}x_{it}\,x_{jt}\qquad (i,\ j=1,\ 2)$$

と定義することによって，

1) 厳密に言えば，パラメータの線型性であって，たとえば，$\alpha\log x+\beta$ や $\alpha x^2+\beta x$ 等は $\log x$ や x^2 を一変量と扱い得る場合は，この限りではない．

(1.15) $$r_{12}=\frac{m_{12}}{\sqrt{m_{11}\,m_{22}}}$$

(1.16) $$b_{12}=\frac{m_{12}}{m_{22}}$$

(1.17) $$b_{21}=\frac{m_{12}}{m_{11}}$$

と表現できる.

さて, 3変量 X_1, X_2, X_3 における X_1 と X_2 の相関係数は次の様に定義される. 変量 X_1 の変動のうち X_3 で影響される変動を除いた部分と X_2 の変動のうち X_3 で影響される変動を除いた部分との関係の強弱を表わす尺度として把握される. つまり $(x_{1t}-b_{13}\,x_{3t})$ と $(x_{2t}-b_{23}\,x_{3t})$ $(t=1,\cdots T)$ との相関係数を変量 X_1 と X_2 の偏相関係数 $r_{12\cdot3}$ という. したがって, $r_{12\cdot3}$ は,

(1.18) $$r_{12\cdot3}=\frac{\sum(x_{1t}-b_{13}\,x_{3t})(x_{2t}-b_{23}\,x_{3t})}{\sqrt{\sum(x_{1t}-b_{13}\,x_{3t})^2\sum(x_{2t}-b_{23}\,x_{3t})^2}}$$

である. 偏相関係数 $r_{12\cdot3}$ のデータ解析上の意味は既に明かなように, X_1, X_2 のそれぞれから X_3 によって影響される変動部分を除いたそれぞれの変動にどの程度の相関があるかを表現するのであり, X_1, X_2 の X_3 に依存する変動をそれぞれの X_3 への線型回帰によって測定するものである. 一方, 計算することによって,

(1.19) $$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}\,r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\,\sqrt{1-r_{23}^2}}$$

が得られる.

次に, 偏回帰係数については, 単純回帰係数の概念を3変量の場合に拡張する. 変量 X_2, X_3 が原因によって変量 X_1 が結果すると考えたとき,

(1.20) $$x_{1t}=\beta_{12\cdot3}\,x_{2t}+\beta_{13\cdot2}\,x_{3t}$$

の関係を想定する. T 個のデータ $(x_{1t},\ x_{2t},\ x_{3t})$ $(t=1,\cdots T)$ は厳密に上式を満たすことは一般的には有り得ないことで, 上式を

(1.21) $$x_{1t}=b_{12\cdot3}\,x_{2t}+b_{13\cdot2}\,x_{3t}+u_t \qquad (t=1,\cdots T)$$

として誤差項 u_t を導入し $\sum_{t=1}^{T} u_t^2$ を最小になるよう $b_{12\cdot3}$，$b_{13\cdot2}$ を決める最小二乗法を採用する．$b_{12\cdot3}$，$b_{13\cdot2}$ を最小二乗法を用いて求める過程で，通常次の正規方程式が導かれる．

$$
\begin{aligned}
m_{12} &= b_{12\cdot3}\, m_{22} + b_{13\cdot2}\, m_{23} \\
m_{13} &= b_{12\cdot3}\, m_{23} + b_{13\cdot2}\, m_{33}
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

上の正規方程式より $b_{12\cdot3}$，$b_{13\cdot2}$ は，

$$
b_{12\cdot3} = \frac{m_{12}\, m_{33} - m_{13}\, m_{23}}{m_{22}\, m_{33} - m_{23}^2} \tag{1.23}
$$

$$
b_{13\cdot2} = \frac{m_{13}\, m_{22} - m_{23}\, m_{13}}{m_{22}\, m_{33} - m_{23}^2} \tag{1.24}
$$

と得られる．

1.4 先に考察した相関係数と回帰係数について，これらの間の関係をみてみよう．計算によって，

$$
b_{12} = r_{12} \frac{\sqrt{m_{11}}}{\sqrt{m_{22}}} \tag{1.25}
$$

$$
b_{12\cdot3} = r_{12\cdot3} \frac{\sqrt{m_{11}(1-r_{13}^2)}}{\sqrt{m_{22}(1-r_{23}^2)}} \tag{1.26}
$$

が得られる．

(1.25) より考えられるのは，変量 X_1 の変動を説明する変量 X_2 の回帰係数 b_{12} は，変量 X_2 の変動に対して，変量 X_1 の変動のうち X_2 と相関する部分との比を表わしている．さらにこの概念の拡張が $b_{12\cdot3}$ についても同様にあてはまる．つまり X_3 と相関する部分を除去した X_1，X_2 の変動について，上述と同様の概念を偏回帰係数 $b_{12\cdot3}$ は示しているのである．

換言すれば，変量 X_1，X_2 の実現値をそれぞれ単位のとり方によってそれぞれの変動の幅を等しくなるよう換算するならば[1)]，回帰係数 b_{12} と相関係数 r_{12}

1) つまり $m_{11}=m_{22}$ となるように換算する．このような変換の仕方として，$x_{1t}/\sqrt{m_{11}}$，$x_{2t}/\sqrt{m_{22}}$ を新変数とする方法がある．これを規準化という．

は同一の値をとることになる．しかし三変量の場合は，X_3 と相関する部分を除去した X_1 と X_2 の変動幅を等しくなるよう単位を換算をするならば偏相関係数 $r_{12\cdot3}$ と偏回帰係数 $b_{12\cdot3}$ は同一になる．

さて，三変量の場合について，いま $\hat{x}_{1t}$ を

$$\hat{x}_{1t} = b_{12\cdot3}\, x_{2t} + b_{13\cdot2}\, x_{3t} \tag{1.27}$$

と定義する．これと同時に，

$$\hat{u}_t = x_{1t} - \hat{x}_{1t} \tag{1.28}$$

とする．$\hat{x}_{1t}$ は X_2，X_3 で説明される X_1 の計算値を表わしており，換言すれば，誤差がないとした場合の X_1 の理論値である．

さらに $\hat{u}_t$ は X_2，X_3 で説明され得ない部分，つまり計算上の誤差を意味している．

いま，(1.27) (1.28) の $\hat{x}_{1t}$，$\hat{u}_t$ について，

$$\begin{aligned}\sum\hat{x}_{1t}\,\hat{u}_t &= \sum(b_{12\cdot3}\, x_{2t}+b_{13\cdot2}\, x_{3t})\,(x_{1t}-b_{12\cdot3}\, x_{2t}-b_{13\cdot2}\, x_{3t})\\ &= (b_{12\cdot3}\, m_{12}+b_{13\cdot2}\, m_{13})\\ &\quad -b_{12\cdot3}(b_{12\cdot3}\, m_{22}+b_{13\cdot2}\, m_{23})-b_{13\cdot2}(b_{12\cdot3}\, m_{23}+b_{13\cdot2}\, m_{33})\\ &= 0\end{aligned} \tag{1.29}$$

なることに注意して，[1)]

$$\sum x_{1t}^2 = \sum\hat{x}_{1t}^2 + \sum\hat{u}_t^2 \tag{1.30}$$

が得られる．これは現実に得られた変量 X_1 のデータの平均からの変動は X_2，X_3 で説明される変動と誤差項の変動の和になることを示している．

一方，先の相関係数や偏相関係数と異なって，X_1 と，X_2 および X_3 の2変量との相関係数の概念と見做される重相関係数 $R_{1\cdot23}^2$ は次の様に定義される．

$$R_{1\cdot23}^2 = \frac{\sum\hat{x}_{1t}^2}{\sum x_{1t}^2} = 1 - \frac{\sum\hat{u}_t^2}{\sum x_{1t}^2}. \tag{1.31}$$

(1.31) に表わされる重相関係数 $R_{1\cdot23}^2$ は方程式 (1.20) の適合性をも表わし

1) (1.29) からわかるように，一般的に最小二乗法による被説明変数の理論値と誤差項との相関係数は0である．

ている．つまり，X_1 の変動部分のうち X_2，X_3 によって説明される変動の割合を示しており，計算することによって，

$$R_{1\cdot23}{}^2 = r_{12\cdot3}{}^2(1-r_{13}{}^2)+r_{13}{}^2 = r_{12}{}^2+r_{13\cdot2}{}^2(1-r_{12}{}^2) \tag{1.32}$$

である．

2変量の場合の重相関係数 $R_{1\cdot2}{}^2$ は，

$$R_{1\cdot2}{}^2 = r_{12}{}^2 \tag{1.33}$$

となることは明かであろう．

§2

先の§では，相関係数，回帰係数を記述統計的に述べた．この§では，それらが近代統計学的な意味で，一つの確率モデルにおける推定量としての意味をもっていることを示し，次に回帰係数，相関係数の検定の問題に移る．

2.1 いま T 個のデータ（x_{1t}，x_{2t}）（$t=1, \cdots T$）が，2次元確率変数 $X=(X_1, X_2)$ の T 個の実現値であると想定する．つまり，2次元確率変数 $X=(X_1, X_2)'$ は正規分布をし，その期待値は $\mu=(\mu_1, \mu_2)'$ であり，その共分散行例は

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

であるとし，その T 個の実現値（あるいは観測値）が，いま（x_{1t}，x_{2t}）（$t=1, \cdots T$）と得られたものと考える．確率モデルを統計的に推測するということは，T 個の観測値から未知の母数 μ，Σ を推定し，あるいは検定することである．

上のように確率モデルを想定したとき，第 t 番目の二変量の観測値（x_{1t}，x_{2t}）を2次元列ベクトル x_t で表わすと，観測値 x_t を得る確率密度は，

$$f(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Sigma|}}\exp-\frac{1}{2}(x_t-\mu)'\Sigma^{-1}(x_t-\mu) \tag{2.1}$$

である．したがって T 個の観測値が無作為に得られたならば，いまある T 個の観測値の得られる確率尤度は，

$$L = \prod_{t=1}^{T} f(x_t) \tag{2.2}$$

となる.

上述の確率モデルにおいて統計的に推定したいのは，未知母数μやΣであり，それらの推定方法として通常，最尤推定法がとられる．最尤推定法というのは，(2.2) におけるL，つまりT個の観測値の確率尤度を最大にするように未知母数μ，Σの推定値$\hat{\mu}$，$\hat{\Sigma}$を決定する方法である．

いま，未知母数 σ_{11}，σ_{12}，σ_{22} の間の

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} \tag{2.3}$$

なる関係を確率変量 X_1，X_2 の母相関係数という.

母相関係数 ρ_{12} について

$$-1 \leqq \rho_{12} \leqq 1 \tag{2.4}$$

なる関係が満たされていることは当然である.

さて，母相関係数 ρ_{12} の最尤推定法による推定量というのは，先に定義した相関係数 r_{12} となる．というのは，未知母数 μ_1，μ_2，σ_{11}，σ_{12}，σ_{22} の最尤推定量 $\hat{\mu}_1$，$\hat{\mu}_2$，$\hat{\sigma}_{11}$，$\hat{\sigma}_{12}$，$\hat{\sigma}_{22}$ が

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1 &= \bar{x}_1 \\ \hat{\mu}_2 &= \bar{x}_2 \\ \hat{\sigma}_{11} &= \frac{1}{T}m_{11} \\ \hat{\sigma}_{12} &= \frac{1}{T}m_{12} \\ \hat{\sigma}_{22} &= \frac{1}{T}m_{22} \end{aligned} \tag{2.5}$$

となり[1]，このことから ρ_{12} の最尤推定量が r_{12} となることは明かであろう[2].

1) たとえば，Anderson [1] pp. 45～48 参照.
2) Anderson[1] p. 49 参照.

上述のことを纏めれば，§1で与えた単純相関係数（特に，標本単純相関係数という）は，上の確率モデルにおける未知母数 ρ_{12} の最尤推定量としての意味をもっているのである．

われわれの考察は，上の確率モデルにおいて，2変量 X_1，X_2 の同時分布（あるいは結合分布）についての推論をしていることになる．がしかし，たとえば X_2 を与えたときの X_1 の条件付分布についての推論を行なえる．つまり，上に想定した確率モデルは変量 X_1，X_2 を同時に実現する確率変数と見做し，その2次元ベクトル変量を扱っていることになる．他方，たとえば変量 X_2 の実現値が得られ，そのもとに変量 X_1 の分布について考察することが考えられる．すなわち，確率モデルとしては上述のままであるが，X_2 についての統計的推論は一応問わないで実現した X_2 のもとに，X_1 に関する統計的推論を行なおうとするのである．

このように X_2 を所与とする X_1 の分布についてを，X_2 を与えたときの X_1 の条件付分布という．われわれの考察している2変量確率変数において，X_2 を与えたときの X_1 の条件付分布に関して，その期待値 $E(X_1|X_2)$，分散 $V(X_1|X_2)$ は次のように得られ，その分布はやはり正規分布をするということが示される[1]．すなわち

$$
(2.6)\qquad
\begin{aligned}
E(X_1|X_2) &= \mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}(X_2-\mu_2) \\
V(X_1|X_2) &= \sigma_{11} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}} = \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)
\end{aligned}
$$

であり，いま，

$$
(2.7)\qquad
\begin{aligned}
&\mu_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\mu_2 = \beta_{10} \\
&\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}} = \beta_{12} \\
&\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2) = \sigma_u^2
\end{aligned}
$$

1) たとえば，Anderson [1] p. 28 参照.

とする．上に示された条件付分布に関するモデルでは，われわれは母数 β_{10}, β_{12}, σ_u^2 を推定することに関心があるのである．

さらに，上述の条件付分布のモデルは次のモデルに同等であることがわかる．いま変量 X_1, X_2 について

$$X_1 = \beta_{10} + \beta_{12}X_2 + u \tag{2.8}$$

なる関係が想定でき，X_2 は u と独立な変数であって，確率変数 u は期待値 0，分散 σ_u^2 の正規分布をする．つまり，

$$u \sim N(0,\ \sigma_u^2) \tag{2.9}$$

である．このようなモデルで X_1 は確率変数であって

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \beta_{10} + \beta_{12}X_2 \\ V(X_1) &= \sigma_u^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

なる正規分布をすることは明かであり，したがって，先の条件付確率モデルと線型回帰モデル (2.8)，(2.9) は同等であると見做される．

(2.7) の未知母数の意味であれ，線型回帰モデル (2.8)，(2.9) のパラメータの意味であれ，最小二乗法，あるいは最尤推定法を用いて，β_{10}, β_{12}, σ_u^2 の推定量を得ることが出来る．

上述の確率モデルから導出された条件付確率モデルの未知母数あるいはそれと同等である (2.8)，(2.9) で表わされる線型回帰モデルのパラメータの推定量として，(1.7)，(1.8) を解釈できるのである．

§1 で記述統計的に相関係数，回帰係数を定義し，その意味を考察したが，それらは同時に，統計的推論が出来るように構成した確率モデルにおける未知母数の推定量としての意味をもっているのである．

2.2　さて §1 で述べた相関係数や回帰係数を **2.1** で構成した確率モデルの未知母数の推定量として吟味してみよう．

一般に推定量は，実際に得られたデータで未知母数についての情報を与えようとする．したがって推定量はデータの関数である．そうして，データは一つの確率変数を反映しているのであるから推定量も確率変数である．

そこで推定量が，未知母数についてのどのような情報を与えようとするかについて，つまり推定量の性質が統計学的に問われる．

推定量の性質としていくつか挙げられるが，ここでは不偏性について考察する．[1]

たとえば，**2.1** の確率モデルにおいて未知母数 μ についての推定量を $\bar{x}$ に限らずに一般的に $g(x_1\cdots x_T)$ で表わし，いま，

$$E(g(x_1\cdots,\ x_T)) = \mu \tag{2.11}$$

となる推定量 $g(x_1\cdots,\ x_T)$ を μ の不偏推定量という．

先述のように推定量は確率変数の関数だから，やはりそれ自身も確率変数であり，当然その確率分布は独立変数である確率変数 x_t $(t=1,\cdots T)$ の分布に依存する．したがって，推定量 $g(x_1\cdots x_T)$ の確率分布は，**2.1** の x_t $(t=1,\cdots T)$ の確率モデルより導出し得るが，それによって期待値をとるならば，それが未知母数 μ になるとき $g(x_1\cdots x_T)$ は不偏性を有するといえる．

未知母数の不偏推定量を採用するならば，T 個の観測値からなる一組のデータでの推定を何回も数多くするならば，そこで得られる推定値の平均は未知の母数に等しくなるのである．

さて，先の (2.5) に示した諸推定量について，

$$E(\bar{x}_i) = \mu_i \tag{2.12}$$

$$E\left(\frac{1}{T}m_{ij}\right) = \frac{T-1}{T}\sigma_{ij} \qquad (i,\ j=1,2)$$

が得られる．したがって μ，Σ の最尤推定量として (2.5) を与えたが，μ の最尤推定量は不偏性を有しているが，Σ の最尤推定量は不偏ではない．Σ の不偏推定量は，

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1}m_{ij} \qquad (i,\ j=1,2) \tag{2.13}$$

1) 推定量の性質としてしばしば問題とされるのは，不偏性の他に有効性，一致性，十分性等がある．

である．

2.3 われわれは先の節で2変量の確率モデルを想定した．つまり変量（X_1, X_2）は，

$$X = (X_1,\ X_2) \sim N(\mu,\ \Sigma) \tag{2.14}$$

と先験的な仮説をおいた．その上で，未知の母数の推定量を得たのである．

一方，統計的検定というのは，この確率モデルを前提とした上で，未知母数について何らかの仮説をたて，実際に得たデータあるいは観測値によってこの仮説を棄却するか，受容するかを決定する．このとき検定すべき仮説を帰無仮説という．通常，検定の方法は帰無仮説 H_0 が成立するときの観測値（x_{1t}, x_{2t}），（$t=1, \cdots T$）から導出される統計量を得る確率を計算し，その実現値の得る確率がある一定数より小さいならば，帰無仮説 H_0 を棄却するのである．このとき一定の確率を有意水準という．有意水準は1％，3％，5％程度の値がとられる．

さて，帰無仮説 H_0 を

$$H_0 : \beta_{12} = \bar{\beta}_{12}$$

としたときの有意水準 α の検定方式を考察する．ここに $\bar{\beta}_{12}$ は定数である．

§A の（A.6）より，

$$b_{12} \sim N\left(\beta_{12},\ \frac{\sigma_u^2}{m_{22}}\right) \tag{2.15}$$

であるから，

$$\frac{(b_{12}-\beta_{12})\sqrt{m_{22}}}{\sqrt{\sigma_u^2}} \sim N(0,\ 1) \tag{2.16}$$

が得られ，さらに§A の（A.8）より

$$\frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sigma_u^2} \sim \chi^2(T-2) \tag{2.17}$$

である．したがって，

$$\frac{(b_{12}-\beta_{12})\sqrt{m_{22}}}{\sqrt{\sigma_u^2}} \Big/ \sqrt{\frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sigma_u^2(T-2)}} \sim t(T-2) \tag{2.18}$$

が得られる．すなわち

$$(2.19)\qquad \frac{(b_{12}-\beta_{12})\sqrt{m_{22}(T-2)}}{\sqrt{\sum\hat{u}_t{}^2}} \sim t(T-2).$$

上述のことから帰無仮説が真であるとき，

$$(2.20)\qquad \hat{t} = \frac{(b_{12}-\bar{\beta}_{12})\sqrt{m_{22}(T-2)}}{\sqrt{\sum\hat{u}_t{}^2}}$$

は自由度 $T-2$ の t 分布をするといえる．したがって，自由度 $T-2$ の t 分布をする変量 $\hat{t}$ が

$$(2.21)\qquad Pr\{\tau_L \leq \hat{t} \leq \tau_H\} = 1-\alpha$$

を満たす τ_L と τ_H をえらぶならば，実際のデータから計算し得た $\hat{t}$ の値が

$$(2.22)\qquad \hat{t} \leq \tau_L \text{ あるいは } \tau_H \leq \hat{t}$$

を満たすとき，帰無仮説は棄却される．

この検定の方式では，(2.21) より

$$(2.23)\qquad Pr\{\hat{t} \leq \tau_L \text{ あるいは } \tau_H \leq \hat{t}\} = \alpha$$

となり，帰無仮説が真とするならば，実際観測値から導出された統計量 $\hat{t}$ が生ずる確率は α 以下であって，非常に確率低いことが実現したことになる．したがって (2.22) を帰無仮説 H_0 の棄却域とするのである．

通常，採用せられる検定には，t 分布が左右対称の分布であり，また，τ_H と τ_L の差ができるだけ小さくなるようにとるために，

$$\tau_H = -\tau_L$$

を満たすような τ_H, τ_L を選択する．

2.4 次に相関係数 ρ_{12} に関しての検定を考えよう．相関係数 ρ_{12} の検定の場合帰無仮説が 0 であるか，あるいは 0 以外の値であるかの場合に分ける必要がある．

この節では，帰無仮説 H_0 が

$$(2.24)\qquad H_0\ ;\ \rho_{12} = 0$$

の検定方式を考える．

さて，(2.7)，(2.3) より，

$$(2.25)\qquad \beta_{12}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}=\rho_{12}\frac{\sqrt{\sigma_{11}}}{\sqrt{\sigma_{22}}}$$

であるから帰無仮説が真のとき，つまり (2.24) のときには，

$$(2.26)\qquad \beta_{12}=0$$

となる．したがって本質的には，**2.3** の議論がそのまま用いることができ (2.20) において，

$$\bar{\beta}_{12}=0$$

としたときの検定と同等になる．(2.24) の帰無仮説の検定に，

$$(2.27)\qquad \hat{t}=\frac{b_{12}\sqrt{m_{22}(T-2)}}{\sqrt{\sum\hat{u}_t^2}}$$

を検定統計量とできる．一方，

$$(2.28)\qquad \begin{aligned}\sum\hat{u}_t^2&=\sum(x_{1t}-b_{12}x_{2t})^2=m^{11}-2b_{12}m_{12}+b_{12}^2m_{22}\\&=m_{11}-b_{12}m_{12}+b_{12}(-m_{12}+b_{12}m_{22})\\&=m_{11}-b_{12}m_{12}=m_{11}-\frac{m_{12}^2}{m_{22}}\end{aligned}$$

だから (2.27) の $\hat{t}$ は，(1.15) および (1.16) を利用して，

$$(2.29)\qquad \begin{aligned}\hat{t}&=\frac{b_{12}\sqrt{m_{22}(T-2)}}{\sqrt{m_{11}-\dfrac{m_{12}^2}{m_{22}}}}\\&=\frac{r_{12}\sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r_{12}^2}}\end{aligned}$$

である．

したがって，(2.24) の帰無仮説の有意水準 α の棄却域は，

$$(2.30)\qquad \frac{r_{12}\sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r_{12}^2}}\leq\tau_L\ \text{あるいは}\ \tau_H\leq\frac{r_{12}\sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r_{12}^2}}$$

である．上式は，$\tau_H=-\tau_L$ とするならば，

(2.31) $$\frac{|r_{12}|\sqrt{T-2}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} \geq \tau_H$$

と同値である.

2.5 次に，帰無仮説が，

(2.32) $$H_0\ ;\ \rho_{12} = \bar{\rho}_{12} \neq 0$$

の場合を考察しよう.

いままでの分析から明かになるように，一般的に帰無仮説の統計的検定方法に必要なことは，

① 検定統計量をどのように定めるか

② 帰無仮説が真としたときの，その検定統計量の分布（確率）を求めることである．もちろん①と②は非常に関連がある．検定統計量は本来からいえば，帰無仮説を反映でき得るものであればどのようなものでもよいが，当該検定量の分布が明示的に得られなければ，意味がないし，その統計量の分布ができるだけ周知の分布型で得られることが実際に検定する立場からは望ましい.

たとえば，先に考察した

$$H_0\ ;\ \beta_{12} = \bar{\beta}_{12}$$

の検定の際に，検定統計量として b_{12} を選択し得るが，その分布には未知パラメータ σ^2 を含む．したがって分布型は明示的であるが，その確率計算は不可能である．確率計算は可能であるが (2.16) の量は未知数 σ^2 を含むから統計量とはなり得ない．そこで (2.21) を統計量とし，その分布は周知の t 分布となり，その検定統計量の確率計算が可能になるのである.

帰無仮説 (2.32) の問題に戻ろう．この検定で，最も自然に考えられる統計量は r_{12} であろう．そこで r_{12} の分布を求めることになるが，r_{12} の分布についていままでになされた研究の中では周知の分布型で得られたものはない．つまり，Fisher の導出した定式化，および，Hotelling の定式化は r_{12} の分布を明示的に与えているがその形式は複雑で利用し難い[1]．利用可能な方法として

1) Anderson [1] p. 69 に Fisher, Hotelling の定式化が示されている.

一つに Hotelling の導出した r_{12} の分布関数をもとに F. N. David が得た検定のための数値表がある.

他方，Fisher の研究によれば，いま，

$$(2.33)\qquad Z=\frac{1}{2}\log\frac{1+r_{12}}{1-r_{12}}\ ,\quad \zeta=\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho_{12}}{1-\rho_{12}}$$

とすれば，近似的に，

$$(2.34)\qquad (Z-\zeta)\sim N\left(\frac{\rho_{12}}{2(T-1)}\ ,\ \frac{1}{T-1}+\frac{4-\rho_{12}}{2(T-1)^2}\right)$$

が得られる[1]. また，ρ_{12} が小さな値に対して，

$$(2.35)\qquad (Z-\zeta)\sim N\left(0,\ \frac{1}{T-3}\right)$$

である．さらに (2.34)，(2.35) は観測値の個数 T が50以上のときにはこの近似が十分妥当することも明かにされている[2].

いま，1つ考えられる方法は，(2.17) を利用する方法である.

(2.17) 及び (2.28) より，

$$(2.36)\qquad \frac{m_{11}-b_{12}m_{12}}{\sigma_u^2}\sim\chi^2(T-2)$$

である．一方 (2.7)，(1.10) より

$$(2.37)\qquad \frac{m_{11}-b_{12}m_{12}}{\sigma_u^2}=\frac{m_{11}(1-r_{12}^2)}{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)},$$

である．ここで (2.13) に示したように

$$\tilde{\sigma}_{11}=\frac{m_{11}}{T-1}$$

であるから $\sigma_{11}=\tilde{\sigma}_{11}$ と近似できるならば，

1) Kendall & Stuart [3] Vol. 1, pp. 390～1 に詳細な近似の仕方が示されている.

2) Kendall & Stuart [3] p. 391 参照.

(2.38)　$$\frac{(T-1)(1-r_{12}{}^2)}{1-\rho_{12}{}^2} \sim \chi^2(T-2)$$

が得られる．したがって帰無仮説（2.32）の有意水準αの検定の場合，

(2.39)　$$Pr\{\chi^2 \leq \chi_\alpha{}^2 \text{ あるいは } \chi_\beta{}^2 \leq \chi^2\} = \alpha$$

となる $\chi_\alpha{}^2$，$\chi_\beta{}^2$ を選らぶならば，

(2.40)　$$r_{12}{}^2 \leq 1-\frac{\chi_\beta{}^2(1-\bar{\rho}_{12}{}^2)}{T-1} \text{ あるいは } 1-\frac{\chi_\alpha{}^2(1-\bar{\rho}_{12}{}^2)}{T-1} \leq r_{12}{}^2$$

が棄却域となる．

§ 3

この§では§1で述べた偏相関係数，偏回帰係数の統計的推論が可能になるように確率モデルを構成し，それぞれの推定と検定の問題に移ろう．

いま，3変量 X_1，X_2，X_3 のデータ $x_t=(x_{1t},\ x_{2t},\ x_{3t})'$（$t=1, \cdots T$）は，3次元確率変数ベクトル $X=(X_1,\ X_2,\ X_3)'$ のT個の実現値であると想定する．確率変数ベクトルXは，

(3.1)　$$X \sim N(\mu,\ \Sigma)$$

に従うと前提する．われわれの統計的推論というのは μ，Σ に関する情報に関することである．

まず，われわれが，μ，Σ の推定量を得ようとするとき，通常，最尤推定法を用いる．実現値 x_t を得る確率は（3.1）により

(3.2)　$$f(x_t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp -\frac{1}{2}(x_t-\mu)'\Sigma^{-1}(x_t-\mu)$$

であるが，T個のデータを得る確率尤度は，データの各々が独立に得られたとすると

(3.3)　$$L = \prod_{t=1}^{T} f(x_t)$$

となる．2.1の議論と同様に，この尤度を最大ならしめる $\hat{\mu}$，$\hat{\Sigma}$ を μ，Σ の

推定量とするのである．

最尤推定量 $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$ はそれぞれ，

$$\hat{\mu}_i = \bar{x}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$
$$(3.3) \qquad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}m_{ij} \qquad (i, j=1,\ 2,\ 3)$$

と得られる．(3.3) で $\hat{\sigma}_{ij}$ は $\hat{\Sigma}$ の第 $i\,j$ 要素である.[1]

3.1　(3.1) に表わされる確率変数ベクトル X の分布に関するパラメータ μ, Σ について，母偏相関係数，母偏回帰係数の概念を与えよう．

三変量の確率変数 (X_1, X_2, X_3) の確率密度関数は，先述のように，

$$(3.4) \qquad f(X) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\exp -\frac{1}{2}(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)$$

$$X=(X_1\ X_2\ X_3)' \qquad \mu=(\mu_1\ \mu_2\ \mu_3)'$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}$$

である．いま，X_3 を与えたときの (X_1, X_2) の分布を考える．**§2** でもその概念を与えたように，これは X_3 を与えたときの (X_1, X_2) の条件付分布という．その確率密度を $f(X_1, X_2|X_3)$ のように表わし，

$$(3.5) \qquad f(X_1, X_2|X_3) = f(X_1, X_2, X_3)/\int\int f(X_1, X_2, X_3)dX_1dX_2$$

で示される．(3.5) はたとえば X_3 が実現したもとで (X_1, X_2) が確率的にどのように生起するかを表現している．

計算することによって

$$(3.6) \qquad f(X_1, X_2|X_3) = (2\pi)^{-\frac{2}{2}}|\Sigma_{12.3}|^{-\frac{1}{2}}\exp -\frac{1}{2}Y'\Sigma_{12.3}{}^{-1}\,Y$$

$$Y=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}-\frac{1}{\sigma_{33}}\begin{pmatrix}\sigma_{13}\\\sigma_{23}\end{pmatrix}(X_3-\mu_3)$$

---

1) 最尤推定量は (3.3) の通りであるが，不偏性を有する σ_{ij} の推定量は，2.2 に同じで，$\frac{1}{T-1}m_{ij}$ である．

$$\Sigma_{12\cdot3}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}-\frac{1}{\sigma_{33}}\begin{pmatrix}\sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{pmatrix}(\sigma_{13}\ \ \sigma_{23})$$

が得られる．(3.6)において，$\Sigma_{12\cdot3}$ は X_3 を与えたときの(X_1, X_2)の条件付分散，共分散を表わしている．

(3.7) $$\Sigma_{12\cdot3}=\begin{bmatrix}\sigma_{11\cdot3} & \sigma_{12\cdot3}\\ \sigma_{21\cdot3} & \sigma_{22\cdot3}\end{bmatrix}$$

と表記するならば，偏相関係数 $\rho_{12\cdot3}$ は，

(3.8) $$\rho_{12\cdot3}=\frac{\sigma_{12\cdot3}}{\sqrt{\sigma_{11\cdot3}\ \sigma_{22\cdot3}}}$$

と表わせる．一方，(3.6) (3.7) より $\sigma_{12\cdot3}$ 等を σ_{ij} (i, j=1, 2, 3) で示し，(2.3) を利用して(3.8) の偏相関係数を ρ_{ij} (i, j=1, 2, 3) で表現するなら，

(3.9) $$\rho_{12\cdot3}=\frac{\rho_{12}-\rho_{13}\,\rho_{23}}{\sqrt{1-\rho_{13}^2}\ \sqrt{1-\rho_{23}^2}}$$

が導出される．したがって §1 で与えた標本偏相関係数 $r_{12\cdot3}$ は母偏相関係数$\rho_{12\cdot3}$ の推定量としての意味をもっていることが明かになる．

次に，三変量 (X_1, X_2, X_3) の分布で，X_2, X_3 を与えたときの X_1 の条件付分布を考えてみる．(X_2, X_3) を与えたときの X_1 の条件付確率密度関数を $f(X_1|X_2, X_3)$ で表わし，それは

(3.10) $$f(X_1|X_2,X_3)\ =\ f(X_1,X_2,X_3)/\int f(X_1,X_2,X_3)dX_1$$

で与えられる．

(3.6) の導出と同様に，計算することによって，

(3.11) $$f(X_1|X_2,X_3)\ =\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}|\Sigma_{1\cdot23}|^{-\frac{1}{2}}\exp-\frac{1}{2}Z'\Sigma_{1\cdot23}^{-1}Z$$

$$Z=X_1-\mu_1-(\sigma_{12}\ \sigma_{13})\begin{pmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X_2-\mu_2\\ X_3-\mu_3\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{1\cdot23}=\sigma_{11}-(\sigma_{12}\ \sigma_{13})\begin{pmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{21}\\ \sigma_{31}\end{pmatrix}$$

が得られる．(3.11) より明かになることは X_2, X_3 を与えたときの X_1 の条件付期待値 $E(X_1|X_2, X_3)$ は

$$
\begin{aligned}
(3.12) \qquad E(X_1|X_2, X_3) &= \mu_1 + (\sigma_{12}\ \sigma_{13})\begin{pmatrix}\sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X_2-\mu_2\\ X_3-\mu_3\end{pmatrix}\\
&= \beta_{10} + \beta_{12\cdot3}X_2 + \beta_{13\cdot2}X_3\\
\beta_{10} &= \mu_1 - \beta_{12\cdot3}\mu_2 - \beta_{13\cdot2}\mu_3\\
\beta_{12\cdot3} &= (\sigma_{12}\ \sigma_{33} - \sigma_{13}\ \sigma_{23})/(\sigma_{22}\ \sigma_{33} - \sigma_{23}^2)\\
\beta_{13\cdot2} &= (\sigma_{13}\ \sigma_{22} - \sigma_{12}\ \sigma_{23})/(\sigma_{22}\ \sigma_{33} - \sigma_{23}^2)
\end{aligned}
$$

である．

§**1** で与えた標本偏回帰係数 $b_{12\cdot3}$，$b_{13\cdot2}$ はそれぞれ母偏回帰係数 $\beta_{12\cdot3}$，$\beta_{13\cdot2}$ の推定量としての意味をもっている．

3.2 さて，帰無仮説 H_0 が

$$H_0 : \beta_{12\cdot3} = 0$$

の統計的検定を考えてみよう．この帰無仮説の意味は，X_1 の条件付期待値が X_2，X_3 に依存すると確率モデル設定から導かれるが，果して確実に X_2 に依存し，X_1 の条件付期待値は X_2 の関数になるかどうかを検定するのである．記述統計的には変量 X_1 を結果する原因として X_2 を挙げ得るか否かを問うていることになる．さらに $\beta_{12\cdot3}=0$ だけに必ず，われわれが得たデータ（x_{1t}，x_{2t}，x_{3t}）（$t=1, \cdots T$）に先だって偏回帰係数の値が $\bar{\beta}_{12\cdot3}$（$\neq 0$）であるという情報が得られているとき，その $\beta_{12\cdot3}$ の値を現在のデータで検討しようとするならば，帰無仮説は

$$(3.13) \qquad H_0\ ;\ \beta_{12\cdot3} = \bar{\beta}_{12\cdot3}$$

である．以下，一般的な（3.13）の帰無仮説の場合を考察する．

この場合§**2** の議論とほとんど同じである．つまり，**2.1** の考察と同様に先に述べた（X_2，X_3）を与えたときの X_1 の条件付分布に関するモデルは

$$
(3.14) \qquad
\begin{aligned}
X_1 &= \beta_{10} + \beta_{12\cdot3}X_2 + \beta_{13\cdot2}X_3 + u\\
u &\sim N(0,\ \sigma_u^2)\\
\sigma_u^2 &= \Sigma_{1\cdot23}
\end{aligned}
$$

と定式化できる線型モデルと同等である．そうして，$\beta_{12\cdot3}$，$\beta_{13\cdot2}$ の推定量であ

る $b_{12\cdot3}$, $b_{13\cdot2}$ について，§A の (A. 6) より，

(3.15) $$b_{12\cdot3} \sim N\left(\beta_{12\cdot3},\ \sigma_u^2 \frac{m_{33}}{m_{22}m_{33}-m_{23}^2}\right)$$

と得られる．したがって，

(3.16) $$(b_{12\cdot3}-\beta_{12\cdot3}) \Big/ \left(\sigma_u^2 \frac{m_{33}}{m_{22}m_{33}-m_{23}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim N(0,\ 1).$$

一方 §A の (A. 8) より

(3.17) $$\frac{\sum \hat{u}_t^2}{\sigma_u^2} \sim \chi^2(T-3)$$

であるから

(3.18) $$\frac{(b_{12\cdot3}-\beta_{12\cdot3})\sqrt{T-3}}{\sqrt{\sum \hat{u}_t^2}} \cdot \sqrt{\frac{m_{22}m_{33}-m_{23}^2}{m_{33}}} \sim t(T-3)$$

が導出できる．

したがって，**2. 3** の議論と全く同じようにして，帰無仮説 (3. 13) が真のとき，

$$\hat{t} = \frac{(b_{12\cdot3}-\bar{\beta}_{12\cdot3})\sqrt{T-3}}{\sqrt{\sum \hat{u}_t^2}} \cdot \sqrt{\frac{m_{22}m_{33}-m_{23}^2}{m_{33}}}$$

は自由度 $T-3$ の t 分布をする．

$$\hat{t} \leq \tau_L \text{ あるいは } \tau_H \leq \hat{t}$$

が (3. 13) の帰無仮説に対する棄却域となる．

3. 3 次に帰無仮説 H_0 が

(3.19) $$H_0\ ;\ \rho_{12\cdot3} = 0$$

の場合を考察する．この場合 **2. 4** において議論したと同様の方法が考えられる．つまり，(3. 12) より

$$\beta_{12\cdot3} = \frac{\sigma_{12}\sigma_{33}-\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{22}\sigma_{33}-\sigma_{23}^2} = \frac{\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{23}^2}\sqrt{\sigma_{11}} = \rho_{12\cdot3}\frac{\sqrt{(1-\rho_{13}^2)\sigma_{11}}}{\sqrt{1-\rho_{23}^2}}$$

が成立するから (3. 19) が成立するならば，

$$(3.20) \qquad \beta_{12\cdot 3} = 0$$

が導かれる．したがって（3.19）の帰無仮説を検定することは，（3.13）において $\bar{\beta}_{12\cdot 3}=0$ とした検定をすることと同等になる．したがって **3.2** の検定方法がそのまま妥当する．

さて，帰無仮説 H_0 が

$$(3.21) \qquad H_0 \,;\, \rho_{12\cdot 3} = \bar{\rho}_{12\cdot 3} \neq 0$$

の場合に移ろう．

$\rho_{12\cdot 3}$ の推定量 $r_{12\cdot 3}$ の分布を直接求めることは非常に困難である．しかし R. A. Fisher が証明した次の定理によって $r_{12\cdot 3}$ の分布についての情報を明かにでき，さらに（3.21）の検定が可能になる．

いま，母相関係数（ρ_{12}）が ρ_0 である正規分布をする 2 変量確率変数（X_1, X_2）の T 個の観測値から作られる標本相関係数 r_{12} の分布関数を $F(r_{12}|T, \rho_0)$ と表わす．次に母偏相関係数（$\rho_{12\cdot 3}$）が ρ_0 である正規分布をする 3 変量確率変数（X_1, X_2, X_3）の T 個の観測値から作られる標本偏相関係数 $r_{12\cdot 3}$ の分布関数は $F(r_{12\cdot 3}|T-1, \rho_0)$ となる.[1)]

上の定理によって，帰無仮説（3.21）の検定は次のように行なえる．

$$(3.22) \qquad Z = \frac{1}{2}\log\frac{1+r_{12\cdot 3}}{1-r_{12\cdot 3}} \quad , \quad \zeta = \frac{1}{2}\log\frac{1+\bar{\rho}_{12\cdot 3}}{1-\bar{\rho}_{12\cdot 3}}$$

と変数変換すると，（2.34）および上の定理から，

$$(3.23) \qquad (Z-\zeta) \sim N\left(\frac{\bar{\rho}_{12\cdot 3}}{2(T-2)} \quad , \quad \frac{1}{T-2} + \frac{4-\bar{\rho}_{12\cdot 3}}{2(T-2)^2}\right)$$

が得られ，$\bar{\rho}_{12\cdot 3}$ が小さな値であると，

$$(3.24) \qquad (Z-\zeta) \sim N\left(0, \ \frac{1}{T-4}\right)$$

が近似できる．

1) 証明は Anderson [1] pp. 82〜5 に示されている．また，その幾何学的説明が，Kendall & Stuart [3] vol. 2, p. 333 にある．

したがって，いま $N(0, 1)$ に従う確率変数 ν について，

(3.25) $$Pr\{\nu \leqq \nu_L,\ \nu_H \leqq \nu\} = \alpha$$

を満たす ν_L, ν_H を選ぶならば，帰無仮説 (3.21) の有意水準 α の棄却域は，(3.24) の近似式を用いて，

(3.26) $$(Z-\zeta)\sqrt{T-4} \leqq \nu_L,\ \nu_H \leqq (Z-\zeta)\sqrt{T-4}$$

と得られる.

§A　相関係数や回帰係数の推定，検定を考察する際に本文で利用するいくつかの定理を次に挙げておく.

線型回帰モデル

(A.1) $$y = X\beta + u$$

(A.2) $$u \sim N(0,\ \sigma_u^2 I)$$

において，y は変量 Y の観測値 T 次ベクトル，X は k 個の説明変量の観測値 $T\times k$ 次行列. u は T 次確率変数ベクトルで，各観測値が無作為に得られたとするなら (A.2) が前提し得る. I は $T\times T$ 単位行列である.

上のモデルにおける k 個の未知パラメータのベクトル β, 及びスカラー σ_u^2 の最小二乗推定量（β の最小二乗推定量は最尤推定量に一致する）を $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_u^2$ と記すと，

(A.3) $$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

(A.4) $$\hat{u} = y - X\hat{\beta}$$

(A.5) $$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T-k}$$

推定量 $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}_u^2$ に関して次の定理が成り立つ.[1)]

(A.6) $$\hat{\beta} \sim N(\beta,\ \sigma_u^2(X'X)^{-1})$$

(A.7) $$\frac{(\hat{\beta}-\beta)X'X(\hat{\beta}-\beta)}{\sigma_u^2} \sim \chi^2(k)$$

1) Dhrymes [2] pp. 149～50 参照.

(A.8) $$\frac{\hat{u}'\hat{u}}{\sigma_u^2} \sim \chi^2(T-k)$$

(A.9) $\hat{\beta}$ と $\hat{u}$ は独立.

参考文献

[1] T. W. Anderson ; *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (John Wiley & Sons, Inc., 1958)

[2] P. J. Dhrymes ; *Econometrics* (Harper & Row, 1970)

[3] M. G. Kendall and A. Stuart ; *The Advanced Theory of Statistics* (Charles Griffin, Vol. 1 ; 1969, Vol. 2 ; 1967)