Kwansei Gakuin University

生産関数と厚生関数についての若干の覚書

福　尾　洋　一

本稿では，1部門経済と2部門経済における最適経済成長理論——動学的厚生経済学の一側面——を研究するための準備的考察を行う．§1では，関数の概念について簡単に整理する．§2では，経済における生産の技術的関係を規定する生産関数について言及する．§3では，1つの生産関数を例示し，この関数の数学的構造を明らかにする．§4では，ある1つの技術進歩状態を仮想することによって，技術進歩と生産関数との関係を考える．§5では，一時的社会厚生関数を定義する．経済成長との関連において社会厚生を語る場合，時間視野（time horizon）を無視することはできない．一時的という修飾語を付けたのは，そうした時間視野を考慮した社会厚生関数との区別を明示するためである．§6では，新古典派定理と呼ばれている命題を提示する．この定理は我々にその後の研究の手掛かりを与えるであろう．

ここでの議論は，ある意味では，そのすべてが経済学の常識と言えるかも知れない．我々の目的は，本稿を1つの土台として，最適経済成長の理論的側面に取り組むことにある．従って，このような目標に即した配慮は幾つか施したつもりでいる．

§1　関　　数

定義 1. 1　$\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}_{\oplus}$, $\boldsymbol{R}_{+}$, 直積，成分

自然数全体の集合を $\boldsymbol{N}$, 実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$, 非負実数全体の集合を $\boldsymbol{R}_{\oplus}$, 正実数全体の集合を $\boldsymbol{R}_{+}$ によって表す．$n\,(\in \boldsymbol{N})$ 個の任意集合 $X_{\nu}\,(\nu=1,\cdots,$

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

n）の要素 $\boldsymbol{x}_\nu$ の n 個の順序付けられた組 $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$[1], $\boldsymbol{x}_\nu \in \boldsymbol{X}_\nu$, 全体の集合を $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ の直積といい，$\boldsymbol{X}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{X}_n$ または $\prod_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{X}_\nu$ と書く．すなわち

$$\boldsymbol{X}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{X}_n = \prod_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{X}_\nu = \{(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_\nu \in \boldsymbol{X}_\nu, \ \nu = 1, \cdots, n\}$$

である．$\prod_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{X}_\nu$ の要素 $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ を構成している各 $\boldsymbol{x}_\nu$ をその要素の第 ν 成分という．特に，すべての ν について $\boldsymbol{X}_\nu$ が同一の集合 $\boldsymbol{X}$ であるときには，$\prod_{\nu=1}^{n} \boldsymbol{X}_\nu$ を $\boldsymbol{X}^n$ と書く．例えば，

$$\boldsymbol{X}^n = \{(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) \mid \boldsymbol{x}_\nu \in \boldsymbol{X}, \ \nu = 1, \cdots, n\}$$

$$\boldsymbol{R}^n = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \ x_\nu \in \boldsymbol{R}, \ \nu = 1, \cdots, n\},$$

$$\boldsymbol{R}_{\oplus}{}^n = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \ x_\nu \in \boldsymbol{R}_{\oplus}, \ \nu = 1, \cdots, n\},$$

$$\boldsymbol{R}_{+}{}^n = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n), \ x_\nu \in \boldsymbol{R}_{+}, \ \nu = 1, \cdots, n\}$$

等々である．なお，$\boldsymbol{R}^{n_1}$ や $\boldsymbol{R}^{n_2}$ $(n_1, n_2 \in \boldsymbol{N})$ も 1 つの集合であるから，$\prod_{\nu=1}^{n} X_\nu$ を構成している 1 つの集合 $\boldsymbol{X}_\nu$ が $\boldsymbol{R}^{n_1}$ や $\boldsymbol{R}^{n_2}$ であっても差し支えはない．

定義 1. 2　実ベクトル空間

集合 $\boldsymbol{X}$ の任意の 3 要素を $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ とし，任意の 2 実数を α, β とする．このとき，$\boldsymbol{X}$ が実ベクトル空間または実線型空間であるとは，和 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 及びスカラー倍 $\alpha \boldsymbol{x}_1$ が $\boldsymbol{X}$ の要素として定義され，この演算が次の公理（A.1）−(A.8) を満たしていることをいう[3]．

(A.1)　$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1$　（交換法則），

(A.2)　$\boldsymbol{x}_1 + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3) = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{x}_3$　（結合法則），

1）順序付けられた組 $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ という場合，各 $\boldsymbol{x}_\nu$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ を $(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n)$ という順に配列した組合わせを考えており，その順序が重要な意味を持つ．今後，特に言及しないかぎり，順序には絶えず注意を払っているものとする．

2）以下においては，実数を肉細文字，集合の要素を肉太文字で表記する．ただし，ある集合の要素がただ 1 つの実数成分からなる場合には，その要素を実数と同一扱いにして，肉細文字を用いる．

3）スカラーとは実数のことである．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

(A.3)　$[\exists\, \mathbf{0} \in \boldsymbol{X}] : \boldsymbol{x}_1 + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}_1$[1]　(単位元0の存在),

(A.4)　$[\exists -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}] : \boldsymbol{x}_1 + (-\boldsymbol{x}_1) = \mathbf{0}$　(逆元 $-\boldsymbol{x}$ の存在),

(A.5)　$\alpha(\beta \boldsymbol{x}_1) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}_1$　(結合法則),

(A.6)　$\alpha(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_2$　(分配法則),

(A.7)　$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}_1 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2$　(分配法則),

(A.8)　$1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_1$.

実ベクトル空間 $\boldsymbol{X}$ の要素 $\boldsymbol{x}$ をベクトルまたは点という.

$\boldsymbol{R}^n$ の任意の2要素を

$$\boldsymbol{x}_1 = (x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n}),$$
$$\boldsymbol{x}_2 = (x_{21},\ x_{22},\ \cdots,\ x_{2n})$$

とし，任意実数を α とする．このとき，

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = (x_{11}+x_{21},\ x_{12}+x_{22},\ \cdots,\ x_{1n}+x_{2n}),$$
$$\alpha\boldsymbol{x}_1 = (\alpha x_{11},\ \alpha x_{12},\ \cdots,\ \alpha x_{1n})$$

によって和とスカラー倍を定義し，

$x_{1\nu} = x_{2\nu}$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ であるとき，そのときのみ，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$

と定め，更に，単位要素は

$$\mathbf{0} = (0,\ \cdots,\ 0)$$

と考えると，$\boldsymbol{R}^n$ は実ベクトル空間を形成する．そこで今後は，$\boldsymbol{R}^n$ は実ベクトル空間であるとする．また，ベクトル $\boldsymbol{x}(\in \boldsymbol{R}^n)$ を

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

と書くとき，これを行ベクトルといい，行ベクトルを転置したベクトル $\boldsymbol{x}'$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

を列ベクトルという．

定義 1.3　関数

1) "[∃～]：" は "ある～が存在して，" とか "ある～に対して，" と読む．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

2つの集合 X と Y を考える．X の各要素に Y の要素が1つずつ対応付けられているとき，この対応 Γ を X で定義された関数といい，しばしば

(1.1) $\Gamma: X \to Y$

と表示する．X の要素 x に対応する Y 内の要素を $y=\Gamma(x)$ と書き，x の Γ による像と呼ぶ．かくて，$\Gamma(x)$ は

$$\Gamma(x)=\{y \mid y=\Gamma(x),\ x\in X\}$$

によって定義されている．X を Γ の定義域，$\Gamma(X)$ を Γ の値域という．関数 Γ を，上記 (1.1) の代りに，像を用いて

(1.1) $y=\Gamma(x),\ x\in X,\ y\in Y$

と表すことも多い．また，定義域や値域が分かっている場合には，x の Γ による像

(1.1) $y=\Gamma(x)$

によって関数 Γ を表示することもある．$Y\subset R$ のときには，関数 Γ を実数値関数という．

定義 1.4 同次関数

集合 X を定義域とする実数値関数 (1.1) に対して，

$$[\forall x\in X,\ \alpha\in R-\{0\}]:\ \Gamma(\alpha x)=\alpha^{\nu}\Gamma(x),\ \nu\in N\cup\{0\}$$ [1)]

が成立すれば，Γ を ν 次同次関数という．

定義 1.5 凸集合

集合 X に関して

$$[\forall x_1,\ x_2\in X,\ \alpha\in(0,1)]:\ \alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in X$$

が成立するとき，X を凸集合という．R^n, $R_{\oplus}^n$, R_+^n はいずれも凸集合である．

定義 1.6 凸関数と凹関数

凸集合 X を定義域とする実数値関数 (1.1) に対して，

---

1) “[∀～]：” は “すべての～に対して，” と読む．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

$[\forall\, \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{X},\ \alpha \in (0,1)]: \Gamma[\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2] \leqq \alpha\Gamma(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha)\Gamma(\boldsymbol{x}_2)$

が成立すれば，Γ を凸関数といい，

$[\forall\, \boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{X},\ \alpha \in (0,1)]: \Gamma[\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2] \geqq \alpha\Gamma(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha)\Gamma(\boldsymbol{x}_2)$

が成立すれば，Γ を凹関数という．

定義 1.7 限界代替率

集合 $\boldsymbol{X}(\subset \boldsymbol{R}^n)$ を定義域とする連続的偏微分可能な実数値関数 (1.1)

$$y=\Gamma(\boldsymbol{x})=\Gamma(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

に対しては，一般に，$\Gamma_{x_\nu}(\boldsymbol{x}) \equiv \partial\Gamma(\boldsymbol{x})/\partial x_\nu \neq 0$ ならば，

$$[-\partial x_\nu/\partial x_\mu]_{y=\mathrm{const.}}=[\Gamma_{x_\mu}(\boldsymbol{x})/\Gamma_{x_\nu}(\boldsymbol{x})]_{y=\mathrm{const.}}$$

$$\mu,\ \nu=1,\ \cdots,\ n,\quad \mu\neq\nu$$

という関係が成立する．このとき，この関係の左辺を特に（x_ν の x_μ に対する）限界代替率という．

定義 1.8 弾力性

集合 $\boldsymbol{X}(\subset \boldsymbol{R}^n)$ を定義域とする連続的偏微分可能な実数値関数 (1.1) に対して，$\Gamma(\boldsymbol{x})\neq 0$ のとき，

$$\eta_\nu \equiv \left|\frac{x_\nu}{\Gamma(\boldsymbol{x})}\Gamma_{x_\nu}(\boldsymbol{x})\right|,\quad \nu=1,\cdots,n$$

を（y の x_ν に対する）弾力性という．

§2 生産関数

以後，時刻を t で表す．そして，t は常に非負実数 ($t\in \boldsymbol{R}_\oplus$) とする．また，$n$ は常に自然数 ($n\in \boldsymbol{N}$) であるとする．

定義 1.9 生産関数

時刻 t において，生産要素に関する（n_1 次）投入ベクトル $\boldsymbol{x}(\in \boldsymbol{R}_\oplus^{n_1})$ に対して，それを最も効率的に利用した場合に，生産物に関するある（n_2 次）産出ベクトル $\boldsymbol{y}(\in \boldsymbol{R}_\oplus^{n_2})$ が得られるという関係が経済の技術状態として成立していると，ここに生産要素投入量と生産物産出量との間に 1 つの対応が定められ

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

る．この対応 F を

(1.2)　　$F: \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^{n_1} \times \boldsymbol{R}_{\oplus} \to \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^{n_2}$,

(1.2)　　$\boldsymbol{y}=F(\boldsymbol{x},\ t),\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^{n_1},\ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^{n_2}$,

(1.2)　　$\boldsymbol{y}=F(\boldsymbol{x},\ t)$

のごとく書き，(時刻 t の) 生産関数と呼ぶことにする．なお，分析の便宜に応じて，連続時刻が採用されることもあれば離散時刻が採用されることもある．

伝統的分類法に従うと，経済の生産要素は土地を含む自然資源，労働力及び資本財である．しかし，現代経済学の多くの分析においては，自然資源は労働力や資本財ほどには重視されていない．この点については種々の理由が考えられる．例えば，資本蓄積と技術進歩は土地の効率的利用や新しい自然資源の開発・利用を可能にし，その結果，土地を含む自然資源の供給を付帯的に増大してきたのかも知れない．あるいは，自然資源の供給は本来は有限であるが，そのことが経済活動を営む上で大きな制約となるほどには自然資源の供給は希少ではないのかも知れない．また，経済学的説得力の減少と数学的能率の増大を天秤にかけるとき，自然資源を考察対象から外したいという気持が生ずるのかも知れない．いずれの理由を根拠にしてもいいのであろうが，差し当たり以下の分析においては，我々は生産要素としての土地を含む自然資源を無視するであろう．

自然資源を考慮しないとしても，労働力の中には，熟練労働力・未熟練労働力，農業就業労働力・工業就業労働力・サービス業就業労働力，知的労働力・肉体労働力などの種々の型の異質労働力が存在し，また，資本財の中には，固定資本財・流動資本財，熔鉱炉・工作機械・輸送機・発電機・建物，旧式機械・新鋭機械などの種々の型の異質資本財が存在する．従って，一口に労働力とか資本財とかいっても，その内容は多様である．

一般論としては，種々の型の異質労働力及び異質資本財を可能な限り区別することが望ましく思われる．そして通常，多部門分析においてはそうした取り扱いがなされているようである．しかし，分析の対象・領域によっては，第一

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

次接近としては，そのような厳密性を放棄してでも，できるだけ大きな分類法に従った方が明確な結論が得られることがある．このような理由から，最も極端な場合には，しばしば，1種類の同質的労働力と1種類の同質的資本財というただ2つの生産要素のみの存在が仮定される[1)]．多くの1部門分析は正にこの極端な状況を想定してきた．本稿においては，我々もまたこの単純化仮定を採択する[2)]．

我々の日常生活においては，熔鉱炉1基，輸送機3台というように，自然数によって測定される単位が多数ある．しかし，分析を進めていく上においては，労働力と資本財の単位は共に連続的に分割可能であると考えた方がはるかに便利である．そこで我々はこの仮定を採用したい[3)]．

以上によって，我々はまず次の諸点を仮定したことになる．

仮定 1.1　経済には，生産要素として，ただ1種類の同質的労働力とただ1種類の同質的資本財のみが存在する．両要素はいずれも連続的に分割可能な単位によって測定される．

労働力は本源的な生産要素であって，それは技術的な生産関係を通じて生み出されるという性質のものではないであろう．従って一般に，生産関数（1.2）の値域の任意要素には労働力産出量を示す成分はないと考えられる．かくて，生産物を構成する財の種類は消費財と投資財ということになる．ここで投資財というのは生産物としての資本財つまり新資本財のことである．仮定 1.1 によれば，資本財は同質であるから，過去から蓄積されてきた生産要素としての

1）1種類の同質的労働力とか1種類の同質的資本財という概念には集計の問題（aggregation problem）が発生し，この概念を用いることの経済的合理性についてはまだ十分に説得的な説明が与えられていないように思われる．しかし我々はこの難問に立ち入ることはしない．

2）資本財の製造年月日を考慮に入れるいわゆるビンテージ分析法は1つの例外である．しかし，数学的展開の複雑さ・困難さはこの分析法の適用範囲を大きく制限している．

3）例えば，労働力については人時を，資本財については資本時間を測定単位とすれば何らの支障もないであろう．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

資本財と新たに産出された生産物としての資本財は同質である．ところで，経済活動において果たす役割という点からいうと，消費財と資本財は全く異質な財貨であり，本来ならば，最小限この2つの財貨は製造過程の最初から厳密に区別される方が望ましい．実際，いわゆる2部門分析は正にこのことを念頭に置いている．しかし，2部門分析が是としても，階段は一歩ずつ登った方が良い場合が多い．我々は，最終的には多部門分析を志向しているのであるが，目下のところは，その第一歩として，通常の1部門分析の便法に従って次のように仮定する．

仮定 1.2　経済には，消費財としても投資財としても利用可能なただ1種類の生産物のみが生産される．この単一生産物は連続的に分割可能であって，消費財と資本財のいずれに利用されるときも，資本財測定単位と全く同一単位で測定することができる．投資財として利用されるとき，この単一生産物は過去から蓄積されてきた資本財と同一の性質を持っている．また，この生産物は，一度資本財((消費財))として利用されると消費財((資本財))として再利用することはできない．

仮定 1.1 と 1.2 によって，生産関数（1.2）は

(1.3)　　$F: \boldsymbol{R}_\oplus^2 \times \boldsymbol{R}_\oplus \to \boldsymbol{R}_\oplus$

と書かれる．ここで，単一生産物産出量を Y，労働力投入量を $\bar{L}$，資本財投入量を K で表すと，上記関数 F は投入ベクトル $(\bar{L}, K)$（$\in \boldsymbol{R}_\oplus^2$）と時刻 t に対応して産出ベクトル Y（$\in \boldsymbol{R}_\oplus$）が定まることを意味している．そこで，この関係を

(1.3)　　$Y = F(\bar{L}, K, t),\ (\bar{L}, K, t) \in \boldsymbol{R}_\oplus^2 \times \boldsymbol{R}_\oplus,\ Y \in \boldsymbol{R}_\oplus$

と書いておく．

定義 1.10　総生産

単一生産物産出量のことを総生産と呼ぶことにする．

いま一度生産要素について考えてみよう．現実の問題としては，青写真段階においては，圧延機械を設置する代りに発電機を設置することも可能であろう．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

しかし，一度圧延機械が設置されてしまった段階においては，それを発電機に変容することは短期的には不可能と思われる．更に実際には，圧延機械1台には必要労働力何単位というように，設置される個々の資本財とそれを運転させるに必要な労働力との間には，短期的には，ある程度固定した関係も見られるであろう．基本的には，我々もこのことを疑うわけではない．しかし，1種類の同質的労働力と1種類の同質的資本財という極めて抽象化された生産要素を想定するときに，上述のような一見現実的な状況を重視する理由は何であろうか．多数の型の異質労働力や異質資本財の存在が考慮されてこそ，設置後資本財の変容不能性や資本財・労働力間の関係の固定性という考えはその正当な意味を持つ，と言えるのではないだろうか．1種類の同質的労働力と1種類の同質的資本財という概念の中には，具体的に我々が知覚しうる個々の型の労働力や資本財の特性をほとんど兼備した柔軟な機能が含まれていると理解した方が，仮定 1.1 の意味が十分に生かされるように思う．このような解釈に基づいて，我々は次のように仮定する．

仮定 1.3 所与の任意時刻について考える．2つの生産要素のどちらも投入する場合，両者の投入比率がいかなるものであっても必ず生産物を得ることができるように，労働力も資本財も自由に変容させることができる．また，両生産要素の正の所与投入量に対して，いずれか一方の投入を増大 ((減少)) させると総生産は増大 ((減少)) する．更に，関数 (1.3) は投入ベクトル $(\bar{L}, K)$ に関して $\boldsymbol{R}_+{}^2$ 上で2回連続的偏微分可能である．

仮定 1.3 によれば，関数 (1.3) について，

(1.4) $$[\forall(\bar{L}, K, t)\in \boldsymbol{R}_+{}^2\times \boldsymbol{R}_\oplus]: F(\cdot)>0,\ F_L(\cdot)>0,\ F_K(\cdot)>0$$

が成立している[1]．ただし，ここで

$$F_L\equiv\partial F/\partial\bar{L},\ F_K\equiv\partial F/\partial K.$$

1) 今後，誤解の生ずるおそれのないかぎり，独立変数を (•) と縮約したり，ときには全く省略したりする．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

定義 1.11 限界生産性

実数値を取る生産関数 (1.2) が偏微分可能であるとき，各独立変数（=投入ベクトルの各成分）による第1次偏導関数をその変数の限界生産性という．例えば，$F_L(\cdot)$ を労働力の限界生産性，$F_K(\cdot)$ を資本財の限界生産性という．

両生産要素投入量及び時刻を所与任意とする．このとき，両生産要素の投入を α (>1) 倍したときの総生産への効果には次の4つの場合が考えられる．すなわち，総生産は，(1) 常に α 倍以上（=生産規模に関して収穫逓増），(2) 常に α 倍以下（=収穫逓減），(3) 常に丁度 α 倍（=収穫不変）となるか，あるいは，(4) α とは一定の規則的関係を持たない．一般的には，所与の両生産要素投入量の大きさによって結果は異なるであろうし，また，1種類の同質的労働力・1種類の同質的資本財・単一生産物といった概念が生産技術上に有する特質が十分明確に規定されているわけではないので，4つの場合のいずれが生ずるかを答えることは難しい――(4) と答えるだけでは何らの積極的意味もないであろう．そこで我々は，第一次接近として，最も処理することの容易な次の仮定を採用する．

仮定 1.4 各時刻に対して，生産規模に関する収穫不変性が作用する．つまり，所与任意時刻に関して，所与任意の両生産要素投入量に対して，その投入量を共に α (>0) 倍すると総生産も丁度 α 倍になる．換言すると，生産関数 (1.3) は投入ベクトル $(\bar{L}, K)$ に関して $\boldsymbol{R}_{\oplus}{}^2$ 上で1次同次関数である．

所与時刻 t° において技術的に生産可能な所与総生産を Y° (>0) とする．生産関数 (1.3) に $Y=Y^\circ$, $t=t^\circ$ を代入すると，

$$F(\bar{L}, K, t^\circ)-Y^\circ=0$$

が得られる．Y° は t° において生産可能であるから，仮定 1.3 により，

$[\exists(\bar{L}^\circ, K^\circ, t^\circ)\in \boldsymbol{R}_+{}^2\times\{t^\circ\}]: F(\cdot)-Y^\circ=0,\ F_K(\cdot)\neq 0,$
$F_L(\cdot, t^\circ),\ F_K(\cdot, t^\circ)$ は $(\bar{L}^\circ, K^\circ)$ の適当な近傍において連続的偏微分可能，

である．そうするとこのとき，陰関数定理により[1)]，

1) 陰関数定理は微分学の大抵の書物において詳論されている．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

$$F[\bar{L},\ {}^{Y^\circ}K(\bar{L}),\ t^\circ]-Y^\circ\equiv 0$$

を満たす微分可能な関数

$$K={}^{Y^\circ}K(\bar{L}),\ [\bar{L},\ {}^{Y^\circ}K(\bar{L})]\in \boldsymbol{R}_+{}^2$$

が存在し，その導関数は

(1.5) $\quad {}^{Y^\circ}K'(\bar{L})=-F_L(\bar{L},\ K,\ t^\circ)/F_K(\bar{L},\ K,\ t^\circ)$

によって与えられる．そうすると， $-{}^{Y^\circ}K'(\bar{L})$ は労働力投入に対する資本財投入の時刻 t° における限界代替率である．

定理 1.1 仮定 1.1—1.4 を満たす技術状態の下では， 生産関数 (1.3) と所与任意時刻 t° に対して，以下の諸関係が成立する．

(Ⅰ) 次の (i) と (ii) は同等である．

(i) $-{}^{Y^\circ}K''(\bar{L})<0,$

(ii) $F_{LL}[\bar{L},\ {}^{Y^\circ}K(\bar{L}),\ t^\circ]<0,\ F_{KK}[\bar{L},\ {}^{Y^\circ}K(\bar{L}),\ t^\circ]<0.$

(Ⅱ) 次の (i) と (ii) は同等である．

(i) 生産可能なすべての $\tilde{Y}$ に対して，$-{}^{\tilde{Y}}K''(\bar{L})<0.$

(ii) $[\forall(\bar{L},\ K,\ t^\circ)\in \boldsymbol{R}_+{}^2\times\{t^\circ\}]:F_{LL}(\cdot)<0,\ F_{KK}(\cdot)<0.$

(Ⅲ) (Ⅱ) の条件 (i) (ii) のいずれかが成立するとき，生産関数 (1.3) は $\boldsymbol{R}_+{}^2$ 上の $(\bar{L},\ K)$ に対して凹関数となる．

ただし，ここで

$$F_{LL}\equiv\partial^2F/\partial\bar{L}^2,\ F_{KK}\equiv\partial^2F/\partial K^2.$$

証明 仮定 1.4 によって，関数 (1.3) は $\boldsymbol{R}_\oplus{}^2$ 上の $(\bar{L},K)$ に関して 1 次同次であるから，Euler の定理により[1]，所与任意の t° に対して，

1) 集合 $X(\subset \boldsymbol{R}^n)$ を定義域とする κ 回連続的偏微分可能な $\nu(\in \boldsymbol{N})$ 次同次実数値関数 (1.1) に対しては，

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^\kappa\Gamma(\boldsymbol{x})=\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\kappa+1)\Gamma(\boldsymbol{x})$$

が成立する．ここで，$x_j\ (j=1,\cdots,n)$ は $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分である．この定理を Euler の定理というのであるが，特に，$\kappa=1,\ \nu=1,\ n=2$ と置くと，

$$x_1\Gamma_{x_1}+x_2\Gamma_{x_2}=\Gamma(x_1,\ x_2)$$

となって，本文の関係が得られる．なお，この定理の証明については，例えば，入江 [7] p.134 を参照するといい．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

$$[\forall(\bar{L},\ K,\ t^\circ)\in \boldsymbol{R}_+{}^2\times\{t^\circ\}]:\ Y=F(\cdot)=\bar{L}F_L+KF_K$$

が成立する．これを全微分すると

$$(\bar{L}F_{LL}+KF_{KL})\,d\bar{L}+(\bar{L}F_{LK}+KF_{KK})\,dK=0$$

となるが，この式は $d\bar{L}$, dK が意味を持ち得る領域内の任意の $d\bar{L}$, dK に対して成立するから，

$$[\forall(\bar{L},\ K,\ t^\circ)\in \boldsymbol{R}_+{}^2\times\{t^\circ\}]:\ \bar{L}F_{LL}+KF_{KL}=0,\ \bar{L}F_{LK}+KF_{KK}=0,$$

すなわち，

$$(1.6)\qquad [\forall(\bar{L},\ K,\ t^\circ)\in \boldsymbol{R}_+{}^2\times\{t^\circ\}]:\ F_{KL}=-\bar{L}F_{LL}/K=-KF_{KK}/L.$$

【(Ⅰ) (i)⇒(ii)】[1] (1.5) により，

$$① \qquad -{}^{Y^\circ}K''(\bar{L})=(F_{LL}F_K{}^2+F_{KK}F_L{}^2-2F_{KL}F_LF_K)/F_K{}^3$$

であるから，(1.4) と (i) により，所与の Y° と t° に対して

$$F_{LL}F_K{}^2+F_{KK}F_L{}^2-2F_{KL}F_LF_K<0$$

となる．この式に (1.6) を代入することによって結論が得られる．

【(Ⅰ) (i)⇐(ii)】 (1.6) ① により，直ちに結論が得られる．

【(Ⅱ) (Ⅲ)】 (1.4) により，所与任意の正投入ベクトル $(\bar{L},\ K)$ と時刻 t° に対してある正総生産 $\tilde{Y}$ が定まる．この $\tilde{Y}$ については，(Ⅰ) が成立すると同時に，(1.6) により，

$$F_{LL}F_{KK}-F_{KL}{}^2=0$$

も成立する．このことによって (Ⅱ) (Ⅲ) は証明されている．[2]　　(証了)

---

1) "A⇒B，B⇐A" は "A ならば B が成立する．" と読み，"A⇔B" は "A と B は同等である．" と読む．

2) 集合 $\boldsymbol{X}(\subset \boldsymbol{R}^n)$ を定義域とする 2 回連続的偏微分可能な実数値関数 (1.1) が凹関数であるための必要十分条件は，行列

$$M_{(n)}\equiv\begin{bmatrix}\Gamma_{x_1x_1},\cdots,\Gamma_{x_1x_n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Gamma_{x_nx_1},\cdots,\Gamma_{x_nx_n}\end{bmatrix}$$

がすべての $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ について半負定値行列となることである．ただし，ここで $\Gamma_{x_ix_j}\equiv\partial^2\Gamma/\partial x_j\partial x_i$, x_i, x_j $(i,\ j=1,\cdots,n)$ は $\boldsymbol{x}$ の成分，　※

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

定理 1.1 は，生産関係に関する仮定 1.1—1.4 の下では，所与任意時刻 t^{0} に関して，総生産 Y^{0} における限界代替率逓減と Y^{0} における限界生産性逓減とは同等であり，また，生産可能なすべての総生産に関して限界代替率が逓減することと，生産関数 (1.3) は $\boldsymbol{R}_{+}^{2}\times\{t^{0}\}$ 上で限界代替率が逓減することとは同等である，と言っている.

限界代替率逓減とは，所与任意時刻において，2つの生産要素を除いて他のすべての生産要素投入量を固定させた状態で同一水準の生産物産出量を得ようとする場合に，2つの可変的生産要素のうちの第1 ((第2)) 要素投入量を増大させ第2 ((第1)) 要素投入量を減少させるとき，その代替が技術的に次第に困難となる結果，第1 ((第2)) 要素投入量を同一割合で増大させていっても，それに対応する第2 ((第1)) 要素投入量の減少の度合はますます小さくなっていく，ということを意味している．一方，限界生産性逓減とは，時刻と他の生産要素投入量を固定したままである1つの要素投入量を増大 ((減少)) させていくと，その要素の限界生産性は次第に減少 ((増大)) していく，ということを意味している．直観的には，限界代替率逓減とか限界生産性逓減の想定はさして不自然とは思えないのであるが，1次同次実数値生産関数の下においてさえ，生産要素が3種類以上存在する場合には，一般に，定理 1.1 に対応するような好都合な結果を得ることができない．そこで，今後の議論展開のことを考えて，我々は次のように仮定する.

※ とする．この定理の証明については，例えば，杉山〔14〕pp.21-22 を参照するといい.

なお，$M_{(n)}$ が半負定値行列であるための必要十分条件は，行列式

$$D_{(\nu)}\equiv\begin{vmatrix}\Gamma_{x_1x_1},\cdots,\Gamma_{x_1x_\nu}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Gamma_{x_nx_1},\cdots,\Gamma_{x_\nu x_\nu}\end{vmatrix},\quad \nu=1,\cdots,n$$

——$D_{(\nu)}$ は $D_{(n)}$ の ν 次主小行列式である——に関して，

$$(-1)^{\nu}D_{(\nu)}\geqq 0,\quad \nu=1,\cdots,n$$

が成立することである．この定理の証明については，例えば，古屋〔4〕pp.113-114 を参照するといい.

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

仮定 1.5 所与任意時刻 t° において，生産関数 (1.3) は $\boldsymbol{R}_\oplus{}^2$ 上の投入ベクトル $(\bar{L}, K)$ に関して凹関数であり，かつ，

(1.7) $[\forall(\bar{L}, K, t^\circ)\in\boldsymbol{R}_\oplus{}^2\times\{t^\circ\}]: F_{LK}(\cdot)>0$

が成立する．ただし，ここで

$$F_{LK}\equiv\partial^2 F/\partial K\partial\bar{L}.$$

(1.7) は，所与任意時刻 t° に対して，労働力 ((資本財)) の限界生産性は資本財 ((労働力)) 投入量が増大 ((減少)) するとともに増大 ((減少)) するということを意味している．なお，仮定 1.1—1.5 の下では限界代替率も限界生産性も共に逓減する．

補助定理 1.1 仮定 1.1—1.5 を満たす技術状態の下では，生産関数 (1.3) と正の $\bar{L}$ に対して，

$$\bar{y}\equiv Y/\bar{L},\ \bar{k}\equiv K/\bar{L},\ F(1, \bar{k}, t)\equiv f(\bar{k}, t)$$

と置くとき，次の関係が成立する．

(1.8) $\bar{y}=f(\bar{k}, t),\ (\bar{k}, t)\in\boldsymbol{R}_\oplus\times\boldsymbol{R}_\oplus,\ \bar{y}\in\boldsymbol{R}_\oplus,$

(1.9) $[\forall(\bar{k}, t)\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}_\oplus]: F_K(\cdot)=f_k(\cdot),\ F_L(\cdot)=f(\cdot)-kf_k(\cdot),$

(1.10) $\begin{cases}[\forall(\bar{k}, t)\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}_\oplus]: \\ f(\cdot)>0,\ f_k(\cdot)>0,\ f_{kk}(\cdot)<0,\ f(\cdot)-kf_k(\cdot)>0.\end{cases}$

ただし，ここで

$$f_k\equiv\partial f/\partial\bar{k},\ f_{kk}\equiv\partial^2 f/\partial\bar{k}^2.$$

証明 仮定 1.4 により，

$$[\forall(\bar{L}, K, t)\in\boldsymbol{R}_\oplus{}^2\times\boldsymbol{R}_\oplus,\ \alpha>0]: F(\alpha\bar{L}, \alpha K, t)=\alpha F(\bar{L}, K, t)$$

であるから，任意の正の $\bar{L}$ に対して，$\alpha=1/\bar{L}$ と置くと，

$$Y=F(\cdot)=\bar{L}F(1, \bar{k}, t)=\bar{L}f(\bar{k}, t)$$

となって直ちに (1.8) を得る．また，

$$F_K(\cdot)=\bar{L}f_K(\cdot)=f_k(\cdot),\ ただし，f_K\equiv\partial f/\partial K,$$

$$F_L(\cdot)=f(\cdot)+\bar{L}f_L(\cdot)=f(\cdot)-\bar{k}f_k(\cdot),\ ただし，\ f_L\equiv\partial f/\partial\bar{L},$$

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

$$F_{KK}(\cdot)=f_{kK}=f_{kk}/\bar{L},\ \text{ただし},\ f_{kK}\equiv\partial^2 f/\partial K\partial k$$

となるから，(1.4) (1.6) 及び (1.7) により，(1.9) (1.10) が得られる．(証了)

§3　CES 生産関数—例示

定義 1.12　代替の弾力性

所与任意時刻 t° において，正要素投入ベクトル $(\bar{L},\ K)$ について，σ を

(1.11)　$$\sigma=-\frac{(F_K/F_L)\,d(K/\bar{L})}{(K/\bar{L})\,d(F_K/F_L)}\quad\text{or}\quad\sigma=-\frac{d\log(K/\bar{L})}{d\log(F_K/F_L)}$$

によって定義し，これを（時刻 t° における）要素間の代替の弾力性という．

仮定 1.1，1.2 及び 1.4 の下では，(1.9) により，

$$\sigma=-\frac{d\log\bar{k}/d\bar{k}}{d\log[f_k/(f-\bar{k}f_k)]/d\bar{k}}$$

と書くことができる．従って，結局，

(1.12)　$$\sigma=-\frac{(f-\bar{k}f_k)f_k}{\bar{k}ff_{kk}}$$

となる．なお，代替の弾力性概念は常に所与時刻 t° に関して定義されているという点を今一度ここで確認しておこう．

定理 1.2　仮定 1.1，1.2 及び 1.4 を満たす技術状態の下では，生産関数 (1.3)，所与任意時刻 t° 及びすべての正投入ベクトル $(\bar{L},\ K)$ に対して，以下の諸関係が成立する．

(I)　次の (i) と (ii) は同等である．

(i)　$\sigma\equiv 1$.

(ii)　生産関数 (1.3) が

(1.13)　$$Y=A\bar{L}^{\alpha}K^{1-\alpha},\ A=\text{const.}>0,\ \alpha=\text{const.}\in(0,\ 1)$$

と表示される．

(II)　次の (i) と (ii) は同等である．

(i)　$\sigma=\text{const.}\neq 1$.

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

（ii） 生産関数（1.3）が

$$(1.14)\quad \begin{cases} Y=B\left[\alpha \bar{L}^{-\beta}+(1-\alpha)K^{-\beta}\right]^{-1/\beta}, \\ B=\text{const.}>0,\ \alpha=\text{const.}\in(0,\ 1),\ \beta=\text{const.}\neq 0 \end{cases}$$

と表示される．

なお，生産関数（1.13）と（1.14）は CES 生産関数――ないし（1.14）は特に Cobb-Douglas 生産関数――と呼ばれている[1)]．

証明 【（Ⅰ）（Ⅱ）(i)⇒(ii)】 $\sigma=\sigma^\circ=\text{const.}$ と置くとき， $\sigma^\circ=1$ ならば（Ⅰ）の (ii) が成立し，$\sigma^\circ\neq 1$ ならば

$$\beta=(1-\sigma^\circ)/\sigma^\circ \quad \text{or} \quad \sigma^\circ=1/(1+\beta)$$

で（Ⅱ）の (ii) が成立することを示す．

$$\omega=(f-\bar{k}f_k)/f_k,\ \omega'=-ff_{kk}/f_k^2$$

と置くと，(1.12) と $\sigma=\sigma^\circ$ により，変数分離形の微分方程式

$$\omega'/\omega=1/\sigma^\circ\bar{k}$$

が得られる．これを積分すると，

$$\log\omega=\frac{1}{\sigma^\circ}\log\bar{k}+\log C_0,\ C_0=\text{const.}>0$$

となるから[2)]，ω の定義式を考えると，

$$\omega=C_0\bar{k}^{1/\sigma^\circ}=(f-\bar{k}f_k)/f_k$$

により，再び，変数分離形の微分方程式

$$① \qquad f_k/f=1/\bar{k}(1+C_0\bar{k}^\beta)$$

が得られる．

【（Ⅰ）(i)⇒(ii)】 $\sigma^\circ=1$ つまり $\beta=0$ を ① に代入し積分すると

$$\log f=\frac{1}{1+C_0}\log\bar{k}+\log A,\ A=\text{const.}>0$$

---

1) CES とは， constant elasticity of substitution の頭文字による略号である．この生産関数は Arrow-Chenery-Minhas-Solow〔2〕によって初めて詳細に研究された．

2) 変数分離形の微分方程式は，微分方程式の解法に関する書物において最初の部分で説明されている．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

により，結局，

$$f=A\bar{k}^{1-\alpha},\ \alpha=C_0/(1+C_0)\in(0,\ 1)$$

となって，(ii) が成立する．

【(II) (i)⇒(ii)】 ① の右辺を部分分数に書き換えると，

$$\frac{f_k}{f}=\frac{1}{\bar{k}}-\frac{C_0\bar{k}^{\beta-1}}{1+C_0\bar{k}^{\beta}}$$

となる．これを積分すると，

$$\log f=\log\bar{k}-\frac{1}{\beta}\log(1+C_0\bar{k}^{\beta})+\log C_1,\ C_1=\text{const.}>0$$

を導く．これを整理すれば

$$f=C_1\bar{k}(1+C_0\bar{k}^{\beta})^{-1/\beta}=C_1(1+C_0)^{-1/\beta}[(C_0+\bar{k}^{-\beta})/(1+C_0)]^{-1/\beta}$$

となるから，

$$F=B[\alpha\bar{L}^{-\beta}+(1-\alpha)K^{-\beta}]^{-1/\beta},\ B=C_1(1+C_0)^{-1/\beta},\ \alpha=C_0/(1+C_0)$$

によって結論が得られる．

【(I) (i)⇐(ii)】 (1.13) によって

$$\bar{y}=f(\bar{k},\ t^{\circ})=A\bar{k}^{1-\alpha},$$

$$f_k=(1-\alpha)A\bar{k}^{-\alpha},\quad f_{kk}=-\alpha(1-\alpha)A\bar{k}^{-\alpha-1},\quad f-\bar{k}f_k=\alpha A\bar{k}^{1-\alpha}$$

を導くから，これを (1.12) に代入すると $\sigma=1$ となる．

【(II) (i)⇐(ii)】 (1.14)によって

$$\bar{y}=f(\bar{k},\ t^{\circ})=B[\alpha+(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}]^{-1/\beta},$$

$$f_k=(1-\alpha)B\bar{k}^{-\beta-1}[\alpha+(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta},$$

$$f_{kk}=-\alpha(1-\alpha)(1+\beta)Bk^{-\beta-2}[\alpha+(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}]^{-(1+2\beta)/\beta},$$

$$f-kf_k=\alpha B[\alpha+(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}]^{-(1+\beta)/\beta}$$

を導くから，これを (1.12) に代入すると $\sigma=1/(1+\beta)\neq1$ となる． (証了)

(1.13) と (1.14) の右辺を $F(\bar{L},\ K,\ t)$ と置くと，簡単な計算によって，仮定 1.3 及び 1.5 が成立していることが分かる． 従って， **CES** 生産関数

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

(1.13) と (1.14) は，仮定 1.1，1.2 そして 1.4 を満たす生産関数 (1.3) については，要素間の代替の弾力性が正定数であるときには，仮定 1.3 と 1.5 は自動的に満たされる，ということを明らかにしている．かくて，CES 生産関数は仮定 1.1—1.5 を満たす生産関数を例示している．

CES 生産関数 (1.14) を

$$Y=(B_1\bar{L}^{-\beta}+B_2K^{-\beta})^{-1/\beta},\ B_1=\alpha B^{-\beta},\ B_2=(1-\alpha)B^{-\beta}$$

と書いても同じことである．しかし，もし CES 生産関数を

$$(1.15)\qquad Y=(B_1\bar{L}^{-\beta}+B_2K^{-\beta})^{-1/\beta},\ B_1,\ B_2=\text{const.}>0$$

と表現してしまうと，(1.14) も (1.15) も共に CES 生産関数であるにもかかわらず，両者の性質は全く異なってしまう．これを今 $\beta\to 0$ によって明らかにしよう．(1.14) と (1.15) を

$$(1.14)'\qquad \log\bar{y}=\log B-\frac{1}{\beta}\log[\alpha+(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}]$$

$$(1.15)'\qquad \log\bar{y}=-\frac{1}{\beta}\log(B_1+B_2\bar{k}^{-\beta})$$

と書き換えておく．そうすると，(1.15)′ については，$B_1+B_2\neq 1$ ならば $\bar{y}$ は $\beta=0$ で不連続になってしまう．一方，(1.14)′ については，不定形の極限値導出法——いわゆる L'Hospital の定理——を利用すると，

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to 0}\log\bar{y}&=\log B-\lim_{\beta\to 0}\frac{\log[\alpha+(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}]}{\beta}\\&=\log B-\lim_{\beta\to 0}\frac{-(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}\log\bar{k}}{\alpha+(1-\alpha)\bar{k}^{-\beta}}\\&=\log B+(1-\alpha)\log\bar{k}=\log B\bar{k}^{1-\alpha}\end{aligned}$$

が成立する．対数関数は連続であるから，

$$\lim_{\beta\to 0}\log\bar{y}=\log\lim_{\beta\to 0}\bar{y}$$

により，結局，

$$\lim_{\beta\to 0}\bar{y}=B\bar{k}^{1-\alpha}$$

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

という関係が得られる． 従って，係数の違いを無視すると，(1.14) において $\beta \to 0$ とすれば (1.13) に帰着する．こうして，(1.14) は $\beta=0$ において連続であることが分かった．[1)]

§4 Harrod 中立技術進歩

一般に，時間経過に伴って経済における技術知識状態が進歩すると考えられる．しかし，技術進歩の型は極めて多様であるために，その特性を初等関数によって表現可能であるような1つの法則の下にはめ込むことは至難である．ある型の技術進歩は資本財に比して労働力を節約するであろうし，他の技術進歩はその逆であろう．産業革命期のように技術知識が長足の進歩を遂げる時代もあれば，逆に停滞している時代もあるであろう．また，組織的改善や学習作用のように，同一労働者・同一機械による同一時間の生産によっても生産量が増大する場合もあれば，科学の進歩や高学歴化によって新しい型の労働力や新しい型の資本財が登場することもあるであろう．このように少し考えただけでも，技術進歩一般を説明しかつ数式表現可能な法則はありそうにないと思われる．それにもかかわらず，経済の運行に当って無視することのできない役割を持つと思われる技術進歩の問題を等閑に付すよりは，そうしない方が望ましいであろう．そこでこの§では，技術進歩の概念を，技術的知識水準の向上に伴う生産関数の上方へのシフトという限定的な意味で用いることにし，[2)] その第一次接近として，体化されない技術進歩の一例であり，いろいろな意味で最も都合良く処理することのできる Harrod 中立技術進歩を取り上げる．

---

1) CES 生産関数のパラメータ β をゼロに近付けると Cobb-Douglas 生産関数になるということは，一般には，言えないように思う． この点，今井-宇沢-小宮-根岸-村上〔6〕pp.120-121 の説明と証明では誤解を招くおそれがある．

2) 今日，多くのモデル分析において技術進歩という場合，通常は生産関数の上方シフトのことである． この点については，例えば，荒〔3〕p.93, Allen〔1〕pp. 293-296 を参照されたい．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

定義 1.13 Harrod 中立技術進歩

所与の資本財限界生産性の下では資本総生産比率（=資本係数）K/Y が時間変化に全く影響を受けないとき，このような技術進歩を Harrod 中立的という．つまり，Harrod 中立技術進歩を伴う生産関数については，資本総生産比率は陽表的には資本財限界生産性のみの関数となる．なお，Harrod 中立技術進歩を語る場合には，連続時刻が採択され，更に，生産関数（1.3）は t に関して連続的偏微分可能とされる．

補助定理 1.2 仮定 1.1—1.5 を満たす技術状態の下では，生産関数（1.3）に関して，次の（i）と（ii）は同等である．

（i） 技術進歩が Harrod 中立的である．

（ii） 資本財限界生産性は陽表的には資本総生産比率（=資本係数）のみの関数となる．

証明 今

$$x \equiv K/Y = \bar{k}/\bar{y}, \qquad r = f_k(\bar{k}, t)$$

と置くとき，(1.10) により，任意時刻に対して，$\boldsymbol{R}_+$ 内の適当な領域を考えると，$\bar{k}$, $\bar{y}$, x 及び r の間には，それぞれ微分可能で単調な関数関係

①
$$\begin{tikzcd} \bar{k} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \bar{y} \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dl, leftrightarrow] \\ x \arrow[r, leftrightarrow] & r \end{tikzcd}$$

例えば，

$$\bar{k} = {}_1k\ (r,\ t),\ {}_1k_r(\cdot) < 0,$$

$$\bar{k} = {}_2k(x,\ t),\ {}_2k_x(\cdot) > 0$$

等々が生まれることに注目しておく．

【(i)⇒(ii)】 (i) により，

$$x = \frac{{}_1k(r,\ t)}{f[{}_1k(r,\ t),\ t]} = {}_1x(r),$$

$${}_1x'(r) = (f - \bar{k} f_k)\ {}_1k_r / f^2 < 0 \qquad [(1.10)]$$

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

であるから，逆関数 ${}_1x^{-1}\equiv{}_1r$ が存在して，

② $\qquad r={}_1r(x),\ {}_1r'(x)<0$

となって結論を得る．

【(i)⇐(ii)】 (ii) により，

$$r=f_k[{}_2k(x,\ t),\ t]={}_2r(x),$$

$${}_2r'(x)={}_2k_x f_{kk}<0 \qquad [(1.10)]$$

となるから，この逆関数 ${}_2r^{-1}\equiv{}_2x$ を取ると，

③ $\qquad x={}_2x(r),\ {}_2x'(r)<0$

となって結論を得る． (証了[1])

定理 1.3 仮定 1.1—1.5 を満たす技術状態の下では，生産関数 (1.3) に関して，次の (i) と (ii) は同等である．

(i) 技術進歩が Harrod 中立的である．

(ii) 生産関数 (1.3) が

(1.16) $\qquad [\forall(\bar{L},K,t)\in\boldsymbol{R}_+^2\times\boldsymbol{R}_\oplus]:F(\bar{L},K,t)=Y[T(t)\bar{L},K],\ T(t)>0$

と表示される．

証明 まず，

$$\bar{y}=f[{}_2k(x,\ t),\ t]={}_1y(x,\ t)={}_1y(\bar{k}/\bar{y},\ t)$$

と置くと，

$$d\bar{y}=({}_1y_x/{}_1y)(d\bar{k}-xd\bar{y})+{}_1y_t\,dt$$

により，

① $\qquad f_k={}_1y_x/({}_1y+{}_1y_x\,x)$

となることに注目しておく．

【(i)⇒(ii)】 (i), 補助定理 1.2 及び ① により，

$${}_1y_x/({}_1y+{}_1y_x\,x)={}_1r(x)$$

1) ①における関数関係には t が陽表的に現れているが，②と③のそれには t が陽表的には現れていない．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

となるから，これにより線型1階偏微分方程式

② $$[1-{}_1r(x)x]\,{}_1y_x={}_1r(x)\,{}_1y$$

を得る．このとき，力線の微分方程式は

$$(1/\bar{y})\,d\bar{y}=\theta(x)\,dx$$

$$\theta(x)\equiv{}_1r(x)/[1-{}_1r(x)\,x]=r\bar{y}/(\bar{y}-r\bar{k})>0 \qquad [(1.10)]$$

となり，これを積分すると，

③ $$\log\bar{y}=\int\theta(x)\,dx+\log T(t),\ T(t)>0$$

を導く[1]．ここで以下の便宜を図って，

$$y=\bar{y}/T(t),\ k=\bar{k}/T(t)$$

と置くことにすると，③ は

$$y={}_2y(x)\equiv\exp\int\theta(x)\,dx,\ {}_2y'(x)>0$$

と書かれる．従って，逆関数 ${}_2y^{-1}\equiv{}_3x$ が存在して，

$$x={}_3x(y),\ {}_3x'(y)>0,$$

すなわち，

$$k={}_3x(y)\,y\equiv{}_3k(y),\ {}_3k'(y)>0$$

となるから，ここで再び逆関数 ${}_3k^{-1}\equiv{}_3y$ を取ると，

$$y={}_3y(k),\ {}_3y'(k)>0,$$

すなわち，

$$Y=T(t)\bar{L}\,{}_3y(K/T(t)\bar{L})\equiv Y[T(t)\bar{L},\ K]$$

を得る[2]．

【(i)⇒(ii)】 仮定 1.4 により，関数 $Y[T(t)\bar{L},K]$ は投入ベクトル $(\bar{L},K)$ に関して1次同次であるから，

---

1) 偏微分方程式 ② の解法については，例えば，寺沢〔15〕pp.323-325 を参照するといい．

2) 記号数を節約するために，今後，誤解を招くおそれがない場合には，関数記号と関数値（＝従属変数）記号を同一文字で表記する．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

$$Y=T(t)\bar{L}Y(1,\ k)\equiv T(t)\bar{L}\ {}_4y(k),$$

つまり，

④ $$y={}_4y(k),\ r=\partial\bar{y}/\partial\bar{k}={}_4y'(k)$$

を導く．更に，

$$x=k/y=k/{}_4y(k)\equiv{}_4x(k),\quad {}_4x'(k)=(y-rk)/y^2>0 \qquad [(1.10)]$$

となるから，この逆関数 ${}_4x^{-1}\equiv{}_4k$

$$k={}_4k(x),\ {}_4k'(x)>0$$

を取って，④ に代入すると，結局

$$r={}_4y'(k)={}_4y'[{}_4k(x)]\equiv{}_8r(x)$$

を得，かくて，補助定理 1.2 を考慮すると，結論が導かれる．（証了）[1]

ここで，Harrod 中立技術進歩の下では，CES 生産関数 (1.14) (1.15) は

$$(1.17) \qquad Y=[(T(t)\bar{L})^{-\beta}+K^{-\beta}]^{-1/\beta}$$

となることを示しておく．定理 1.3 により，Harrod 中立技術進歩の下では，生産関数 (1.3) は (1.16) と書かれねばならない．このことは，(1.14) においては

$$(1-\alpha)B^{-\beta}=1,\ \text{or}\ \alpha B^{-\beta}=\alpha/(1-\alpha),$$

(1.15) においては，

$$B_2=1$$

となることを意味する．それ故，(1.14) と (1.15) のそれぞれについて，

$$T(t)=[\alpha/(1-\alpha)]^{-1/\beta}\ \&\ T(t)=B_1{}^{-1/\beta}$$

と置くと，(1.17) が得られる．なお，(1.14) と (1.15) において，B, α, B_1 そして B_2 が正定数になるという意味は，所与時刻 t^0 に対して定数になるということであったことに留意しておこう．

定理 1.3 によって明らかにされたように，Harrod 中立技術進歩は労働力の

---

1) この定理の証明については，基本的には，Uzawa〔16〕を参考にした．なお，佐藤〔13〕p.114 による同定理の証明——ただし (i)⇒(ii) についてのみ——は明らかに不備である．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

効率のみが変化を受けるような技術進歩である．特に，労働効率への影響を示す項 $T(t)$ について，

$$T'(t)>0,\ T(0)=1$$

というような場合には，この技術進歩は，毎時一定不変の生産要素投入量に対して，効率単位で測った労働力——略して，効率労働力ということにする——投入量 E

$$E\equiv T(t)\bar{L}$$

が，それのみが，毎時増大していくという意味において，純粋に労働力増大的な技術進歩ということになる．ところで，Harrod 中立技術進歩の概念は，もともと1種類の同質的労働力と1種類の同質的資本財のみが存在する場合について定義されたものであった．生産要素が3種類以上存在するという場合にも，この定義の拡張解釈は可能であるかも知れないが，議論ははるかに複雑になるであろう．このように考えると，Harrod 中立技術進歩という概念よりも，純粋に労働増大的技術進歩という概念を使用した方が一層広い応用範囲を持つように思われる[1)]．そこでこの点を考慮して，Harrod 中立技術進歩の変種として，次の仮定を採用する．

仮定 1.6 技術進歩は純粋に労働増大的であり，労働効率は

$$T(t)=e^{\tau t},\ \tau=\text{const.}>0 \qquad (1.18)$$

によって増大する．すなわち，生産要素を毎時一定不変量投入するとき，効率労働力投入量が，それのみが，τ の率で成長していく．

定理 1.4 仮定 1.1—1.6 を満たす技術状態の下では，生産関数

$$Y=F(\bar{L},\ K,\ t)=Y(E,\ K),\ E=e^{\tau t}\bar{L} \qquad (1.3)'$$

に対して，

$$y\equiv Y/E\equiv\bar{y}/e^{\tau t},\ k\equiv Y/E\equiv\bar{k}/e^{\tau t},\ Y(1,\ k)=y(k)$$

と置くとき，正の $\bar{L}$ に対して，次の関係が成立する．

1）この点については，例えば，Allen〔1〕p. 293 を参照されたい．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

(1.19)　$y=y(k),\ k\in \boldsymbol{R}_{\oplus},\ y\in \boldsymbol{R}_{\oplus},$

(1.20)　$[\forall k\in \boldsymbol{R}_{+}]:\ Y_K(E,\ K)=y'(k),\ Y_E(E,\ K)=y(k)-ky'(k),$

(1.21)　$[\forall k\in \boldsymbol{R}_{+}]:\ y(k)>0,\ y'(k)>0,\ y''(k)<0,\ y(k)-ky'(k)>0.$

証明　仮定 1.4 により，関数 (1.3)′ は

$$Y=Y(E,\ K)=EY(1,\ k)=Ey(k)$$

となるから，直ちに (1.19) (1.20) が得られる．また，(1.9) (1.3)′ (1.19) (1.20) により，

$$y'(k)=f_k(\bar{k},\ t),\ y''(k)=e^{\tau t}f_{kk}(\bar{k},\ t),$$

$$y(k)-ky'(k)=e^{-\tau t}[f(\cdot)-\bar{k}f_k(\cdot)]$$

が成立するから，(1.10) によって (1.21) が導かれる．　　(証了)

なお，CES 関数 (1.17) は

(1.22)　$y=(1+k^{-\beta})^{-1/\beta},\ y'=(1+k^{-\beta})^{-(1+\beta)/\beta},\ \beta=(1-\sigma)/\sigma$

と書かれるから，次の関係が成立することに注目しておこう．

(1.23)　$\begin{cases}\sigma<1\Rightarrow y(0)=0,\ y(\infty)=1\,;\ y'(0)=1,\ y'(\infty)=0,\\ \sigma>1\Rightarrow y(0)=1,\ y(\infty)=\infty\,;\ y'(0)=\infty,\ y'(\infty)=1.\end{cases}$

§5　一時的社会厚生関数

我々の基本的関心は実証経済学によりもむしろ厚生経済学あるいは規範経済学にある．ところで，厚生経済学にあっては，何らかの目標を設定するのが常であり，とりわけ，効率的生産と公正な分配を2大目標として標榜することが多い．しかしながら，効率規準の設定に比較すると，公正規準の設定に関しては，客観性の欠如からしばしばはるかに多くの困難に遭遇する．そのため我々は，どちらかといえば効率性観点に重きを置きながら議論を進めようと思う[1)]．

1) このことは，公正の問題が効率の問題に比して重要性に欠けるということではない．我々の論脈の中においても公正の問題を処理することは可能だと思われる．しかし，公正規準設定という難題を避けることによって論旨が明確になるとすれば，当面，その方が上策であると考えたのである．この点に関しては，例えば，熊谷〔8〕pp.25-27 を参照されたい．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

目標設定に際して我々が基礎とするものは，いわゆる社会厚生関数の概念である．ただしかし，ここに提示しようとしている一時的社会厚生関数の概念は，Bergson や Samuelson によって論及された周知の複雑な社会厚生関数に比較すると，著しく限定化・特定化されたものである.[1)]

定義 1.14 一時的効用関数

時刻 t において，ある消費主体 $i\,(\in \boldsymbol{N})$ が消費財使用ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}^t\,(\in \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^n)$ から $u^t\,(\in \boldsymbol{R})$ の効用を得るとするならば，この主体には，時刻 t における消費財の直接的・最終的使用と効用指標との間に 1 つの対応 v^i が定まる．この対応 v^i を

(1.24)　$v^i : \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^n \times \boldsymbol{R}_{\oplus} \to \boldsymbol{R},$

(1.24)　$u^t = v^i(\bar{\boldsymbol{c}}^t,\ t),\ (\bar{\boldsymbol{c}}^t,\ t) \in \boldsymbol{R}_{\oplus}{}^n \times \boldsymbol{R}_{\oplus},\ u^t \in \boldsymbol{R}$

のごとく書き，これを主体 i の時刻 t における（一時的）効用関数と呼ぶことにする．

定義 1.15 限界効用

（一時的）効用関数（1.24）が消費財使用ベクトル $\bar{\boldsymbol{c}}^t$ に関して $\boldsymbol{R}_+{}^n$ 上で偏微分可能であるとき，各独立変数（$=\bar{c}^t$ の各成分）による第 1 次偏導関数をその変数の限界効用という．

さて，一口に消費財といっても，物的消費財・消費サービス，耐久消費財・非耐久消費財，必需品・ぜいたく品などの種々の型の異質消費財を思い浮かべることができる．また，耐久消費財の中には資本財に転用可能なものもあるであろう．このように，一般的には，消費財の型は多様を極めている．しかし，ここでは，労働力や資本財に関する想定と歩調を合わせる意味から，次のように仮定する．

仮定 1.7 経済に存在する消費財はただ 1 種類であり，それは同質である．

---

1) ここで用いられる厚生という語は，経済学者が経済的厚生と称している内容を意味している．この点については，例えば，Graaff〔5〕pp. 7-10 を参照されたい．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

仮定 1.7 の下では，主体 i の（一時的）効用関数 υ^i は

(1.25)　　$u^i=\upsilon^i(c^i, t)$, $(c^i, t)\in \boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}_{\oplus}$, $u^i\in\boldsymbol{R}$

と書かれる．このように1種類の同質的消費財のみが存在するという場合には，消費主体の効用と社会厚生とを結び付ける手段として，平均的消費主体の概念を導入すると便利である．

定義 1.16　平均的消費主体

平均的消費主体とは，(1) その消費財使用量が正しく経済全体の平均値を占め，かつ，(2) その効用関数が他のすべての消費主体の効用関数の平均的特徴を備えている，という意味で平均的な消費主体である[1)]．

定義 1.17　一時的社会厚生関数

平均的消費主体の時刻 t における一時的効用指標 u が当時刻の単一消費財の使用量 $\bar{c}$ で定義される関数 υ

(1.26)　　$u=\upsilon(\bar{c}, t)$, $(\bar{c}, t)\in\boldsymbol{R}_{\oplus}\times\boldsymbol{R}_{\oplus}$, $u\in\boldsymbol{R}$

によって与えられているものとする．このとき，効用指標 u を改めて時刻 t の一時的社会厚生指標と呼ぶことにする．なお，$N(t)$ を外生的に与えられる時刻 t の総消費主体量，C を経済の消費財使用量とすれば，定義的属性によって

$$\bar{c}\equiv C/N(t)$$

であることに注目しておこう．

以下においては，議論の単純化を図って次のように仮定する．

仮定 1.8　関数 υ は

(1.27)　　$\upsilon(\bar{c}, t)=u(\bar{c})=\varepsilon\bar{c}^{\gamma}$,　$\varepsilon, \gamma=\text{const.}\neq 0$,

によって特定化される．ただし，ここで

(1)　　$\gamma\in(0, 1)\Leftrightarrow\varepsilon>0$; $\gamma<0\Leftrightarrow\varepsilon<0$,

あるいは，

(2)　　$\gamma=1$ & $\varepsilon>0$

1)　このような消費主体が実際に存在するか否かは目下のところ別問題である．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

とする．(1) と (2) のいずれが成立するかによって分析上大きな差異が生ずるので，区別した方が望ましいときには，以後，(1) の場合を仮定 1.8.1，(2) の場合を仮定 1.8.2 と呼ぶ．

仮定 1.8.1 の下では

$$(1.28)\qquad \begin{cases} [\forall \bar{c}\in \boldsymbol{R}_+]: u'(\bar{c})>0,\ u''(\bar{c})<0, \\ u'(0)=\infty \end{cases}$$

が成立する．これは，限界一時的社会厚生が正で逓減すること，すなわち，平均消費主体の消費使用量増大((減少))とともに指標もまた増大((減少))するが，その増大((減少))の仕方は使用量の増大((減少))に伴って鈍化((鋭化))する，ということを意味している．しかし，(1.28)が成立するような関数形は(1.27.1) に限らない．例えば，

$$v(\bar{c},\ t)=\log \bar{c}^{\gamma},\ \gamma\in(0,\ 1]$$

もまた (1.28) を満たしている．仮定 1.6 において τ がゼロすなわち技術進歩がないという場合には，仮定 1.8.1 の代りに (1.28) を仮定することによって議論展開することが可能である．(1.28) の特性を持つ任意関数のうち，特に仮定 1.8.1 を採択したのは，技術進歩率 τ が正であることと無関係ではないように思う．

§6　新古典派定理

実証経済学の側面においては，現存する労働力や資本財が完全に雇用され得るか否かという点について，従来から新古典学派と Keynes 学派との論争があり，現在に及んでいる．この長期にわたる論戦は，経済現象や経済構造に対する両学派の人々の認識の差異に由来しているようである．しかし我々は，厚生経済学の立場と議論の単純化ということを考えて，次のように仮定する．

仮定 1.9　適当な制度的状況により，当経済においては，各時刻 t において，労働力存在量と資本財存在量はすべて生産に投入されるという意味で完全雇用が実現する．労働力存在量は総消費主体量（＝人口）と常に一定の関係を保ち，

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

両者は共に外生的に付与される一定率 λ ($\geqq 0$) で成長する． また， 資本財は外生的に付与される一定率 κ (>0) で減耗する[1]．

仮定 1.9 によると，時刻 t における労働力存在量 $\bar{L}(t)$ 及び総消費主体量 $N(t)$ は，$\bar{L}(0)$ と $N(0)$ をそれぞれ初期値とすると，

$$\bar{L}(t)=\bar{L}(0)e^{\lambda t},\ N(t)=N(0)e^{\lambda t},\ \lambda=\text{const.}\geqq 0$$

によって与えられる．しかし，労働力存在量と総消費主体量の区別は以後の議論に何ら本質的影響を及ぼさないと思われるので，今後はこの両者を特に区別することなく，

$$(1.29)\qquad \bar{L}(t)=e^{\lambda t}=N(t),\ \lambda=\text{const.}\geqq 0$$

と考えることにする．再び，仮定 1.9 によると，任意時刻において，資本財の存在量と投入量は等しくなるので，時刻 t の資本財存在量を $K(t)$，時刻 t の効率労働力存在量を $E(t)$ で表示すると，生産関数 (1.3)′ の下では，時刻 t の総生産 $Y(t)$ は

$$(1.3)''\qquad Y(t)=Y[E(t),\ K(t)]=Y[e^{(\lambda+\tau)t},\ K(t)]$$

によって与えられる．

定義 1.18 自然成長率

$\lambda+\tau$ は人口成長率と技術進歩率の和であるが，これを自然成長率という．

定義 1.19 純生産，消費，総投資，純投資

既に消費財とか投資財とかいう語をひんぱんに使用してきたが，ここで改めて消費や投資の概念を定義する．時刻 t の総生産は，消費財として最終的・直接的に利用されるか，将来の生産活動に寄与すべく新資本財（=投資財）の形成に充当されるかのいずれかである．そこで，消費財として使用される部分を消

1) 当然のことであるが，経済の制度的特質を抜きにしては完全雇用について語ることはできない．また，例えば，生産係数が技術的に固定しており，労働力と資本財は常にある一定比率でしか投入されえないという場合のように，技術的理由から不可避的に失業が発生するかも知れないという可能性は，当面のところ，仮定 1.3 によって排除される．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

費，投資財として資本形成に充当される部分を総投資という．更に，総投資のうち，資本財の減耗の更新に相当する部分を更新投資，資本財に対する新たな追加に相当する部分を純投資という．また，総生産から更新投資を差し引いた部分を純生産と呼ぶ．すなわち，

総生産＝消費＋総投資＝消費＋更新投資＋純投資，

純生産＝総生産－更新投資＝消費＋純投資，

純投資＝資本財存在量の増加分．

時刻 t の消費を $C(t)$，総投資を $Z(t)$ で表すと，総生産 $Y(t)$ の実行可能な代替的配分の集合は，定義 1.19 により，

$$(1.30)\qquad Y(t)=C(t)+Z(t),\quad C(t),\ Z(t)\geqq 0$$

である．再び，定義 1.19 によると，

$$(1.31)\qquad Z(t)=\dot{K}(t)+\kappa K(t).$$ [1]

である．ここで

$$c(t)\equiv C(t)/e^{(\lambda+\tau)t},\quad z(t)\equiv Z(t)/e^{(\lambda+\tau)t}$$

と表示すると，(1.18) (1.29) (1.3)″ (1.30) (1.31) により，

$$(1.32)\qquad y(k)=c+z,\quad k,\ c,\ z\geqq 0,$$

$$(1.33)\qquad \dot{k}=z-(\kappa+\lambda+\tau)k$$

という関係が得られる．[2]

定義 1.20　黄金時代

任意時刻に対して，労働力及び資本財の需給が均衡し，しかも資本総生産比率（＝資本係数）$K(t)/Y(t)$ が不変であるような経済状態——換言すると，均斉成長均衡状態——を黄金時代という．[3]

ここで，生産関数 (1.3)″ の構造パラメータの間に次の仮定が満たされるな

1)　$\cdot\equiv d/dt$．$\dot{K}(t)$ が負のときは純投資が負ということである．

2)　今後，誤解のおそれがないかぎり，独立変数 t を省略する．

3)　この定義は，Phelps〔9〕p.639 に準拠している．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

らば，いわゆる新古典派定理が導出される．

仮定 1.10 生産関数 (1.3)″ に対して，

(1.34) $\quad y'(\infty)<\kappa+\lambda+\tau<y'(0)$

が成立する[1]．

定理 1.5 (新古典定理) 仮定 1.1—1.10 が満たされるならば，一時的社会厚生指標を最大化するという意味で最適な黄金時代の下では，資本財の純限界生産性は自然成長率に等しくなる．すなわち，

(1.35) $\quad y'(k)=\kappa+\lambda+\tau.$

証明 (1.27) により，

$$u(\bar{c})=\varepsilon c^{\gamma}e^{\gamma\tau t}$$

となる．一方，黄金時代においては，定義によって，

$$K/Y=k/y(k)=x=\text{const. or } \dot{x}=(y-ky')\dot{k}/y^2=0$$

であるが，(1.21) によって，$y-ky'>0$ であるから，結局，

$$\dot{k}=0$$

が成立する．それ故，(1.32) (1.33) により，黄金時代においては，

$$\bar{c}=ce^{\tau t}=[y(k)-(\kappa+\lambda+\tau)k]e^{\tau t}$$

となり，社会厚生最大化のための k に関する 1 次および 2 次の条件

$$u'(\bar{c})\bar{c}'(k)=u'(\bar{c})[y'-(\kappa+\lambda+\tau)]e^{\tau t}=0,$$

$$u''(\bar{c})\bar{c}'(k)^2+u'(\bar{c})\bar{c}''(k)<0$$

が得られる．(1.21) (1.34) により，任意時刻 t に対して $c<\infty$ であるから，(1.27) を見て，$\bar{c}>0$ である限り $u'(\bar{c})\neq 0$ となって，1 次条件

(1.34) $\quad \bar{c}'(k)=y'(k)-(\kappa+\lambda+\tau)=0$

を導く．このとき，(1.21) (1.27) により，2 次条件はいつでも成立すること，

1) §3において例示された生産関数について言うと，Cobb-Douglas 生産関数 (1.13) はいつでも (1.34) を満足する．一方，一般の CES 関数 (1.17) に関しては，(1.23) によって分かるように，代替の弾力性 σ の数値いかんによっては (1.34) を満たさないこともあるので，(1.34) が常に成立すると主張することはできない．しかし，(1.34) が成立する可能性は少なくないであろう．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

また，$\bar{c}>0$ であることが分かる．　　（証了）

Phelps〔9〕〔10〕，Robinson〔12〕，等によって研究された新古典派定理は，最適黄金時代の一意的存在を示すとともにその特性を述べたものであって，その限りでは何らの論理的矛盾もない[1)]．それにもかかわらず，黄金時代という前提は，この定理に含まれる経済的含蓄に大きな制限を課しているように思われる．新古典派定理は，いかなる経過の下に，ある1つの成長均衡から均斉成長均衡への移行が達成されるかという，異時点間における移行過程の問題については何の言及もしていない．しかし，経済成長について論じようとする限り，事の性質上，経済活動の時間的変化の様相を看過することはできないと思われる．新古典派定理が経済成長理論の中に1つの光を投じたということを認めるにやぶさかではないが，一方では，この適用範囲の限定された定理が，移行過程を明示的に包含した最適経済成長理論——1つの動学的厚生経済理論——の研究への指向を促したことも事実である．

参考文献

〔1〕 Allen, R. G. D., *Macro-economic Theory*, Macmillan, London, 1967.（新開陽一-渡部経彦訳『現代経済学——マクロ分析の理論——』上・下，東洋経済新報社，1968）.

〔2〕 Arrow, K. J.-Chenery, H. B.-Minhas, B. S.-Solow, R. M., "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," *Rev. Econ. Statistics*, **43** (1961), 225-250.

〔3〕 荒憲治郎『経済成長論』，岩波書店，1969.

〔4〕 古屋　茂『行列と行列式』，培風館，1959.

〔5〕 Graaff, J. de V., *Theoretical Welfare Economics*. Cambridge U. P., 1957.（南

1) 黄金時代を定義する際に，資本財の限界生産性が一定であるという条件を追加すると——Robinson〔11〕p.99 の定義に従うならば，このように解釈することも可能である——，"黄金時代の下での技術進歩は Harrod 中立的である" ことが言える．この証明は，例えば，荒〔3〕pp.170-171 に紹介されている．また，"Harrod 中立技術進歩は必ずしも黄金時代の存在を保証しない." ということは p.107 の 1) から明らかであろう．

NII-Electronic Library Service

Kwansei Gakuin University

部鶴彦-前原金一訳『現代厚生経済学』，創文社，1973).

〔6〕 今井賢一-宇沢弘文-小宮隆太郎-根岸 隆-村上泰亮『価格理論 I』，岩波書店，1971.

〔7〕 入江盛一『微分学』，培風館，1958.

〔8〕 熊谷尚夫『経済政策原理』，岩波書店，1964.

〔9〕 Phelps, E. S., "The Golden Rule of Accumulation: a Fable for Growthman," *Amer. Econ. Rev.*, **51** (1961), 638–643.

〔10〕 Phelps, E. S., *Golden Rules of Economic Growth*, W. W. Norton & Company, New York, 1966.

〔11〕 Robinson, J., *The Accumulation of Capital*, Macmillan, London, 1956.

〔12〕 Robinson, J., "A Neo-classical Theorem," *Rev. Econ. Stud.*, **29** (1962), 219–226.

〔13〕 佐藤隆三『経済成長の理論』，勁草書房，1968.

〔14〕 杉山昌平『最適問題』，共立出版，1967.

〔15〕 寺沢寛一『自然科学者のための数学概論』，岩波書店，1954.

〔16〕 Uzawa, H., "Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium," *Rev. Econ. Stud.*, **28** (1961), 117–124.

NII-Electronic Library Service