社会的厚生最大化のための貨幣的政策

福　尾　洋　一

§1　はじめに

Tobin〔10〕流の貨幣的成長理論と Cass〔1〕流の実物的最適経済成長理論を結合させた分析，つまり，最適に活動している貨幣経済の成長分析は Hahn〔6〕や Foley-Shell-Sidrauski（以下 Fosski と呼ぶことにする）〔7〕などによって研究された．特に Fosski 論文は2部門貨幣経済を精巧な手法によって分析した示唆に富む内容の研究である．この論文についてはわれわれはかって少し論及したことがあるので[1]，こゝでは再論を避ける．ただ貨幣需要関数について一言すると，彼らは，変数が多いという意味では一般的な関数を提言するのであるが，関数の特定化についてはあまり詳論しておらない．そこでわれわれは，Fosski のそれに比べれば単純ではあるが，ある意味で伝統的な貨幣需要関数を特定化することによって，1つの最適マクロ貨幣経済モデルを組み立ててみたい．われわれのモデルは，単純な貨幣需要関数を用いたマクロ・モデルであるという点においては，Fosski モデルよりも一層単純になっているといえるだろう．しかし，単純であるだけに，Fosski モデルには現われなかった興味深い結論が明確な形で得られるかもしれないし，また，分析の過程が整理されて明解になるという可能性もあろう．

こゝで考察される経済システムは，民間部門と政府部門という選好のまったく独立する2つの意思決定センターから成立している．政府部門は，消費活動も生産活動も行なわず，いわゆる政府支出はないのであるが，貨幣当局として予算の赤字（黒字）を操作することによって経済活動に影響を及ぼしている[2]．

1）福尾〔3〕を参照していただきたい．

2）若干の工夫を施せば政府支出をモデルの中に組み入れることができるが，ここでは単純に政府支出はないものとする．なお，Hahn〔6〕p. 173 を参照するとよい．

政府支出はないのであるから，政府予算の赤字（黒字）は移転支出と税収との正（負）の差額，すなわち正（負）の純移転支出にほかならない．ここで貨幣の供給は純移転支出を通じてのみ増減されるものと仮定すると，政府予算の赤字（黒字）は貨幣供給の増加（減少）額に等しくなる．かくして，予算の操作ということは貨幣供給額（＝貨幣残高）の増減の操作ということを意味する．この予算操作という一種の貨幣的手段は，社会的厚生指標汎関数の最大化という社会的政策目標を実現するために行使されるであろう．

以下においてわれわれは，社会的厚生指標汎関数を最大ならしめるという意味において最適な貨幣的政策（＝最適政策），あるいはその政策に対応する経済諸変数の時間経路（＝最適経路）の存在可能性と一意性などについて論ずるであろう．§2では貨幣的マクロ成長モデルを提示する．§3では社会的厚生指標汎関数を定義する．§4では社会的厚生汎関数最大化の必要十分条件に言及する．§5では最適成長経路の存在と一意性について述べる．§6はむすびである．

§2　貨幣的マクロ成長モデル

技術進歩がない場合の新古典派タイプの社会的単一生産物生産関数を考え，それを

（1）　$y=y(k)$

によって表示する．ここにおいて，y は投入労働者1人当りの単一生産物産出量，k は投入労働者1人当りの投入資本財量を示している．関数 y は正の k に対して2回連続的微分可能であり，次の性質を持っている——，

（2）　$(\forall k>0): y(k)>0,\ y'(k)>0,\ y''(k)<0,$[1]

（3）　$\begin{cases} y(0)=0,\ y(\infty)=\infty,\ y'(0)=\infty,\ y'(\infty)=0 \\ \lim_{k\to\infty}[y(k)-ky'(k)]=\infty. \end{cases}$

現存資本ストックはすべて生産のために投入されると仮定すると，資本財の存

1）“$(\forall\sim)$：——.”は“すべての〜に対して，——が成立する.”と読む.

在量と投入量は等しくなる． 今後，資本財の存在量と投入量（＝雇用量）は恒等であるとして区別しないことにする．

労働力人口は常に総人口の一定割合を占め，総人口と労働力人口はともに外生的に与えられる正の一定率 ν で成長すると仮定される． また，現存労働力は完全雇用され，労働力の存在量と投入量は等しくなるとも仮定される．かくして，当モデル経済は資本財と労働力という2つの生産要素に関して完全雇用を想定している．労働力人口と総人口の比率は一定であるから，k は1人当り実質資本ストック，y は1人当り実質産出量または1人当り実質所得と解釈してさしつかえない．

技術進歩はないのであるから，過去に生産された現存資本財の価格と新しく生産される資本財（＝新資本財＝投資財）の価格は，資本減耗についての考慮を別にすれば，等しくなるであろう．単一生産物経済においては投資財価格と消費財価格は普通は均等であると考えてよいから，結局，ストックたる資本財の価格とフローたる生産物の価格は等しい．なお，一定率の資本減耗率を想定するかぎりは，資本減耗に対する考慮は議論の本質になんらの影響も及ぼさないので，以下においては資本減耗率はゼロであると仮定しておく．

実質可処分所得あるいは実質購買力とは実質所得と実質純移転支出と予想される価格変化に伴う実質貨幣残高の予想評価損益を加えたものであり，これは民間部門が自由に処分することの可能なフローの実質価値である．ところで，当モデル経済においては政府支出はなく，政府部門は予算の赤字の資金調達のためには貨幣という政府債券を発行することができる[1)]．そうするとわれわれは，実質可処分所得は実質所得と実質貨幣供給額（＝実質貨幣残高）の増加（または減少）の和であると解釈することができる． そこで，1人当り実質所得を y^d，

1） 当モデル経済においては，政府部門のみが貨幣発行権を持っており，貨幣供給額の変更は移転支出というルートを通じて政府部門のみが行うことができる．このような仮定は，たとえば Fosski〔2〕によって採用されている．なお予算の黒字の場合には，市場つまり民間部門から政府部門に貨幣が吸収されることになる．

1人当り実質貨幣残高を m，貨幣供給変化率を μ，予想価格変化率を π^e で表わすと，

(4)　$y^d = y + (\mu - \pi^e)m$

と書かれる．以下においては，価格に関する予想は常に実現されると仮定しよう[1)]．そうすると(4)は，

(5)　$y^d = y + (\mu - \pi)m$

となる．ここで π は価格変化率である．

政府部門は消費活動を行なわないので，経済全体の実質消費は民間実質消費にほかならない．民間部門の実質消費需要は実質可処分所得の一定割合 $(1-\sigma)$ $(0<\sigma<1)$ であって，それはいつも実現すると仮定される．すなわち，1人当り実質消費を c で表わすと，

(6)　$c = (1-\sigma)y^d = (1-\sigma)[y + (\mu - \pi)m]$

である．

事後的実質貯蓄は実質所得から実質消費を差し引いた残りと定義され，それは事後的資本形成と恒等的に等しい．かくして，

(7)　$y - c = \dot{k} + \nu k$

であるから，(6)を代入して，

(8)　$\dot{k} = \sigma y - \nu k - (1-\sigma)(\mu - \pi)m$

を得る．

実質貨幣残高需要には取引目的のための需要と資産目的のための需要がある．一般に，取引目的のための需要は実質産出量の大きさによって決定的影響を受け，大きな産出量ほど大きな貨幣需要を引き起こし，資産目的のための需要は

1) この仮定は，完全予見性の仮定として，いわゆる新古典派モデルにおいてはしばしば採用されている．たとえば，Shell-Sidrauski-Stiglitz〔7〕p. 16, p. 20 とか Stein の展望論文〔9〕p. 97 を参照するとよい．しかしこの仮定については必ずしも十分な同意を得ているわけではない．この点を改良しようとする最も有力な試みはいわゆる適応予想の仮定である．これに関する文献としては，たとえば Sidrauski〔8〕や Hadjimichalakis〔5〕がある．

資産としての貨幣を保有することに対する機会費用によって決定的影響を受け，大きな機会費用のもとにおけるほど貨幣需要は小さいであろう．この点を考えてわれわれは，伝統的方法に従って，1人当り実質貨幣残高需要関数 $\hat{m}^*$ を，

$$(9)\quad \hat{m}=\hat{m}^*(y,\ \rho),\ \hat{m}_y{}^*(y,\ \rho)>0,\ \hat{m}_\rho{}^*(y,\ \rho)<0$$ [1]

と書くことにする．ここにおいて，$\hat{m}$ は1人当り実質貨幣残高需要，ρ は貨幣保有の機会費用を示している．

機会費用の具体的内容は，実質資本資産の収益率 y' と貨幣資産の実質収益率（$-\pi$）の差，すなわち，

$$(10)\quad \rho=y'(k)+\pi$$

によって与えられるのであるが，ρ の符号に関しては従来から2つの考え方がある．たとえば，貨幣の保有に比して資本資産の保有には危険を伴うとか，実質貨幣残高は効用を生み出すであろうというような理由によって，実質貨幣残高の資本資産に対する優位性（＝流動性選好）が存在する場合には，$\rho>0$ と考えた方がよいだろう．一方，$\rho>0$ であれば資本資産のみが需要され，$\rho<0$ であれば貨幣のみが需要されるという場合には，資本財と貨幣の両方が需要されるためには，$\rho=0$ となる必要があろう．[2] われわれは別の機会に $\rho=0$ のケースについて考察したことがある．そこで以下においては，$\rho>0$ のケースに限って考察する．[3]

さて，ρ は k と π の関数であり，産出量 y は k の関数であったから，

$$(11)\quad \begin{cases} \hat{m}(k,\ \pi)\equiv\hat{m}^*(y,\ \rho) \\ \hat{m}_k=\hat{m}_y{}^*y'(k)+\hat{m}_\rho{}^*y''(k)>0,\ \hat{m}_\pi\equiv\hat{m}_\rho{}^*<0 \end{cases}$$

とおき，さらに $\rho>0$ を考慮すると，

1）$m_y{}^*\equiv\dfrac{\partial m^*}{\partial y}$，$m_\rho{}^*\equiv\dfrac{\partial m^*}{\partial \rho}$．以下同様の表記法を用いる．

2）**Hahn**〔6〕は，$\rho=0$ のケースを投機仮説と呼び，$\rho>0$ のケースをケインズ仮説と呼んだ．

3）福尾〔4〕．

$$(12)\quad \begin{cases} \hat{m}=\hat{m}(k,\ \pi) \\ (\forall k>0,\ \pi>-y'(k)): \\ \qquad \hat{m}(k,\ \pi)>0,\ m_k(k,\ \pi)>0,\ \hat{m}_\pi(k,\ \pi)<0 \\ (\forall k>0): \hat{m}(k,\ -y'(k))=\infty \end{cases}$$

と書くことができる[1].

以上のごとく実質貨幣残高需要関数が定義されると，今や，一時的市場均衡は実質貨幣残高 m と実質貨幣残高需要 $\hat{m}$ が等しいとき，つまり

$$(13)\qquad m=\hat{m}(k,\ \pi)$$

のときに成立することがわかる．なぜなら，当モデル経済では，現存する労働力と資本財の完全雇用と消費計画の実現が仮定されているので，新資本財(＝投資財)市場と実質貨幣市場が均衡すると市場均衡が実現するわけであるが，Walras 法則によって，これら両市場のうちの一方が均衡すれば残る市場は必ず均衡するからである．かくして，(13)の成立は同時に投資計画（＝新資本財の需要）と事後貯蓄（＝事後的資本蓄積＝新資本財の供給）の一致を意味している．われわれは，いわゆる投資関数を明示することはしなかったが，貨幣需要関数 $\hat{m}$ を明示し，均衡条件(13)を考えることによって，暗黙の内に投資関数を設定していることになるのである．

さて，各時刻において実質貨幣残高 m と実質資本ストック k は既知であるから，一時的均衡条件(13)より，均衡価格変化率 π が

$$(14)\qquad \pi=\pi(k,\ m),\ \pi_k(k,\ m)>0,\ \pi_m(k,\ m)<0$$

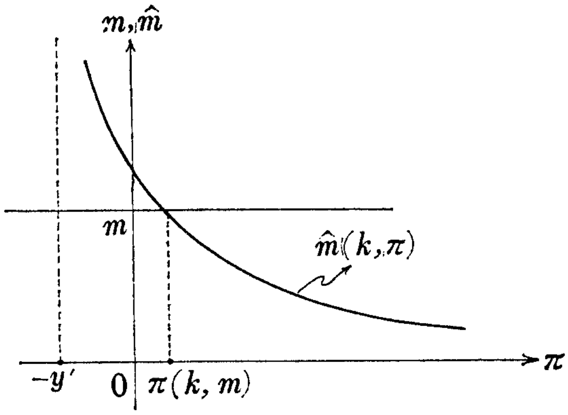
によって与えられる[2]（第1図参照[3]）．この式は均衡価格変化率を与えるという点

1) π の上限を $\bar{\pi}(k)$ と設定して，$\lim_{\pi\to\bar{\pi}-0} \hat{m}_\pi(k,\bar{\pi})=0$ と仮定してもよいが，議論に影響がないので複雑な仮定を設けないことにする．この点については Hahn [6] p.177 を参照するとよい．

2) 一時均衡の決定は需要と供給を均等にする生産物価格を見つけることに関連するというモデルと異なって，当モデル経済では，要素賦存量と生産物価格が所与とされ，一時均衡の問題は需要と供給を均等ならしめる価格変化率を見いすという問題に帰着する．このような考え方は貨幣的経済成長理論においては周知のものである．

3) 第1図の $m(k,\pi)$ 曲線は所与の k に対して描かれている．

に注目しよう．さきにわれわれは，価格変化に関する予想はいつも実現される（$\pi^e=\pi$）ことを仮定した．この仮定は一見非常に厳しいものであるが，実質貨幣残高需要関数 $\hat{m}$ の形式が具体的にほぼわかっているような場合には，価格変化に関する予想は(14)の右辺に基づいて立てられると考えることにすれば，この仮定の意味もある程度理解することができよう．



第　1　図

(14)を用いると，市場均衡下では，実質貨幣残高 m の記号の約束によって，

$$(15) \qquad \dot{m}=[\mu-\nu-\pi(k,\ m)]\,m$$

が成立する．

§3　社会的厚生指標汎関数

任意の時刻 t における社会的厚生指標関数は平均的消費者の効用指標関数 u を基礎にして構成され，平均的消費者の効用指標は1人当り実質消費によって測定されるであろう．つまり，時刻 t の社会的厚生指標 u^* は

$$(16) \qquad u^*=u(c)\,e^{\nu t}$$

によって与えられる．ここで，u は平均的消費者の効用指標関数であって，正の c に対して2回連続的微分可能で次の性質を持っている——，

$$(17) \qquad \begin{cases} (\forall c>0):u'(c)>0,\ u''(c)<0 \\ u'(0)=\infty,\ u'(\infty)=0. \end{cases}$$

効用指標関数 u に基づいて，社会的厚生指標汎関数 w を

$$(18) \qquad w(c)=\int_0^\infty u(c)\,e^{-\delta t}\,dt,\ \ \delta=\lambda-\nu=\text{const.}>0$$

によって定義する．こゝにおいて，λ は社会的厚生の時間割引率であり，それは人口成長率 ν よりも大きい定数であることが仮定される．w は無限時間長

を考えた場合の現在価値社会的厚生指標といったようなものである．

さて政府部門は，歴史的に与えられた1人当り実質資本ストックに関する正の初期条件 $k(0)$ と1人当り実質貨幣残高に関する正の初期条件 $m(0)$ のもとで，すべての時刻 $t\in[0, \infty)$ に対して(6)(8)(14)(15)を満たし，かつ終端非負条件

(19)　$k(\infty)\geq 0,\ m(\infty)\geq 0$

を満たす経路のうち，汎関数(18)を最大にするという意味で最適な経路を特定化することを目標として，貨幣供給変化率 μ を操作するだろう．

§4　最適性の必要条件と十分条件

この§では，まず(6)(8)(14)(15)(19)を満たしかつ(18)を最大化する経済諸変数の組（=最適経路）が満たすべき条件（=最適性の必要条件）について考察し，次いで，列挙された必要条件を充足する経路は実際最適経路となることを示す．ところで，汎関数(18)を最大化するという問題は変分学や最大値（最小値）原理の問題であり，したがって，われわれはすでに知られている幾つかの定理を直接利用することができる．

時刻 t の関数である2つの補助未知変数 $\phi(t)e^{-\delta t}$ と $\psi(t)e^{-\delta t}$ を導入すると，Hamilton 関数 H が

(20)
$$H=H(t,\ k,\ m,\ \mu,\ \phi,\ \psi)$$
$$=[u(c)+\phi\dot{k}+\psi\dot{m}]e^{-\delta t}$$

によって定義される．ここで，ϕ を厚生測定単位で表示した投資1単位の帰属価格（あるいは帰属厚生），ψ を厚生測定単位で表示した実質純移転所得の単位当り帰属価格（あるいは帰属厚生）であると解釈すると，(20)の右辺の $u(c)+\phi\dot{k}+\psi\dot{m}$ は厚生測定単位で表示した1人当りの実質フロー価値を示し，(20)の右辺全体は割引された1人当り実質フロー価値を示している．このように，ϕ と ψ は経済学的には1種の需要価格と考えることができるので，この点を考慮して

(21)　$\phi \geq 0, \ \psi \geq 0$

という制約を付与しておく.

汎関数(18)が変数の組 $(t, k, m, \mu, \phi, \psi)$ に対して最大となるためには，以下の条件 (A) (B) (C) が成立しなければならない——,

(A)　$(\forall t): H_k = -\dfrac{d}{dt}(\phi e^{-\delta t}), \ \ H_m = -\dfrac{d}{dt}(\psi e^{-\delta t}),$

(B)　最適経路に対応する貨幣供給変化率を μ とするとき，任意の実数 $\tilde{\mu}$ に対して，

$$(\forall t): H(t, k, m, \mu, \phi, \psi) \geq H(t, k, m, \tilde{\mu}, \phi, \psi),$$

(C)　$\lim_{t\to\infty} k(t)\phi(t)e^{-\delta t}=0, \ \ \lim_{t\to\infty} m(t)\psi(t)e^{-\delta t}=0.$

そこで次に,この条件をもう少し整理してみよう. (20) に (1)(5)(6)(8)(14)(15)を代入すると,

$$(22)\qquad H=\Big[u\left[(1-\sigma)\{y+(\mu-\pi(k, m))m\}\right] + \phi\left[\sigma y-\nu k-(1-\sigma)\{\mu-\pi(k, m)\}m\right] + \psi\{\mu-\nu-\pi(k, m)\}m\Big]e^{-\delta t}$$

となるから，まず (A) より,

$$(23)\qquad \dot{\phi}=-(1-\sigma)y'u'-(\sigma y'-\nu-\delta)\phi+\left[\psi-(1-\sigma)(\phi-u')\right]\pi_k m,$$

$$(24)\qquad \dot{\psi}=-(\mu-\pi-\pi_m m)\left[\psi-(1-\sigma)(\phi-u')\right]+(\nu+\delta)\psi$$

を得る. 一方(B)は，最適経路上では，所与の t, k, m, ϕ, ψ に対して，$\tilde{\mu}=\mu$ のときに H は最大になることを意味しているから，最適経路上では

$$(25)\qquad \left[\psi-(1-\sigma)(\phi-u')\right]m=0$$

が成立しなければならない. ところが(12)を考慮すると，(13)が満たされて市場均衡が実現するためには $m(t)>0$ が必要であるから，結局

$$(26)\qquad \psi-(1-\sigma)(\phi-u')=0$$

が成立しなければならない. これを(23)(24)に代入すると,

$$(27)\qquad \dot{\phi}=-(1-\sigma)y'u'-\left[\sigma y'-(\nu+\delta)\right]\phi,$$

(28) $\dot{\phi}=(\nu+\delta)\phi$

を得る．

さて，初期条件 $\phi(0)\geq 0$ として(28)を解くと，

$$\phi(t)=\phi(0)e^{(\nu+\delta)t}$$

となる．これを (C) に代入すると，

$$\lim_{t\to\infty} m(t)\phi(t)e^{-\delta t}=\phi(0)\lim_{t\to\infty} m(t)e^{\nu t}=0.$$

ここでもし $m(\infty)>0$ ならば，$\lim_{t\to\infty} m(t)e^{\nu t}=\infty$ となるから，最適経路上では $\phi(0)=0$ が成立しなければならないことがわかる．一方，最適経路上では $m(\infty)=0$ とならない．なぜなら，もし $m(\infty)=0$ なら，(8) より $k(\infty)=\bar{k}=\text{const.}>0$ となるが，このとき (12) により，すべての $\pi>-y'(\bar{k})$ に対して $\hat{m}(\bar{k},\pi)>0$ であるから，市場均衡が成立するためには $m(\infty)>0$ となることが必要だからである．かくして $m(\infty)$ 値のいかんにかかわらず，当モデル経済においては，最適経路上では $\phi(0)=\phi(t)=0$ となる．この点を考えると結局，条件 (A) (B) (C) は次のように整理される――，

(29) $$\begin{cases}\phi=u'(c)=u'[(1-\sigma)\{y(k)-(\mu-\pi(k,m))m\}]\\ \psi\equiv 0,\end{cases}$$

(30) $\dot{\phi}=-[y'(k)-(\nu+\delta)]\phi,$

(31) $\lim_{t\to\infty} k(t)\phi(t)e^{-\delta t}=0.$

ところで，$\psi\equiv 0$ ということは経済学的にはどのようなことを意味するのであろうか．(16) に見られるごとく，消費財の保有は直接的に効用を生み出す．また，新資本財は消費財（＝単一生産物）の生産手段として将来利用されるから，資本形成は間接的に効用を生み出すものとして，おそらく正の帰属厚生を持つ．一方，貨幣は，取引を円滑ならしめるとともに，流動資産としての役割を果すことによって投資に影響を及ぼし，さらに，実質貨幣残高の変化（＝実質純移転所得）は実質可処分所得を通じて消費と貯蓄に影響を及ぼしている．しかし当モデル経済では，実質貨幣残高 m は生産関数の独立変数ではなく直接には生

産には関与しないので，資本形成の場合に述べたように，実質純移転所得はそれ自体間接的に効用を生み出すから正の帰属厚生を持つ，とは考えることができない．またわれわれは，実質貨幣残高は消費財と同じように直接的に効用を生み出すものであって効用指標関数の独立変数の1つである，とも考えなかった．かくして当モデル経済の範囲内では，直接的にも間接的にも，実質貨幣残高ないし実質純移転所得は厚生ないしは帰属厚生をもたらさない．これが $\phi\equiv0$ の意味である[1]．実質貨幣残高の増加という形で発生する実質純移転所得はそれ自体では（帰属）厚生の大きさになんら関係を持たず，それが消費されたり貯蓄されたりすることによって初めて厚生にかかわってくる．つまり，実質純移転所得は必ず消費されるか貯蓄（＝資本形成）されるのであるが，そのことを通じて，移転所得の厚生は，消費から生み出される厚生 $u(c)$ か資本形成の帰属厚生 $\phi\dot{k}$ の中に吸収されてしまう，と考えるのである．

この§の最後に，仮定(2)(3)(17)のゆえに，正の初期条件 $k(0)$, $m(0)$ の下で(6)(8)(14)(15)と終端条件(19)を満たす経路は，最適性の必要条件(29)(30)(31)を充足するとき，実際，最適経路となることを示そう[2]．

初期条件 $k(0)$, $m(0)$ に対して，(6)(8)(14)(15)(19)と最適条件(29)(30)(31)を満たす経路を

$$(y,\ c,\ k,\ m,\ \mu,\ \phi)$$

と表わし，$k(0)$, $m(0)$ に対して，(6)(8)(14)(15)(19)および $\phi(t)\geq0$, $\phi(t)=0$ をを満たす上記以外の任意の経路を

$$(\tilde{y},\ \tilde{c},\ \tilde{k},\ \tilde{m},\ \tilde{\mu},\ \tilde{\phi})$$

によって表わすことにする．まず(2)(3)(17)より，

---

1) Sidrauski〔8〕などにおいては，実質貨幣残高の提供するサービスが，消費財の消費と類似して，効用を生み出すことが仮定されている．また，実質貨幣残高を生産財と考えるモデルも幾つかある．こうした想定を採用すれば，おそらく $\phi\equiv0$ とはならないだろう．いずれにせよわれわれのモデルに関するかぎり．$\phi\equiv0$ は経済学的に納得できるものであると思う．

2) Cass〔1〕の証明法とまったく同じ手続きによる．

$$u(\tilde{c})<u(c)+u'(c)(\tilde{c}-c)$$

$$y(\tilde{k})<y(k)+y'(k)(\tilde{k}-k)$$

であるから，(7)(29)(30)より，

$$u(c)-u(\tilde{c})>u'(c)(c-\tilde{c})$$

$$=[(y-\tilde{y})-(\dot{k}+\nu k)+(\dot{\tilde{k}}+\nu\tilde{k})]\phi$$

$$>[y'(k)(k-\tilde{k})-\nu(k-\tilde{k})-(\dot{k}-\dot{\tilde{k}})]\phi$$

$$=-(\dot{\phi}-\delta\phi)(k-\tilde{k})-(\dot{k}-\dot{\tilde{k}})\phi.$$

それゆえ，(31)より，

$$\int_0^\infty [u(c)-u(\tilde{c})]e^{-\delta t}dt$$

$$>-\int_0^\infty [(\dot{\phi}-\delta\phi)(k-\tilde{k})+(\dot{k}-\dot{\tilde{k}})\phi]e^{-\delta t}dt$$

$$=-[(k-\tilde{k})\phi e^{-\delta t}]_0^\infty$$

$$=\lim_{t\to\infty}\tilde{k}\phi e^{-\delta t}\geq 0.$$

§5　最適経路の存在と一意性

§4においては，列挙された最適性の必要条件を満たす経路が実際に最適経路であることを明らかにした．この§ではいよいよ，任意の正の初期条件 $k(0)$, $m(0)$ から出発する最適成長経路（または成長政策）の存在と一意性について検討する．

まず，最適定常経路—すべての時刻についてその時間変化率がゼロとなる最適経路—

$$(y^*,\ c^*,\ k^*,\ m^*,\ \mu^*,\ \phi^*)$$

の存在と一意性を示そう．最適定常経路上では $\dot{\phi}=0$ であるから，(30)より

(31)　$y'(k^*)=\nu+\delta$

によって，$k=k^*$ が一意的に決まる．また，最適定常経路上では $\dot{m}=0$ であるから，(15)を見ると

(32)　$\mu-\pi(k^*,\ m)=\nu$

でなければならないことがわかる．さらに最適常経路上では $\dot{k}=0$ であることを考えて，$k=k^*$ と(32)を(8)に代入すると，

(33)　$m^*=[\sigma y(k^*)-\nu k^*]/(1-\sigma)\nu$

によって，$m=m^*$ が一意的に決まる．ここでわれわれは $m^*>0$ を仮定する．この仮定はおそらくそれほど不自然ではないだろう．(33)を(32)に代入することによって，

(34)　$\mu^*=\pi(k^*,\ m^*)+\nu$

とおけば，$\mu=\mu^*$ も一意的に決まる．一方(7)に $\dot{k}=0$ と $k=k^*$ を代入して

(35)　$c^*=y(k^*)-\nu k^*$

とおけば，$c=c^*$ もまた一意的に決まり，最後に(29)に(35)を代入すると，

(36)　$\phi^*=u'(c^*)$

によって，$\phi=\phi^*$ が一意的に決まる．かくして，最適定常経路は一意的に存在することが明らかになった．

次に，最適定常経路を基礎にして，任意の正の初期条件 $k(0)$ と $m(0)$ から出発する最適政策の存在可能性について考察しよう．

(29)を全微分すると，

$$d\phi=[(y'-\pi_k m)dk+md\mu+(\mu-\pi-\pi_m m)dm](1-\sigma)u''$$

であるから，k, m, ϕ の関数としての最適政策 μ の特性は

$$(37)\quad \begin{cases} \mu=\mu(k,\ m,\ \phi) \\ \mu_k=-[y'(k)-\pi_k(k,\ m)m]/m \\ \mu_m=-[\mu(k,\ m,\ \phi)-\pi(k,\ m)-\pi_m(k,\ m)m]/m \\ \mu_\phi=1/(1-\sigma)u''(c)m \end{cases}$$

によって与えられる．この点を考えて，以下においては(8)(15)(30)をまとめた体系，

$$(38)\quad \begin{cases} \dot{k}=\sigma y(k)-\nu k-(1-\sigma)[\mu(k,\ m,\ \phi)-\pi(k,\ m)]m \\ \dot{m}=[\mu(k,\ m,\ \phi)-\nu-\pi(k,\ m)]m \\ \dot{\phi}=-[y'(k)-(\nu+\delta)]\phi \end{cases}$$

を考えることにする．

微分方程式系(31)を (k^*, m^*, ϕ^*) の回りで展開し，2次以後の項を無視すると，(31)の (k^*, m^*, ϕ^*) における1次偏微係数[1]

(39) $$\begin{cases} \dot{k}_k{}^* = \delta \\ \dot{k}_m{}^* = 0 \\ \dot{k}_\phi{}^* = -1 / u''(c^*) \end{cases}$$

(40) $$\begin{cases} \dot{m}_k{}^* = -(\nu+\delta) \\ \dot{m}_m{}^* = -\nu \\ \dot{m}_\phi{}^* = 1 / (1-\sigma) u''(c^*) \end{cases}$$

(41) $$\begin{cases} \dot{\phi}_k{}^* = -y''(k^*) u'(c^*) \\ \dot{\phi}_m{}^* = 0 \\ \dot{\phi}_\phi{}^* = 0 \end{cases}$$

を1次の項の係数とする (k^*, m^*, ϕ^*) の近傍における線型微分方程式系を得る．そして，この線型微分方程式系の固有方程式は，x を固有根，J を Jacobian，E を単位行列とすると，

(42) $$|xE-J|=0$$

によって与えられる．

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J=\begin{bmatrix} k_k{}^* & k_m{}^* & k_\phi{}^* \\ m_k{}^* & m_m{}^* & m_\phi{}^* \\ \phi_k{}^* & \phi_m{}^* & \phi_\phi{}^* \end{bmatrix}$$

であることを考慮して(42)を整理すると

(43) $$(x+\nu)[x^2-\delta x-y''(k^*)u'(c^*)/u''(c^*)]=0$$

となり，固有根は

(44) $$\begin{cases} x_1 = -\nu \\ x_2,\ x_3 = \frac{1}{2}\left[\delta \pm \sqrt{\delta^2+4y''(k^*)u'(c^*)/u''(c^*)}\right] \end{cases}$$

1) たとえば，$\dot{k}_k{}^* \equiv \dfrac{\partial}{\partial k}\dot{k}(k^*, m^*, \phi^*)$

によって与えられる．これら3つの固有根はいずれも実根であり，そのうち2根は負である．このとき，微分方程式論の定理により，定常経路 (k^*, m^*, ϕ^*) を通る2次元多様体（＝曲面）M があって，$(k(0), m(0), \phi(0))\in M$ ならば，(k^*, m^*, ϕ^*) は体系(31)の解の族に関して漸近安定となる[1)]．そして体系(38)は，極限閉軌道になる解（あるいは周期解）を持たないとすれば，多様体 M は $t\to-\infty$ の方向へいくらでも拡大されていく．つまり M は，(k^*, m^*, ϕ^*) に漸近する系(38)のすべての解経路を $t\to-\infty$ にまで拡大した場合，それら解経路が通る点の全体と考えることができる．

以上のことから，初期条件 $(k(0), m(0), \phi(0))$ が多様体 M に属するならば，政府部門は(37)に基づいて貨幣供給変化率 μ を操作することによって汎関数(18)を最大化することができる，換言すると，最適政策が存在する，ということがわかる．なぜなら，政策(37)を採用すれば経済の時間経路は(6)(8)(14)(15)(19)(29)(30)(31)を満たすことになるが，さきに示したごとく，このような経路はまさしく最適経路にほかならないからである．そこで結局，初期条件が M に属するかどうかということが重要なポイントになる．なぜなら，補助変数 ϕ の初期値 $\phi(0)$ は自由に指定することができるにしても，$k(0)$ と $m(0)$ の数値いかんでは $(k(0), m(0), \phi(0))\notin M$ の可能性がないとはいえず，したがってある初期条件の下では最適政策は存在しないかもしれない，という疑問が当然生ずるからである．しかし好都合にも，われわれはいかなる初期条件 $k(0), m(0)$ の下でも $(k(0), m(0), \phi(0))\in M$ とすることができる．次にこれを証明する．

(7)と(29)より，$\dot{k}=0$ ならば

$$(45)\qquad \phi=u'[y(k)-\nu k]$$

となって，ϕ は k のみの関数となる．そこで，この $\dot{k}=0$ 曲線と $k=k^*$ によって与えられる $\dot{\phi}=0$ 曲線を次のように (k, ϕ) 平面に描くことができる．

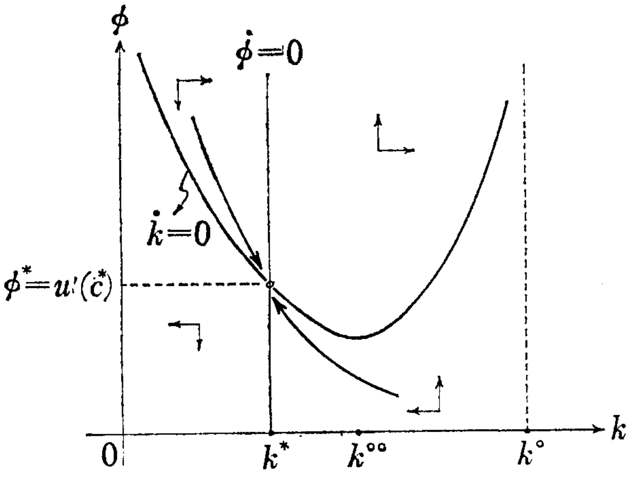
1) たとえば，占部〔11〕p. 42.

(第2図)．ここにおいて k° と $k^{\circ\circ}$ はそれぞれ

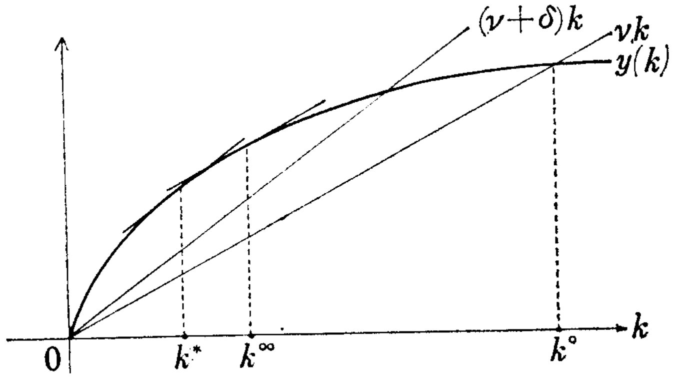
$$y(k^{\circ})=\nu k^{\circ}$$

$$y'(k^{\circ\circ})=\nu$$

によって定義されている（第3図参照）．第2図を見ればわかるように，(k^*, ϕ^*) は (k, ϕ) 平面上で鞍形点になっているから，(k^*, ϕ^*) に向かう経路は，m の時間的運動がいかなるものであれ，確定してしまう．つまり，初期条件 $k(0)$ が与えられると，所与の正の初期条件 $m(0)$ がどのような数値であろうとも (k^*, ϕ^*) に向かうために設定すべき $\phi(0)$ の数値は一意的に決まってしまう．そこで残る問題は，(k^*, ϕ^*) に向かう経路上に初期条件 $\phi(0)$ を設定したとき，はたして実質貨幣残高 m は m^* に向かうだろうかという点に絞られる．$m\to m^*$ が明らかにされれば，いかなる正の初期条件 $k(0)$ と $m(0)$ の下においても，$\phi(0)$ を適当に設定することによって，$(k(0), m(0), \phi(0)\in M$ とすることができるからである．



第　2　図



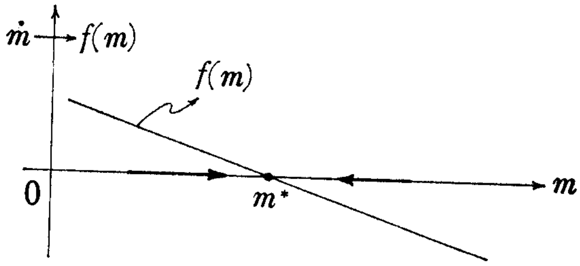
第　3　図

さて，(k^*, ϕ^*) に向かう経路に沿うように $\phi(0)$ を設定すると，$\dot{m}$ は(38)の関係を保ちながら，次第に，

(46)　　$\dot{m}\to f(m)\equiv[\mu(k^*, m, \phi^*)-\nu-\pi(k^*, m)]m, \ f'(m)=-\nu$

となる．よって，時間の経過に伴って $(k, \phi)\to(k^*, \phi^*)$ となるにつれて，$m\to m^*$ となるだろう（第4図参照）．

以上によって，任意の所与の正初期条件に対して (k^*, m^*, ϕ^*) に向かう最適経路が存在することが明らかになった．今度は，このような最適経路は一意であることを明らかにしよう．そのためにまず，最適消費経路の一意性を示す．同一の初期条件 $k(0)$ と $m(0)$ に対して異なる最適消費経路が存在するものとして，その2つを c と $\tilde{c}$ で表わすことにする．このとき，$c=\tilde{c}$ をいえばよいわけである．c も $\tilde{c}$ も最適消費経路であるから，$\theta\in(0, 1)$ として(17)を考慮すると，



第　4　図

$$\int_0^\infty u(c)\,e^{-\delta t}\,dt=\int_0^\infty u(\tilde{c})\,e^{-\delta t}\,dt$$

$$=\int_0^\infty [\theta u(c)+(1-\theta)\,u(\tilde{c})]\,e^{-\delta t}\,dt$$

$$\leq\int_0^\infty u[\theta c+(1-\theta)\,\tilde{c}]\,e^{-\delta t}\,dt$$

となり，特にある時刻 t について $c(t)=\tilde{c}(t)$ ならば，この不等号は厳密な意味での不等号となる．c も $\tilde{c}$ も実現可能ならば当然 $\theta c+(1-\theta)\tilde{c}$ も実現可能となるが[1]，これは c および $\tilde{c}$ がともに最適消費経路であるという仮定に反する．かくして $c=\tilde{c}$ である．

最適消費経路は一意であることが判明したので，そのような経路は (k^*, m^*, ϕ^*) に向かう経路に対応する消費経路にほかならないことも同時に判明した．(k^*, ϕ^*) は (k, ϕ) 平面上で鞍形点であったから，(k^*, ϕ^*) に向かう (k, ϕ) 経路は一意である．(k, ϕ) 経路が一意ならば，(38)より，それに対応する実質貨幣残高 m の経路も一意でなければならない．かくして，最適経路

$$(y,\ c,\ k,\ m,\ \mu,\ \phi)$$

1）生産関数(1)は規模に関して収穫不変な生産関数を基礎にしている．

の一意性が証明されたことになる.

§6 む す び

本稿で考察されたモデル経済は，貨幣供給変化率 μ を政策変数とすることによって社会的厚生指標汎関数(18)を最大化しようとする混合経済システムであった. μ の大きさは（実質）純移転支出の大きさに影響を及ぼすのであるが，（実質）純移転支出は（実質）移転支出マイナス（実質）税収であったから，μ を操作するということの中には政策変数としての税率の操作ということも暗に含まれている.

われわれが明らかにしようとしたことは，初期1人当り実質資本ストック $k(0)$ および初期1人当り実質貨幣残高 $m(0)$ が与えられるとき，(6)(8)(14)(15)(19)を満たしかつ(18)を最大化するという意味で最適な経路（あるいは政策）がその初期条件に対して一意的に存在し，かつそれは定常経路（あるいは定常政策）に漸近するということであった. ここに今一度この基本的メカニズムを整理すれば次のようになる——.

所与の $k(0)$ と $m(0)$ に応じて，初期1人当り実質産出量 $y(k(0))$，初期均衡価格変化率 $\pi(k(0), m(0))$，$(k(0), m(0), \phi(0)) \in M$ を満たす厚生測定単位表示の投資1単位の初期帰属価格 $\phi(0)$ および初期政策 $\mu(k(0), m(0), \phi(0))$ が一意的に定まる. さらに，政府部門がこの政策を実施すると，1人当り初期実質消費 $c(0)$ も確定する. このようにして $(y(0), c(0), k(0), m(0), \mu(0), \phi(0))$ が決まると，(38)によって (k, m, ϕ) が変化し，次々とその後の時間経路 (y, c, k, m, μ, ϕ) が決定される. この経路は，やがて定常経路 $(y^*, c^*, k^*, m^*, \mu^*, \phi^*)$ に漸近するとともに，汎関数(18)に最大値を与えるであろう. しかもこのような経路は初期条件によって一意的である.

はじめに述べたように，当モデルは Fosski〔2〕モデルと類似している面もある. しかしわれわれとしては，彼らとは多少異なった角度から分析を試みて

きたつもりでいるし，実際モデルの基本構造はかなり異なったものとなっている．われわれは，Fosski が考察したいわゆる利子を生む政府負債と貨幣との選択の問題を明示的に取り上げることをしなかった—多くの新古典派貨幣的成長モデルもこの点については等閑に付している—わけであるが，この問題をわれわれのモデルのわく組の中に導入することはおそらく可能だと思われる．たとえば，Fosski がしたように，政府部門のもう1つの貨幣的政策として公開市場操作を追加し，政策目標として物価安定というような目標を追加すればよいだろう[1]．

参考文献

〔1〕 Cass, D. (1965), "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *R.E.S.*, Vol. 32, 1965, pp. 233-240.

〔2〕 Foley, D., Shell, K. & Sidrauski, M., (Fosski) (1969), "Optimal Fiscal and Monetary Policy and Economic Growth," *J.P.E.*, Vol. 77, 1969, pp. 698-719. pp. 135-165.

〔3〕 福尾洋一（1971），"2部門経済における最適成長政策について"，経済学論究第24巻第4号，昭和46年，pp. 135-165.

〔4〕 ——（近刊）"貨幣経済の最適成長について"，田中金司先生喜寿記念論文集（仮題）所収.

〔5〕 Hadjimichalakis, M. G. (1971), "Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money — the Tobin Models," *R.E.S.*, Vol. 38, 1971, pp. 457-479.

〔6〕 Hahn, F. (1969), "On Money and Growth," *Journal of Money, Gredit, and Banking*, Vol. 1, 1969, pp. 172-187.

〔7〕 Shell, K., Sidrauski, M. & Stiglitz, J. E. (1969), "Capital Gains, Income, and Saving," *R.E.S.*, Vol. 36, 1969, pp. 15-26.

〔8〕 Sidrauski, M. (1967), "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy," *A.E.R.*, Vol. 57, 1967, pp. 534-544.

〔9〕 Stein, J. L. (1970), "Monetary Growth Theory in Perspective," *A.E.R.*, Vol.

1） このようなケースについて，われわれは〔3〕において検討したことがあるが，別の機会にもう一度分析を試みるつもりでいる．

60, 1970, pp. 85-106.

〔10〕 Tobin, J. (1965), "Money and Economic Growth," *Econometrica*, Vol. 33, 1965, pp. 671-684.

〔11〕 占部　実：非線形問題―自励振動論―，共立出版，1968.