――研　究――

分布ラグモデルの推定について

井　上　勝　雄

§0　分布ラグモデルの推定について多くの研究がなされている．そして，それらの研究の中で提示されている推定方法は，実際に適用される場合には時系列データを用いることを前提にしている．これは分布ラグモデルの性格から当然のようにも思われる．しかし，二期間以上にわたってのクロス・セクション・データが得られるならば，それを利用しての分布ラグの推定も可能なのであるから，クロス・セクション・データを想定しての推定に関しても等しく考察されなければならないであろう．

一般に分布ラグの形式にはモデル自体の複雑さに加えて，攪乱項の系列相関も考慮されなければならないケースが多い．したがって分布ラグモデルの推定には，ラグのある変数の問題に系列相関の問題という困難さが加わることになる．

一方，用いるデータによってモデルの前提が異なることは認められるであろうし，データの種類の相違によって推定方法にも違いがでてくるであろう．このように考えると，分布ラグモデルの推定に関して，用いるデータがクロス・セクション・データの場合に比較的とり扱いやすくなることがわかる．以下本稿では分布ラグモデルの推定について，用いるデータが時系列データかあるいはクロス・セクション・データかを明確に区別してその推定方法について考察する．

最初に，§1においてモデルの一般的な定式化をする．§2で既に明らかにされている推定方法を中心に，時系列データを利用することを想定した推定方法について，さらに，§3ではクロス・セクション・データを用いることを前提にした推定方法を考察する．最後に，§4において，それらの推定方法を実際に適用して消費関数の計測を行なう．

§1　われわれが考察するモデルは，次のように定式化される幾何級数的な分布ラグモデルである．

(1)　$y_t^i=\beta\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j x_{t-j}^i+u_t^i \quad (0<\lambda<1)$

(2)　$u_t^i=\rho u_{t-1}^i+e_t^i \quad (-1<\rho<1)$

(3) $e_t^i \sim N(0, \sigma^2)$, $\mathrm{E}\, e_t^i e_s^j = \delta_{ij} \delta_{ts} \sigma^2$

ここで，t は時系列的な添字であり，i はクロス・セクション的な添字である.[1)]

(1) を家計の消費関数と見做し，y_t^i を第 i 番目の家計の t 期における消費水準，x_{t-j}^i をその家計の $(t-j)$ 期の所得水準として，(1) を家計の分布ラグ消費関数と考えることができる．そして各家計の消費行動パターンは同一であり，各家計の消費行動についてのランダムな要因を攪乱項 u_t^i で表わされる．攪乱項 u_t^i は1階のマルコフ過程に従う系列相関をすることを (2) で前提する．(3) はその攪乱項に関して，異なる家計の攪乱項には相関がなく，家計間で，消費行動についての確率的な要因は互いに独立であるとの前提を表現している．

一方，たとえば，(1) をマクロ経済学の領域で取り扱う総消費関数と見做し，一国の経済全体の時系列データを用いて，それを推定しようとする場合には，上添字 i は全く不必要である．したがって，(2), (3) においても添字 i, j, および (3) における δ_{ij} を省略しなければならない．この場合，全経済体系での消費行動パターンは考察中の期間内で同一不変であり，各期の消費行動の攪乱的要因を u_t で表現する．さらに，攪乱項 u_t は全経済体系内の消費行動の確率的要因を表わすのであるが，それは系列的に相関する部分と，各期に特有の不確定要因との和であることを (2), (3) で表現していることになる．

われわれは上で，幾何級数的な分布ラグモデルの形式を定式化したのであるが，(1) における説明変数 x_{t-j}^i は無限個あり，実際にデータを利用しての推定に際しては (1) のままでは不可能である．以下で推定方法を考察するについて，データの数を時系列データの場合は T 個 $(t=1, 2, \cdots, T)$，クロス・セクション・データの場合は N 個 $(i=1, 2, \cdots, N)$ と想定して分析をすすめる．さて，データが有限個であることより (1) を変形しなければならないが，その際三つのタイプの変換の仕方がある．その三つの形式を以下でまとめておくことにする．

その一つは，

(4) $y_t^i - \lambda y_{t-1}^i = \beta x_t^i + w_t^i$, $\quad w_t^i = u_t^i - \lambda u_{t-1}^i \quad (t=2, 3, \cdots, T)$

1) モデルの (1) に定数項や x 以外の説明変数を含む場合については，以下の諸式を少し修正するだけで本稿の議論のほとんどすべてがそのままであてはまる．

であり，(4)における確率変数 w_t^i については次の性質が導出できる.[1)]

$$\mathrm{E}\, w_t^i = 0$$

$$\mathrm{E}\, w_t^i w_t^j = \delta_{ij}\varphi\sigma^2, \qquad \varphi = \frac{1-2\lambda\rho+\lambda^2}{1-\rho^2}$$

$$\mathrm{E}\, w_t^i w_{t-s}^j = \delta_{ij}\varphi\phi\rho^{s-1}\sigma^2, \qquad \phi = \frac{(\rho-\lambda)(1-\lambda\rho)}{1-2\lambda\rho+\lambda^2} \quad (s \geqq 1)$$

したがって，いま $(T-1)N$ 次元ベクトル W を，

$$W = (w_1^1 w_2^1 \cdots w_{T-1}^1 w_1^2 w_2^2 \cdots w_{T-1}^2 \cdots w_{T-1}^N)'$$

と定義すると

(5) $\mathrm{E}\, W = 0, \quad \mathrm{E}\, WW' = I_N \otimes \sigma^2 \Sigma_1$

ここに，$\Sigma_1 = \varphi \begin{pmatrix} 1 & \phi & \phi\rho & \phi\rho^2 & \cdots & \phi\rho^{T-3} \\ \phi & 1 & \phi & \phi\rho & \cdots & \phi\rho^{T-4} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \phi \\ \phi\rho^{T-3} & \cdots & & & \phi & 1 \end{pmatrix}$

である.

次に，(1)を変形して，

(6) $y_t^i - (\lambda+\rho)y_{t-1}^i + \lambda\rho y_{t-2}^i = \beta(x_t^i - \rho x_{t-1}^i) + v_t^i \quad (t=3, \cdots, T)$

$$v_t^i = u_t^i - (\lambda+\rho)\, u_{t-1}^i + \lambda\rho u_{t-2}^i = e_t^i - \lambda e_{t-1}^i$$

が得られる．また(6)における確率変数 v_t^i について，

---

1) (2), (3)より，

$$(*) \quad \begin{aligned} &\mathrm{E}\, u_t^i = 0 \\ &\mathrm{E}\, u_t^i\, u_{t-s}^j = \delta_{ij}\frac{\rho^s}{1-\rho^2}\sigma^2 \end{aligned}$$

は,実際に計算することによって，ただちに得られる．したがって，$i \neq j$ に関して w_t^i, w_{t-s}^j の共分散は0であることは明らかである．一方，$i=j$ については，i, j の添字を省略して

$$w_t\, w_t = u_t^2 - 2\lambda\, u_t\, u_{t-1} + \lambda^2\, u_{t-1}^2$$

および

$$w_t\, w_{t-s} = u_t\, u_{t-s} - \lambda\,(u_t\, u_{t-s-1} + u_{t-1}\, u_{t-s}) + \lambda^2\, u_{t-1}\, u_{t-s-1}$$

であるから，(*) を利用して，w_t^i の分散，共分散が本文の諸式のように導出される．

$$\mathrm{E}\, v_t^i = 0$$

$$\mathrm{E}\, v_t^i\, v_t^j = \delta_{ij}(1+\lambda^2)\sigma^2$$

$$\mathrm{E}\, v_t^i\, v_{t-s}^j = \begin{cases} \delta_{ij}(-\lambda)\sigma^2 & ; \ s=1 \\ 0 & ; \ s \geqq 2 \end{cases}$$

が導出できる[1)]．さらに，$(T-2)N$ 次元確率変数ベクトル V を，

$$V = (v_1^1\, v_2^1 \cdots v_{T-2}^1\, v_1^2\, v_2^2 \cdots v_{T-2}^2 \cdots v_{T-2}^N)'$$

と定義すると，

(7) $\mathrm{E}\, V = 0,\ \ \mathrm{E}\, VV' = I_N \otimes \sigma^2\, \Sigma_2$

ここに，
$$\Sigma_2 = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & & & \vdots \\ 0 & -\lambda & 1+\lambda^2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

が得られる．

一方，(1) は，次のようにも変形できる．

(8) $y_t^i = \eta_0 \cdot \lambda^t + \beta \sum_{j=0}^{t-1} \lambda^j x_{t-j}^i + u_t^i, \qquad \eta_0 = \beta \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s x_{-s}^i \quad (t=1, \cdots, T)$

また TN 次元確率変数ベクトル U を，

$$U = (u_1^1\, u_2^1 \cdots u_T^1\, u_1^2\, u_2^2 \cdots u_T^2 \cdots u_T^N)'$$

とすると，

(9) $\mathrm{E}\, U = 0, \qquad \mathrm{E}\, UU' = I_N \otimes \sigma^2\, \Sigma_3$

---

1) (6) の第二式と (2), (3) とより，

$$\mathrm{E}\, v_t^i = 0,\ \ \mathrm{E}\, v_t^i\ v_t^j = \delta_{ij}(1+\lambda^2)\,\sigma^2$$

は明らかである．さらに $i \neq j$ については v_t^j, v_{t-s}^i の共分散が 0 であることは (3) より直ちに導ける．一方，$i=j$ に関して，v_t, v_{t-s} の共分散は，

$$v_t\, v_{t-s} = e_t\, e_{t-s} - \lambda(e_t\, e_{t-s-1} + e_{t-1}\, e_{t-s}) + \lambda^2\, e_{t-1}\, e_{t-s-1}$$

よりわかるように，上式の期待値をとれば，$s=1$ のときに限って，$-\lambda\sigma^2$ となり，本文のように得られる，

ここに，$\Sigma_3=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \cdots\cdots & \rho^{T} \\ \rho & 1 & \rho & \cdots\cdots & \rho^{T-1} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots\cdots & \rho^{T-2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \rho^{T} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

となることは周知に属する.[1]

われわれは，上でモデル(1)，(2)，(3)について以下で利用する三種の変換の形式を考えたのであるが，次に，その推定方法について考察しよう.

§2　この§では，§3と関連のあるものを中心に，時系列データを利用することを前提に既に明らかにされている推定方法をみてみよう．まず，コイック―クライン (**Koyck-Klein**) の方法を考察しよう.

まず，時系列データを前提にしているので，モデルは，

(1)′　$y_t=\beta\sum\lambda^j x_{t-j}+u_t$

(2)′　$u_t=\rho u_{t-1}+e_t$

(3)′　$e_t\sim N(0,\sigma^2)$,　$\mathrm{E}\,e_t\,e_s=\delta_{ts}\,\sigma^2$

とできる．さらに，(4)より

(10)　$y_t-\lambda y_{t-1}=\beta x_t+w_t$,　$w_t=u_t-\lambda u_{t-1}$

が得られる．コイックは，撹乱項の系列相関係数 ρ が既知であるということを前提に，(10)の λ, β の一致推定量 $\hat{\lambda}$, $\hat{\beta}$ が次式から得られることを示した.[2]

(11)
$$\hat{\beta}\sum x_t^2+\hat{\lambda}\sum y_{t-1}x_t=\sum y_t x_t$$
$$\hat{\beta}\sum x_t y_{t-1}+\hat{\lambda}\sum y_{t-1}^2=\sum y_t y_{t-1}+\frac{(\hat{\lambda}-\rho)\sum Z_t^2}{1-\rho\hat{\lambda}+l(\hat{\lambda}-\rho)}$$

上の(11)において，l, $\sum Z_t^2$ は(10)の最小二乗法による λ の推定量と誤差の2乗和である.

一方，撹乱項の系列相関係数 ρ が $\rho=0$ として既知である場合，コイックの推定量は,

(11)′
$$\hat{\beta}\sum x_t^2+\hat{\lambda}\sum y_{t-1}x_t=\sum y_t x_t$$
$$\hat{\beta}\sum x_t y_{t-1}+\hat{\lambda}\sum y_{t-1}^2=\sum y_t y_{t-1}+\frac{\hat{\lambda}\sum Z_t^2}{1+l\hat{\lambda}}$$

1)　本稿 p.111 の脚註 1) に記した (*) を参照.
2)　Koyck〔7〕p.36, p.37 参照.

となる．このケースについてクラインは上式より得られる推定量が一般化最小二乗推定量あるいは最尤推定量として解釈できると主張している．クラインの提示するのは次のようになる．いま，(10)において，攪乱項は u_t, u_{t-1} の二項存在するが，この攪乱項について，その分散は等しく，$\rho=0$ だから互いに独立である．したがって，最尤推定法をとることを考えると，結局

$$\Sigma u_t^2+\Sigma u_{t-1}^2$$

を最小化する問題に変換される．そうして，

$$u_t+\eta_t=y_t$$

とするならば，最小にすべきものは

$$\Sigma(y_t-\beta x_t-\lambda\eta_{t-1})^2+\Sigma(y_{t-1}-\eta_{t-1})^2$$

とできるので，これより β, λ, η_{t-1} について推定量を得ようとする．このようにして得られる β, λ の推定量は，(11)′で得られるコイックの推定量 $\hat{\beta}$, $\hat{\lambda}$ と同等であることが証明され得る.[1)]

さて，われわれは，クラインの解釈をさらに進めて，コイックの推定量が，近似的な最尤推定量あるいは一般化最小二乗推定量であることを以下で示すことができる．

つまり，(10)において攪乱項としての確率変数 w_t について考察する．この場合(5)より明らかになるように，

$$w=[w_t]$$

として，$(T-1)$ 次元確率変数ベクトル w は，

$$\mathrm{E}\,w=0,\ \ \mathrm{E}\,ww'=(1+\lambda^2)\,\sigma^2\,\overline{\Sigma}_1$$

$$\text{ここに，}\overline{\Sigma}_1=\begin{pmatrix} 1 & \overline{\phi} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \overline{\phi} & 1 & \overline{\phi} & & & \vdots \\ 0 & \overline{\phi} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \overline{\phi} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \overline{\phi} & 1 \end{pmatrix},\ \overline{\phi}=\frac{-\lambda}{1+\lambda^2}$$

となる．したがって，ここで一般化最小二乗法を適用しようとするならば，

---

1) Klein〔6〕p.556 参照.

$$S=\frac{1}{2(1+\lambda^2)\sigma^2}w'\Sigma_1^{-1}w$$

を最小にすべきである.

いま攪乱項 u_t に系列相関のない $\rho=0$ の場合を前提にしているのであるが，その場合でも w_t については系列的に相関する．しかし，w_t の系列相関を無視すると

$$\mathrm{E}\,ww' \fallingdotseq (1+\lambda^2)\sigma^2 I_{T-1}$$

とできるが，このように考えると，先の一般化最小二乗法をとるために最小にするものは，

$$S\fallingdotseq\frac{1}{2(1+\lambda^2)\sigma^2}w'w$$

となる．こうして上に近似化された S を最小化する β, λ の推定量も，(11)′ で得られるコイックの推定量と同等になることを証明することができる[1]．

したがって，コイックの推定量は近似的な一般化最小二乗推定量あるいは最尤推定量なのである．

次に考察する Dhrymes の方法[2]はより直接的に最尤推定量を求めようとする観点から，Koyck-Klein の推定量をより一般化しようとするものであろう．

---

1) ベクトル w を定義したのと同様に，$(T-1)$ 次元ベクトル y, x, y_{-1} を，

$$y=[y_t],\ x=[x_t],\ y_{-1}=[y_{t-1}]$$

とすると，(11)′ より得られる $\hat{\lambda}$ は

$$\text{(a.1)}\quad (x'y_{-1}\cdot x'y-x'x\cdot y'_{-1}y)\hat{\lambda}^2$$
$$+(x'x\cdot y'y-x'x\cdot y'_{-1}y_{-1}+x'y_{-1}\cdot x'y_{-1}-x'y\cdot x'y)\hat{\lambda}$$
$$+(x'x\cdot y'_{-1}y-x'y_{-1}\cdot x'y)=0$$

の根となる．一方，

$$S\fallingdotseq\frac{1}{2(1+\lambda^2)\sigma^2}(y-\beta x-\lambda y_{-1})'(y-\beta x-\lambda y_{-1})$$

を β, λ で偏微分して 0 とおくと，

$$\text{(a.2)}\quad x'(y-\beta x-\lambda y_{-1})=0$$

$$\text{(a.3)}\quad \frac{\lambda}{1+\lambda^2}(y-\beta x-\lambda y_{-1})'(y-\beta x-\lambda y_{-1})+y'_{-1}(y-\beta x-\lambda y_{-1})=0$$

が得られる．(a.2) を利用して，(a.3) を，

$$\text{(a.4)}\quad \lambda y'(y-\beta x-\lambda y_{-1})+y'_{-1}(y-\beta x-\lambda y_{-1})=0$$

と変形する．さらに (a.2), (a.4) より β を消去すれば，(a.1) が得られる．

2) Dhrymes [1] 参照.

われわれは，いま時系列データを前提にしているから (8) より

$$(8)' \qquad y_t=\eta_0\lambda^t+\beta\sum_{j=0}^{t-1}\lambda^j x_{t-j}+u_t \quad (t=1,\cdots,T)$$

が得られる．上式において確率変数ベクトル $u=(u_1\cdots u_T)'$ は，(9) より直ちに明らかなように，

$$\mathrm{E}\,u=0, \quad \mathrm{E}\,uu'=\sigma^2\Sigma_3$$

である．したがって，尤度関数を $\bar{L}$ とすると，

$$(8)'' \qquad L=ln\,\bar{L}=-\frac{T}{2}ln(2\pi)-\frac{T}{2}ln\,\sigma^2-\frac{1}{2}ln|\Sigma_3|-\frac{1}{2\sigma^2}u'\Sigma_3^{-1}u$$

が導出できる．さらに，行列 Σ_3，行列式 $|\Sigma_3|$ について，

$$\Sigma_3^{-1}=M'M, \quad M=\begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & & & & \\ -\rho & 1 & & & \\ 0 & -\rho & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Sigma_3|^{-1}=1-\rho^2$$

が得られるので，

$$u^*=Mu, \quad y^*=My, \quad X^*=M(\lambda^t, \Sigma\lambda^j x_{t-j}), \quad \theta=\begin{bmatrix}\eta_0\\ \beta\end{bmatrix}$$

と定義すれば，(8)′，(8)″ はそれぞれ

$$y^*=x^*\theta+u^*$$

$$L=-\frac{T}{2}ln(2\pi)-\frac{T}{2}ln\,\sigma^2+\frac{1}{2}ln(1-\rho^2)-\frac{1}{2\sigma^2}u^{*\prime}u^*$$

となる．一方，これより最尤推定量を得ようとすると，推定量についての高次の非線型の方程式が得られ，実際に適用する際に非常に困難である．しかし，いま λ，ρ を固定させて，θ，σ^2 でのみ L を偏微分して 0 とすれば

$$\hat{\theta}(\lambda, \rho)=(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^*$$

$$\hat{\sigma}^2(\lambda,\rho)=\frac{u^{*\prime}u^*}{T}$$

が得られる．したがって，尤度関数 L は

$$L^*=-\frac{T}{2}(ln(2\pi)+1)-\frac{T}{2}ln\left[\frac{\hat{\sigma}^2(\lambda,\ \rho)}{(1-\rho^2)^{1/T}}\right]$$

と変形でき[1)]，実際には

$$\frac{\hat{\sigma}^2(\lambda,\ \rho)}{(1-\rho^2)^{1/T}}$$

を，$(\lambda,\ \rho)$ の種々の値に対して，最小化することで，初期の目的に達することができる[2)].

上述のようにして得られる最尤推定量は **Koyck-Klein** の推定量をより一般化した形で求めようとするものであると考えられる.

§3 この§ではクロス・セクション・データを利用することを前提に議論を進める．ここでクロス・セクション・データというのは，通常 *reinterview data* あるいは *survey data*（追跡調査標本）といわれるものでなければならない．つまり，2期間，あるいはそれ以上の期間に渡たる個々の標本でなければならない．このことは既に明らかであるが，たとえば，家計の分布ラグ消費関数を推定するのであれば，同一の家計について，消費水準，所得水準，あるいはそれ以外の説明変数についての2年以上の期間調査されたデータを必要とするのである.

まず，2期間にわたってのクロス・セクション・データの場合を考える．このようなデータを利用することを前提すると，考慮しなければならない体系は，(4) より

$$(4)'\quad y_t^i-\lambda y_{t-1}^i=\beta x_t^i+w_t^i,\quad w_t^i=u_t^i-\lambda u_{t-1}^i\quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,N \\ t=0,1 \end{pmatrix}$$

である．いま，N 次元列ベクトル y, y_{-1}, x, w を

$$y=[y_t^i],\ y_{-1}=[y_{t-1}^i],\ x=[x_t^i],\ w=[w_t^i]\quad (t=0)$$

と定義しておくと，(5) を参考にして

$$\mathrm{E}\, ww'=\varphi\sigma^2 I_N$$

である.

したがって，確率変数ベクトル w は

$$w\sim N(0,\ \varphi\sigma^2 I_N)$$

1) Dhrymes〔1〕において，L^* で表わされるような尤度関数を特に，"*concentrated*" *likelihood function* と記している.

2) このようにして得られる最尤推定量の一致性，有効性，漸近的不偏性についての条件は Dhrymes〔2〕で検討されている.

であることが導かれる．この場合，尤度関数 $\bar{L}$ の対数 L は，

$$L=ln\,\bar{L}=-\frac{N}{2}\,ln\,2\pi-\frac{N}{2}\,ln\,\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{w}{\sqrt{\varphi}}\right)'\left(\frac{w}{\sqrt{\varphi}}\right)$$

とすることができる．そうして，(4)′に表現される上のモデルの最尤推定量を求めるために，L の最大化問題を考える． 直ちに明らかになるように，攪乱項の分散 σ^2 の推定量 $\hat{\sigma}^2$ について，

$$\hat{\sigma}^2(\beta,\ \lambda,\ \rho)=\frac{1}{N}\cdot\frac{w'w}{\varphi}$$

が必要条件として導出され， 上の L の最大化問題は $\hat{\sigma}^2(\beta,\ \lambda,\ \rho)$ の最小化問題に変換される.[1)]

さらに，

$$w=y-\lambda\,y_{-1}-\beta x$$

より明らかであるように，w には ρ が含まれないから $\hat{\sigma}^2$ を最小化するには，任意の λ について，$w'w$ を最小化する β の推定量 $\hat{\beta}(\lambda)$ と $\dfrac{1}{\varphi}$ を最小化する攪乱項の系列相関係数 ρ の推定量 $\hat{\rho}(\lambda)$ とを求めることで充分である．

しかし，ある任意の λ に対して

$$\frac{1}{\varphi}=f(\rho\,;\ \lambda)=\frac{1-\rho^2}{1-2\lambda\rho+\lambda^2}$$

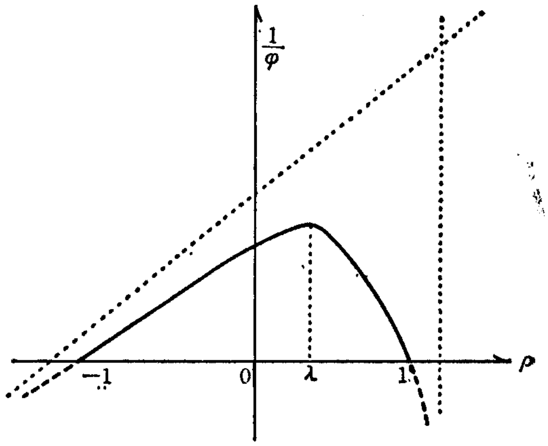
のグラフは図―1のようになり，ρ を体系内に所与としなければならない．というのは，$\rho^2=1$ のとき $\dfrac{1}{\varphi}=0$ となり確かに σ^2 の推定量は0となって $\hat{\sigma}^2(\beta,\ \lambda,\ \rho)$ の最小値が数学的には得られるが，これは攪乱項の分散 σ^2 の推定量としては妥当しない．

したがって， われわれは2年間のクロス・セクション・データの場合には，攪乱項の系列相関係数 ρ の情報を前もって与えられていなければならない．そうすれば，その既知となった ρ の値に対して $\hat{\sigma}^2(\beta,\ \lambda\,;\ \rho)$ の最小化はなされ，最尤推定量 $\hat{\beta}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\sigma}^2$ が得られる．

いま， $\rho=0$ とすれば，§2のコイックの推定量のわれわれの解釈からわかるように，上で得た2年間のクロス・セクション・データによる 最尤推定量あるいは 一般化最小二

1) したがって，この場合最尤推定法と，一般化最小二乗法とは同値である．また，この例からわかるように，攪乱項の共分散が0の場合は最尤推定法はただちに一般化最小二乗法に変換されることになる．

乗推定量は(11)′で得られるコイックの推定量とは形式的には同等である．それは $\rho=0$ のとき，$\varphi=1+\lambda^2$ となることから明らかである[1]．このことからさらに言えることはコイックの推定法は時系列データの場合よりクロス・セクション・データを利用するときの推定法としてより有効であるということである．



図—1

次に，3期間のクロス・セクション・データが利用できる場合の推定法を簡単に考察しておこう．このケースでは，(6)より得られる

$$(6)' \quad y_t^i-(\lambda+\rho)y_{t-1}^i+\lambda\rho y_{t-2}^i=\beta(x_t^i-\rho x_{t-1}^i)+v_t^i \quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,N \\ t=0,1,2 \end{pmatrix}$$

で考察することができ，N 次元確率変数ベクトル v を

$$v=[v_t^i] \quad (t=0)$$

とすると，(7)を参考にして

$$\mathrm{E}\,v=0,\ \mathrm{E}\,vv'=(1+\lambda^2)\sigma^2 I_N$$

が導かれる．

先の考察と同様に，この場合も最尤推定量あるいは一般化最小二乗推定量は

$$\hat{\sigma}^2(\beta,\lambda,\rho)=\frac{1}{N}\cdot\frac{v'v}{1+\lambda^2}$$

を最小化する β, λ, ρ として求めることができる．

§4* 先の§で，われわれは時系列データ，およびクロス・セクション・データを利用しての分布ラグモデルの推定方法について考察してきた．

---

1) w に関して，§2ではその共分散が0であると近似したのであるが，ここではモデルの定式化より厳密に w 間に相関はない．

*) この§での研究は，斎藤光雄教授（神戸大学）との共同研究の一部であり，第40回日本統計学会研究報告会（1972年7月）で筆者によって報告されたものである．

この§で，それらの推定方法を実際に適用して，特に短期の限界消費性向と一期前の消費水準にかかる係数とを中心に，分布ラグ消費関数の計測をする．

最初に，われわれが以前に推定した結果をまとめておこう．時系列データとしては，昭和30年〜43年の日本の国民所得統計を利用し，クロス・セクション・データとして，昭和39年および40年の「貯蓄動向調査」の個標を使って，それぞれ最小二乗推定および，二段階最小二乗推定（あるいは操作変数法[1)]）によって次の結果を得ている．

（i） 時系列データによって，総消費関数における限界消費性向は約そ0.49〜0.51であり，一期前の消費（以下 C_{-1} で表わす）の係数は0.39〜0.41である[2)]．

（ii） クロス・セクション・データによって，勤労者家計の消費関数における限界消費性向は，0.72〜0.74であり，C_{-1} の係数は，0.09〜0.14と推定される[3)]．

（iii） 昭和39年のクロス・セクション・データにおいては貯蓄に固定資産への投資分を含むが，昭和40年のデータでの貯蓄は流動資産の増分のみである．そこで，昭和39年

---

1) ここで二段階最小二乗法というのは，一期前の独立変数（つまり x_{t-1}）を操作変数とする操作変数法である．Liviatan〔8〕および拙稿〔5〕参照．

2) 時系列データによって次の計測結果を得ている．最小二乗法では，

$$C=3.96+\underset{(0.191)}{0.500}\,Y+\underset{(0.167)}{0.005}\,L+\underset{(0.151)}{0.391}\,C_{-1}\qquad s=1.38\quad R=0.99$$

あるいは，操作変数法では，

$$C=3.41+\underset{(0.194)}{0.492}\,Y+\underset{(0.173)}{0.002}\,L+\underset{(0.185)}{0.413}\,C_{-1}\qquad s=1.39\quad R=0.99$$

上二式で C は総消費水準，Y は国民所得水準，L は流動資産残高でいずれも昭和40年の消費財物価指数でデフレートしている．したがって，単位は昭和40年の価格表示の千億円である．

3) クロス・セクション・データを利用して，最小二乗法，操作変数法によってそれぞれ

$$C=26.8+\underset{(0.035)}{0.721}\,Y-\underset{(0.034)}{0.042}\,L+\underset{(0.032)}{0.124}\,C_{-1}+\underset{(5.16)}{7.30}\,N\qquad s=112.6\quad R=0.838$$

$$C=32.4+\underset{(0.040)}{0.743}\,Y-\underset{(0.033)}{0.041}\,L+\underset{(0.048)}{0.082}\,C_{-1}+\underset{(5.19)}{7.83}\,N\qquad s=112.9\quad R=0.838$$

と得ている．ここで C は消費水準，Y は所得，L は流動資産残高，N は家計人数である．クロス・セクション・データでの推定に際しては，分散の不均一性を考慮しなければならないことが多いが，分散の不均一性を取り扱った推定結果については拙稿〔5〕を参照されたい．

のデータによって，貯蓄を固定資産への投資分をも含むとすれば，限界消費性向は0.68〜0.70と推定される．

(iv) 説明変数に一期前の消費水準等のようにラグつき変数を含まない消費関数では，勤労者家計のみの限界消費性向と経済全体の限界消費性向との差は前者が約0.07高いことが推定されている[1)]．

上に纒められた推定結果より次のことがわかる．短期の限界消費性向に関してクロス・セクション・データによる推定値と時系列データによる推定値には約そ0.13の，その根拠が充分には明らかでない相違がみられる． また，一期前の消費水準にかかる係数については， 時系列データによる推定係数とクロス・セクション・データでのそれとには約0.3の違いがあるように思われる．

さて， 先の§で考察した分布ラグモデルの形式で消費関数を計測する場合， つまり，家計の消費関数および総消費関数が分布ラグ消費関数であるならば， 最小二乗法による推定値には偏りがあることは知られている． 特に時系列データの場合，推定しようとする方程式の攪乱項に系列相関があることはほぼ確実で， §2の(10)で表現せられる形式を最小二乗法で推定した場合，その漸近的偏りは，

$$(\rho-\lambda)\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}\cdot\frac{Ex_t^2}{Ex_t^2\cdot Ey_{t-1}^2-(Ex_t y_{t-1})^2}$$

となる[2)]． このことを考慮するならば，先に述べた時系列データによる結果とクロス・セクション・データによる結果との相違が説明され得るとも考えられるのである．

以下でわれわれは， 家計の消費関数および経済全体の総消費関数が分布ラグ消費関数であるとして， そして更に総消費関数における攪乱項の系列相関の問題を充分考慮しながら推定したい．

いま，家計の消費行動が，

$$(12)\quad C_t^i=\alpha+\beta\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j Y_{t-j}^i+\gamma L_t^i+\delta N_t^i+u_t^i$$

で表現されるパターンで決定されるものとする．上の消費関数で C_t^i は第 i 番目の家計

1) 本文 (iii), (iv) に関しての詳細な議論については，斎藤〔10〕を参照されたい．
2) 拙稿〔5〕p.115 参照．

の t 期の消費水準，Y^t_{t-j} はその家計の $(t-j)$ 期の所得水準，L^t_t は t 期の期初に家計の保有している流動資産残高，N^t_t は家計人数である．したがって，われわれは個々の家計の消費行動パターンが等しいとしているのである．一方，われわれは，クロス・セクション・データとして昭和39年・40年の2年間の勤労者家計のデータが利用できる．§3の議論にしたがって(12)を次のように変形して，α, β, λ, γ, δ を推定できる．

(12)′ $C^t-\lambda C^t_{-1}=\alpha(1-\lambda)+\beta Y^t+\gamma(L^t-\lambda L^t_{-1})+\delta(N^t-\lambda N^t_{-1})+w^t$

(12)′においては下添字 t を省略している．しかし，一期前の変数を明示するために -1 の添字を付けている．

さて，§3の考察で既に明らかになったように，(12)における消費行動の攪乱的要因を表わす u^t_t が系列的に相関するとしてもその系列相関係数 ρ を推定することはできない[1]．しかし，われわれは家計の消費行動を説明する要因として所得水準以外に，流動資産残高や家計人数を加えている．したがって，攪乱的要因が系列的に相関するというより，この場合，家計の消費行動についてランダムな要因は各期において独立であると考える．もしそれが系列相関するとしても0に近いと思われる．このように考えるならば，確率変数 u^t_t は互いに独立に期待値0，その分散が σ^2 の正規分布すると仮定して(12)′の確率変数 w^t は互いに独立に，

$$w^t\sim N(0,\ (1+\lambda^2)\sigma^2)$$

に従うと仮定しよう．

以上のことから，(12)のパラメータを計測するために，$w=[w^t]$ として，

$$\frac{w'w}{(1+\lambda^2)\sigma^2}$$

を最小にする $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\sigma}^2$ を求めれば，これが最尤推定値（あるいは一般化最小二乗推定値）となることは§3の議論より明らかである．このようにして，昭和39年40年の勤労者家計の消費関数を，

$$\underset{}{C=3.9+\underset{(0.036)}{0.677}\,Y+\underset{(0.038)}{0.019}\,L^*+\underset{(0.034)}{0.217}\,C_{-1}+\underset{(5.58)}{6.45}\,N^*}$$

$$R=0.824$$

$$s=112.3$$

---

1) モデルの前提が始めから攪乱項の系列相関があるとする場合や，ρ の値についての情報を得るためには，以下で求める ρ 以外の推定値から，推定残差を導出しこれによって ρ の推定値を求めるということはできる．

と結果を得た．ここで L^*, N^* は，

$$L^*=L-\lambda L_{-1},\quad N^*=N-\lambda N_{-1}$$

の意味である．

さて，次に昭和30年～43年の時系列データによる推定を行なおう．いま，経済全体の総消費関数を

$$(13)\quad C_t=\alpha+\beta\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j Y_{t-j}+\gamma L_t+u_t$$

とする．(13)において C_t は総消費水準，Y_{t-j} は $(t-j)$ 期の国民所得水準，L_t は流動資産残高として，いずれも実質値であるとする．さらに攪乱項 u_t は一階のマルコフ過程に従う系列相関をするものと前提しよう．この場合，§2で考察した Dhrymes の推定方法を利用することができる．しかし，ここでは§2で考察した Dhrymes の方法を直接にとるのではなく，実際に適用するにはより簡単な一般化最小二乗推定法での推定を行なおう．

(13)を変形して，

$$(13)'\quad C_t^0=\alpha^0+\beta Y_t^0+\gamma L_t^0+v_t\quad (t=3,4,\cdots,T)$$

$$C_t^0=C_t-(\lambda+\rho)C_{t-1}+\lambda\rho C_{t-2},\qquad Y_t^0=Y_t-\rho Y_{t-1}$$

$$L_t^0=L_t-(\lambda+\rho)L_{t-1}+\lambda\rho L_{t-2}$$

$$\alpha^0=\alpha(1-\lambda)(1-\rho),\qquad v_t=e_t-\lambda e_{t-1}$$

とできる．攪乱項 u_t に関して (2), (3) と前提しているので，§2で議論したように，$(T-2)$ 次元ベクトル v を $v=[v_t]$ と定義すると，

$$v\sim N(0,\ \sigma^2\Sigma_2)$$

である．これより，

$$\frac{v'\Sigma_2^{-1}v}{\sigma^2}$$

を最小にする $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\rho}$, $\hat{\sigma}^2$ が一般化最小二乗推定値となる.[1)]

1) Dhrymes〔1〕 pp. 59～60 において，$\Sigma_2^{-1}=RR'$ となる下三角行列 R の近似行列を提示し，変数 C_t^0, Y_t^0 等の R による変換を行ない単純最小二乗法が便宜的に利用できることを提案している．

また行列 Σ_2 については本稿 (5) 式を参照．

以上の方法によって，時系列データからわれわれは次の結果を得た.

$$C=4.90+0.564\,Y+0.215\,C_{-1}+0.075\,(L-\lambda L_{-1})+(u-\lambda u_{-1})$$

$$u=0.502\,u_{-1}+e \qquad R=0.997$$

$$s=1.515$$

われわれは，用いるデータが時系列データであるかあるいはクロス・セクション・データであるかということ，またそれらを利用しての推定すべきモデルの前提やその推定方法について充分考慮して，上に示した消費関数の計測をした．時系列データによる推定結果と，クロス・セクション・データによる推定結果は斉合的であるように思われる．これよりわかることは経済全体の限界消費性向は約そ0.56であり，一期前の消費水準にかかる係数は約そ0.2であるということである．これらをここでの計測結果として結論できるであろう．

参考文献

[1] Dhrymes, P. J., "Efficient Estimation of Distributed Lags with Autocorrelated Errors," *International Economic Review*, February, 1969, pp. 47–67.

[2] ——, "On the Strong Consistency of Estimators for Certain Distributed Lag Models with Autocorrelated Errors," *International Economic Review*, June, 1971, pp. 329–43.

[3] Griliches, Z., "A Note on Serial Correlation Bias in Estimates of Distributed Lags," *Econometrica*, January, 1961, pp. 65–73.

[4] Hannan, E. J., "The Estimation of Relationships Involving Distributed Lags," *Econometrica*, January, 1965, pp. 206–24.

[5] 井上勝雄,「クロス・セクション・データによる分布ラグ消費関数の計測」.『経済学論究』第26巻2号，1972年7月.

[6] Klein, L. R., "The Estimation of Distributed Lags," *Econometrica*, October, 1958, pp. 553–65.

[7] Koyck, L. H., *Distributed Lags and Investment Analysis*, (Amsterdam : North Holland Publishing Co., 1954).

[8] Liviatan, N., "Estimates of Distributed Lag Consumption Functions from Cross Section Data," *Review of Economics and Statistics*, February, 1965, pp. 44–53.

［9］ Malinvaud,E., "The Estimation of Distributed Lags ; A Comment," *Econometrica*, July, 1961, pp. 430–33.

［10］ 斎藤光雄，「クロス・セクション・データによる貯蓄関数の計測」，『国民経済雑誌』第124巻第5号，1971年11月.