——研　究——

クロス・セクション・データによる分布ラグ消費関数の計測*

井　上　勝　雄

§0　はじめに

コイック（Koyck）[1] によって始めて明示的にとり扱われた分布ラグ（*distributed lag*）は経済学における実証研究の領域で，充分適用し得るにもかかわらず，その推定に際して困難な問題が生ずる．この分布ラグモデルの係数推定での問題点は，単純最小二乗法によって推定すると，推定値の偏り（*bias*）が生ずる，ということから発している．

以下で，分布ラグモデルにおける単純最小二乗推定量の偏りについて明らかにし，この偏りを消去すべく，つまり一致推定量を求めてなされた貢献の一つであるリヴィエタン(Liviatan）の提示した操作変数法について，[2] その統計学的特性について若干の考察をする．

一方，この分布ラグモデルの形式が，経済関係式においてどの様な意味をもつか，それを特に消費関数に適用した場合について考察する．さらに，実際のデータを利用して，分布ラグ消費関数（*distributed lag consumption function*）を推定する．その際，本稿においては，日本の家計の消費関数を推定すべく，昭和39·40年の二年間にわたるクロス・セクション・データを用いる．

§1　分布ラグモデルの推定に関して

＊ 本稿の研究は斎藤光雄教授（神戸大学）の指導のもとに行なわれ，教授の keep されておるデータを利用させていただいた．ここで，先生に対し心から感謝の意を表します．

1） Koyck, L. H.〔5〕参照.

2） Liviatan, N.〔6〕参照.

分布ラグモデルの最も一般的な形式は，

$$y_t=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x_{t-i}+\sum_{i=1}^{k}\beta_i z_{ti}+u_t$$

である．遅れのある変数 x_{t-i} と，これとは異なるいくつかの変数 z_{ti} によって，経済変数 y_t を説明する形式である．上式で u_t は攪乱項である．しかし，この形式は理論上考察の対象となり得るが，実際に無限にある x_{t-i} のウェイト α_i を推定することは不可能である．

一方，ラグ変数は有限時点のそれだけを導入することが考えられるが，この形式も推定に際して，データのいくつかを充分に利用し得ない点が残る．そこで，本稿においては上の近似として，

$$(1)\quad y_t=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i x_{t-i}+u_t \qquad (0<\lambda<1)$$

のような推定し得る最とも基本的な形式を考察の対象とする[1)]．

ラグ変数 x_{t-i} $(i=0, 1, \cdots)$ は変数 y_t の説明変数であり確定変数とし，確率変数 u_t は経済関係式（1）の攪乱項である．われわれは，問題を一般的にとり扱うために，u_t は，説明変数 x_{t-i} とは独立に，

$$(2)\quad u_t=\rho u_{t-1}+e_t \qquad (-1\leq\rho\leq1)$$

という一階のマルコフ過程に従っているものとする．さらに，確率変数 e_t について，

$$(3)\quad \begin{aligned} &\mathrm{E}(e_t)=0\\ &\mathrm{E}(e_t e_s)=\begin{cases}\sigma^2; & t=s\\ 0; & t\neq s\end{cases}\end{aligned}$$

と前提しよう．

さて，われわれは（1）の α, λ の推定量を得たいのであるが，（1）における説明変数は無限にあり，これを有限個のデータ（たとえば T 個とする）で推定することは不可能である．しかし，（1）を，

$$(4)\quad y_t=\alpha x_t+\lambda y_{t-1}+w_t, \qquad w_t=u_t-\lambda u_{t-1} \qquad (t=2, \cdots, T)$$

と変形することができ，したがって，われわれは（4）の α, λ の推定量を得ることを考えればよいのである[2)]．

1) 変数 z_{ti} の省略は本質的な問題に係わらない．

2) （1）を定数項 A を含むものとすれば（4）に定数項 $A(1-\lambda)$ が含まれる．変数 y_t, x_{t-i} を標本平均からの偏差と考えれば，（1），（4）に定数項を含めるか含めないかは，議論の本質的なものにはならない．

（4）は，形式的に，x_t, y_{t-1} を説明変数とし，y_t を被説明変数とする単純な方程式の推定を考えていることになるが，（4）における合成された攪乱項 w_t と説明変数の一つである y_{t-1} とが，かならずしも独立とはならない．すなわち，

$$(5)\quad \mathrm{E}\, y_{t-1} w_t = \mathrm{E}(\alpha \Sigma \lambda^i x_{t-1-i} + u_{t-1})(u_t - \lambda u_{t-1}) = (\rho - \lambda)\frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$$

が得られ，したがって最小二乗推定量に偏りが生ずることになる．いま，α, λ の最小二乗推定量を a, l とすると，

$$a = \frac{\Sigma y_t x_t \Sigma y_{t-1}^2 - \Sigma y_t y_{t-1} \Sigma x_t y_{t-1}}{\Sigma x_t^2 \Sigma y_{t-1}^2 - (\Sigma x_t y_{t-1})^2} = \alpha + \frac{\Sigma w_t x_t \Sigma y_{t-1}^2 - \Sigma w_t y_{t-1} \Sigma x_t y_{t-1}}{\Sigma x_t^2 \Sigma y_{t-1}^2 - (\Sigma x_t y_{t-1})^2}$$

$$l = \frac{\Sigma x_t^2 \Sigma y_t y_{t-1} - \Sigma x_t y_{t-1} \Sigma y_t x_t}{\Sigma x_t^2 \Sigma y_{t-1}^2 - (\Sigma x_t y_{t-1})^2} = \lambda + \frac{\Sigma x_t^2 \Sigma w_t y_{t-1} - \Sigma x_t y_{t-1} \Sigma w_t x_t}{\Sigma x_t^2 \Sigma y_{t-1}^2 - (\Sigma x_t y_{t-1})^2}$$

である．これより

$$(6)\quad \begin{aligned} plim\ a &= \alpha - (\rho - \lambda)\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{\mathrm{E}\, x_t y_{t-1}}{\mathrm{E}\, x_t^2\, \mathrm{E}\, y_{t-1}^2 - (\mathrm{E}\, x_t y_{t-1})^2} \\ plim\ l &= \lambda + (\rho - \lambda)\frac{\sigma^2}{1-\rho^2} \cdot \frac{\mathrm{E}\, x_t^2}{\mathrm{E}\, x_t^2\, \mathrm{E}\, y_{t-1}^2 - (\mathrm{E}\, x_t y_{t-1})^2} \end{aligned}$$

が得られ，最小二乗推定量の偏りは，$\rho \neq \lambda$ であるかぎり，存在するのである.[1)]

コイックは（4）で表現される方程式の推定に際して，一つの一致推定量を提示した.[2)] が，しかし，（2）における ρ が既知であるという仮定がなされており，つまり，（1）における攪乱項 u_t の自己相関パラメータが既知であるという前提のもとにコイックの方法は一致推定量が得られる．この前提はおそらく現実には満たされ得ないであろう．一方，クライン（Klein）はコイックの方法を他の接近から得られることを示し,[3)] さらに ρ が未知である場合に一般化した．しかし，クラインの提示した最尤推定法は一致性を

1）$\mathrm{E}\, x_t y_{t-1} = \alpha \Sigma \lambda^{i-1} \mathrm{E}\, x_t x_{t-i}$ であり，x に系列相関がなければ a の偏りはない．しかし，この場合でも l の偏りはある．Taylor, L. D. and Wilson, T. A.〔11〕p.330 参照.

2）Koyck, L. H.〔5〕pp. 36-37 参照.

3）Klein, L. R.〔4〕参照.

もたない場合があるという点からマランボー（Malinvaud）によって批判がなされ[1]，さらにその推定値を得る計算量の点からもクラインの方法を採用するには難点があると考えられる．

さて，経済時系列データで，大標本的特性である一致推定量を求めることに，その有意味性に対して批判がなされるが，一方，クロス・セクション・データとの混合されたデータを用いることを前提とすれば，一致推定量を追求することも大いに意義があると思われる．

次に考察するリヴィエタンの提示した操作変数法も，一致推定量を得るという点等から分布ラグ推定への貢献をなすものと考えられる．

リヴィエタンの提示した推定法で，（4）に適用する操作変数は，仮定によって，u_t，つまり w_t 等と独立な x_t，x_{t-1} である．したがって，x_t は，（4）における説明変数であるとともに，操作変数としても利用せられるのである．

α，λ の操作変数法（*Methods of Instrumental Variables*）による推定量を $\hat{\alpha}$，$\hat{\lambda}$ とすると，$\hat{\alpha}$，$\hat{\lambda}$ は次式の解である．

$$(7)\quad \begin{aligned} &\hat{\alpha}\sum x_t^2+\hat{\lambda}\sum y_{t-1}x_t=\sum y_t x_t \\ &\hat{\alpha}\sum x_t x_{t-1}+\hat{\lambda}\sum y_{t-1}x_{t-1}=\sum y_t x_{t-1} \end{aligned}$$

（7）において，$\hat{\alpha}$，$\hat{\lambda}$ が求まるためには，係数行列式が非ゼロでなければならない．

一方，この係数行列式は次のように変形できる．

$$\begin{aligned} &\sum x_t^2\sum y_{t-1}x_{t-1}-\sum x_t x_{t-1}\sum y_{t-1}x_t \\ &\quad=\sum x_t^2\cdot\sqrt{\sum x_{t-1}^2\cdot\sum y_{t-1}^2}\,(r_{y_{t-1}x_{t-1}}-r_{x_t x_{t-1}}r_{y_{t-1}x_t}) \\ &\quad=\sum x_t^2\cdot\sqrt{\sum x_{t-1}^2\sum y_{t-1}^2}\cdot\sqrt{1-r^2_{x_t x_{t-1}}}\cdot\sqrt{1-r^2_{y_{t-1}x_t}}\cdot r_{y_{t-1}x_{t-1}\cdot x_t} \end{aligned}$$

したがって，（7）の解が得られる条件は，

$$r^2_{y_{t-1}x_{t-1}\cdot x_t}>0$$

である．さらに，（7）における α，λ の一致性は，母偏相関係数 $\rho^2_{y_{t-1}x_{t-1}\cdot x_t}>0$ のもとに，次のように示すことができる．

$$(8)\quad plim\,\hat{\alpha}=plim\frac{\sum y_t x_t\sum y_{t-1}x_{t-1}-\sum y_t x_{t-1}\sum y_{t-1}x_t}{\sum x_t^2\sum y_{t-1}x_{t-1}-\sum x_t x_{t-1}\sum y_{t-1}x_t}$$

1）Malinvaud, E.〔8〕参照.

$$=\alpha+plim\frac{\Sigma y_{t-1}x_{t-1}\Sigma w_t x_t-\Sigma y_{t-1}x_t\Sigma w_t x_{t-1}}{\Sigma x_t^2\Sigma y_{t-1}x_{t-1}-\Sigma x_t x_{t-1}\Sigma y_{t-1}x_t}=\alpha$$

(9) $$plim\,\hat{\lambda}=plim\frac{\Sigma x_t^2\Sigma y_t x_{t-1}-\Sigma x_t x_{t-1}\Sigma y_t x_t}{\Sigma x_t^2\Sigma y_{t-1}x_{t-1}-\Sigma x_t x_{t-1}\Sigma y_{t-1}x_t}$$

$$=\lambda+plim\frac{\Sigma x_t^2\Sigma w_t x_{t-1}-\Sigma x_t x_{t-1}\Sigma w_t x_t}{\Sigma x_t^2\Sigma y_{t-1}x_{t-1}-\Sigma x_t x_{t-1}\Sigma y_{t-1}x_t}=\lambda$$

上で示された（7）の推定量は， 以下で示される二段階最小二乗法（*Two Stage Least Squares*）と恒等的に等しいということを証明できる[1]．つまり，

① y_{t-1} の x_t, x_{t-1} への最小二乗回帰方程式を求め，推定値 $\hat{y}_{t-1}$ を求める．

② y_t の x_t, $\hat{y}_{t-1}$ への最小二乗回帰係数を（4）の α, λ の推定値とする．

すなわち，

(10) $\hat{y}_{t-1}=b_0x_t+b_1x_{t-1}$

ここで， b_0, b_1 は，

(11) $$\begin{aligned}&b_0\Sigma x_t^2+b_1\Sigma x_{t-1}x_t=\Sigma y_{t-1}x_t\\&b_0\Sigma x_t x_{t-1}+b_1\Sigma x_{t-1}^2=\Sigma y_{t-1}x_{t-1}\end{aligned}$$

を満たす．

さらに，y_t の x_t, $\hat{y}_{t-1}$ への回帰式を求めるため，最小二乗正規方程式として，

(12) $$\begin{aligned}&\alpha^*\Sigma x_t^2+\lambda^*\Sigma\hat{y}_{t-1}x_t=\Sigma y_t x_t\\&\alpha^*\Sigma x_t\hat{y}_{t-1}+\lambda^*\Sigma\hat{y}_{t-1}^2=\Sigma y_t\hat{y}_{t-1}\end{aligned}$$

を得る． このとき，二段階最小二乗推定量 α^*, λ^* とリヴィエタンの推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\lambda}$ が等しい，つまり，

$$\alpha^*=\hat{\alpha},\qquad \lambda^*=\hat{\lambda}$$

が証明できる．

まず，(10)，(11) より，

(13) $\Sigma x_t\hat{y}_{t-1}=\Sigma x_t(b_0x_t+b_1x_{t-1})=b_0\Sigma x_t^2+b_1\Sigma x_t x_{t-1}=\Sigma x_t y_{t-1}$

(14) $\Sigma x_{t-1}\hat{y}_{t-1}=b_0\Sigma x_{t-1}x_t+b_1\Sigma x_{t-1}^2=\Sigma x_{t-1}y_{t-1}$

が得られ[2]，これらを利用して，(12) の第二式を次のように変形する．

---

1) このことはリヴィエタンは［5］で示唆している．

2) $\Sigma\hat{y}_{t-1}^2$ については，$y_{t-1}-\hat{y}_{t-1}=q$ とすれば，$\Sigma\hat{y}_{t-1}^2=\Sigma y_{t-1}^2-\Sigma q^2$ が得られる．

$$0=\Sigma(\alpha^* x_t+\lambda^*\hat{y}_{t-1}-y_t)\hat{y}_{t-1}=\Sigma(\alpha^* x_t+\lambda^*\hat{y}_{t-1}-y_t)(b_0 x_t+b_1 x_{t-1})$$
$$=b_0(\alpha^*\Sigma x_t{}^2+\lambda^*\Sigma\hat{y}_{t-1}x_t-\Sigma y_t x_t)+b_1(\alpha^*\Sigma x_t x_{t-1}+\lambda^*\Sigma\hat{y}_{t-1}x_{t-1}-\Sigma y_t x_{t-1})$$

ここで，(12) の第一式を利用すると，上式の第一項は 0 となり，したがって，

(12′) $\alpha^*\Sigma x_t x_{t-1}+\lambda^*\Sigma y_{t-1}x_{t-1}-\Sigma y_t x_{t-1}=0$

が得られ，α^*, λ^* は (12′) と (12) の第一式との連立方程式の解となるが，これは，(7) と同値であり，$\alpha^*=\hat{\alpha}$, $\lambda^*=\hat{\lambda}$ が得られる.

リヴィエタンの操作変数法を上で示せたように二段階最小二乗法と見れば，$\hat{y}_{t-1}$ の推定に x_t を利用し，さらに，$\hat{\alpha}$, $\hat{\lambda}$ の推定では，$\hat{y}_{t-1}$, x_t を説明変数として利用するのであるから，二段階目の独立変数間の相関が，多重共線性を引き起こすのではないかとの疑問が生ずる．しかし，この問題は，第一段階での $\hat{y}_{t-1}$ の回帰式の有意性と密接な関係がある.

いま，y_{t-1} の x_t, x_{t-1} への回帰式の決定係数は

(15) $$R^2_{y_{t-1}\cdot x_t x_{t-1}}=\frac{r^2_{y_{t-1}x_t}+r^2_{y_{t-1}x_{t-1}}-2r_{x_t x_{t-1}}r_{y_{t-1}x_t}r_{y_{t-1}x_{t-1}}}{1-r^2_{x_t x_{t-1}}}$$
$$=r^2_{y_{t-1}x_{t-1}\cdot x_t}(1-r^2_{y_{t-1}x_t})+r^2_{y_{t-1}x_t}$$

であり，第二段階での x_t, $\hat{y}_{t-1}$ との相関係数は，

(16) $$r^2_{x_t\hat{y}_{t-1}}=\frac{r^2_{y_{t-1}x_t}(1-r^2_{x_t x_{t-1}})}{r^2_{y_{t-1}x_t}+r^2_{y_{t-1}x_{t-1}}-2r_{x_t x_{t-1}}r_{y_{t-1}x_t}r_{y_{t-1}x_{t-1}}}$$

となる．したがって，

$$r^2_{x_t\hat{y}_{t-1}}=\frac{r^2_{y_{t-1}x_t}}{R^2_{y_{t-1}\cdot x_t x_{t-1}}}$$

となり，これより明らかになるのは，第一段階での推定式の有意性が高ければそれだけ，第二段階での推定に際して，説明変数間の相関は小さくなるといえる．そして，第一段階での有意性は，y_{t-1} と x_{t-1} との偏相関に依存している.

次に，第二段階での決定係数を導出しておこう.

(17) $$R^2_{y_t\cdot x_t\hat{y}_{t-1}}=r^2_{y_t\hat{y}_{t-1}\cdot x_t}(1-r^2_{y_t x_t})+r^2_{y_t x_t}=\frac{(r_{y_t\hat{y}_{t-1}}-r_{y_t x_t}r_{\hat{y}_{t-1}x_t})^2}{1-r^2_{\hat{y}_{t-1}x_t}}+r^2_{y_t x_t}$$

ここで,

$$(18)\quad r_{y_t\hat{y}_{t-1}}=\frac{(r_{y_{t-1}x_t}-r_{y_{t-1}x_{t-1}}r_{x_tx_{t-1}})r_{y_tx_t}+(r_{y_{t-1}x_{t-1}}-r_{y_{t-1}x_t}r_{x_tx_{t-1}})r_{y_tx_{t-1}}}{(1-r^2_{x_tx_{t-1}})R_{y_{t-1}\cdot x_tx_{t-1}}}$$

である. さらに, (16), (17), (18) より, われわれは,

$$(19)\quad R^2_{y_t\cdot x_t\hat{y}_{t-1}}=R^2_{y_t\cdot x_tx_{t-1}}$$

を導出することができる.

(17) より, 二段階最小二乗法による推定式の有意性は, y_t と $\hat{y}_{t-1}$ との偏相関に依存しているといえる.

また, (19) で, 示されることは, 二段階最小二乗法による推定式の決定係数の値は, いま, y_t の x_t, x_{t-1} への回帰方程式の決定係数の値と恒等的に等しい, ということである. 真の関係式 (1) において, つまり,

$$y_t=\alpha x_t+\alpha\lambda x_{t-1}+(\alpha\lambda^2x_{t-2}+\cdots\cdots+u_t)$$

で, 右辺第三項以下の諸変数の和を合成された攪乱項と見做して,

$$y_t=a_0x_t+a_1x_{t-1}+v_t$$

として, これを最小二乗法で推定する. このとき, 説明変数の説明力と, 先の二段階最小二乗法による y_t の説明変数 x_t, y_{t-1} との説明力とは同じである. しかし, ここで注意しなければならないのは, 上の a_0, a_1 を, α および $\alpha\lambda$ の推定量とはできない, ということである.

(1) の関係式での母数, α, λ の推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\lambda}$ は一致性という一つの大標本的特性を有しているが, その推定量の分散についての保証はない. つまり, 操作変数法による推定では, 通常, 推定量の分散が大きくなると予想されている. 一方, 最小二乗法は, 先述のように一致性を持たないが, 推定量の分散が最小であるという有効性を保持している. したがって, 用いられるデータの数や性質から, 操作変数法を適用するか, 最小二乗法でよいのかを決定しなければならない. さらに, 操作変数法による推定量と最小二乗法による推定量との差を検討することも興味ある統計学的対象となる.

リヴィエタンは上のモデルで $\lambda=\rho$ の場合のこれら二つの推定量の 有意差検定の方法を明らかにしている. この検定の帰無仮説は,

〔H〕最小二乗法によって一致推定量を得る.

であり，したがって操作変数法または二段階最小二乗法を用いるまでに，有効性を保持する最小二乗法を検討してみることになる．最小二乗法と二段階最小二乗法との有意な差異がなければ，有効性のある最小二乗法を放棄する必要はないとも言えるからである．

いま，

(20) $b=\begin{bmatrix} a \\ l \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} \quad d=B-b$

とし，b, B の漸近分散共分散行列を V_1, V_2 とすると，

(21) $V_1=\dfrac{\sigma^2}{T}\, plim\, T\begin{bmatrix} \sum x_t^2 & \sum x_t y_{t-1} \\ \sum x_t y_{t-1} & \sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1}, \quad V_2=\dfrac{\sigma^2}{T}\, plim\, T\begin{bmatrix} \sum x_t^2 & \sum x_t \hat{y}_{t-1} \\ \sum x_t \hat{y}_{t-1} & \sum \hat{y}_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1}$

であり，$\rho=\lambda$ より，$w_t=e_t$ となり，σ^2 は仮定によって e_t の分散である．

一方，b, B は同一のデータから導出された推定値だから互いに独立でない．しかし，d の分散共分散行列 V_d は，ダービン（Durbin）によれば，次のようになる．

(22) $V_d=V_2-V_1$

V_d は正則とならないので，V_d の対角要素を V_{d1}, V_{d2} とすれば，

$$\frac{|\hat{\alpha}-a|}{\sqrt{V_{d1}}}\equiv\frac{|\hat{\lambda}-l|}{\sqrt{V_{d2}}}$$

が得られ，漸近的に，

(23) $\dfrac{|\hat{\lambda}-l|}{\sqrt{V_{d2}}}\sim N(0,\ 1)$

となる．これより，先の検定を行なうのである．

§2 分布ラグモデルの経済的意味

この節において，先に考察した分布ラグモデルの形式

(24) $y_t=\alpha+\beta\sum\lambda^i x_{t-i}+u_t$

の経済学的意味を考察しよう．

いま (24) を行動方程式と解し，x_{t-i} を反応の結果 y_t を誘引する動機となる要因として見ることができる．つまり，y_t を体系内の変数，x_{t-i} を外生変数と見る．したがって，y_t は x_{t-i} に依存して反応の結果，あるいは行動様式に従って決定される変数とす

る．言いかえれば（24）はその反応のメカニズムあるいは行動様式を表現している．たとえば，ある財の価格 x_{t-i} に応じてその財の需要が（24）に従って決定される場合，あるいは，個人の所得，もしくは経済全体の国民所得 x_{t-i} の関数として消費額 y_t をとらえる場合である．

問題を単純化して，考察中の体系で，長期にわたり，x_t の水準が一定であるとする．この場合，一定の行動様式に従って，y_t の水準は不変にとどまるであろう．つまり長期間ある個人の所得額が不変の場合，それに応ずる消費水準も一定不変であろう．その消費水準を変更する要因はほとんどないと考えられるからである．しかし，一定不変の所得水準の高さに応じて，その消費水準が異なることは当然であろう．

さて，上のような状況のもとに，ある時点で x の水準が上昇し，それ以後上昇したままの水準にとどまるとする．この場合，x の上昇に従い y の水準の変化は当然生ずるであろうが，一挙に新しい均衡水準に上昇（下落）するというより，その新しい水準に徐々に接近していくと考えられる．先述の例で言えば，ある個人の所得水準が一定不変であり，ある時点で，その所得水準が高くなり，以後上昇した水準が続く場合，高くなった所得水準に応じた消費水準にただちに反応するというより，徐々にその均衡消費水準に近づいてゆくと考えられる．

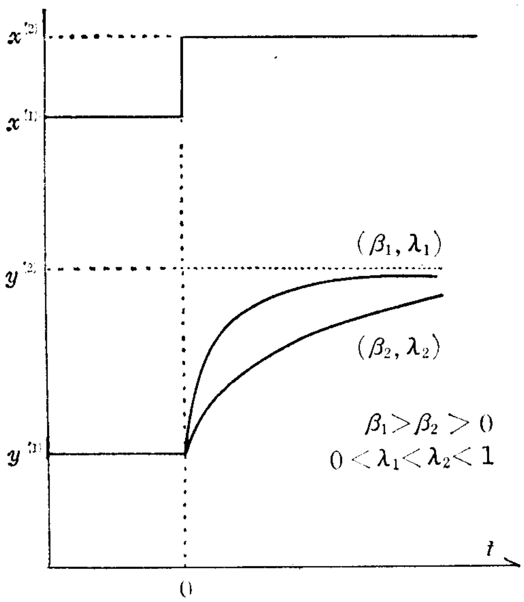
このように，新しい均衡水準にただちに反応し行動するというよりも，遅れを伴なって徐々にその均衡水準に至ると考えられる理由として，コイックに従えば[1)]，客観的理由として，技術的・制度的理由，主観的理由として，習慣的・心理的理由を挙げることができる．また経済の巨視的分析においては，x_t の変化の情報が充分ゆき渡っていないような状況で，その情報が広がるにつれ均衡に至ると考えられるであろう．

以上のように，x_t の水準の変化に一定の遅れを伴なって y_t の水準が反応すると考えた場合，さらに問題となるのは，新しい均衡水準に至る時間径路のタイプであろう．図—1および図—2は（24）において，ρ, λ の相違によって，その y_t の均衡水準に至る相違を図示したものである．いずれの図においても，

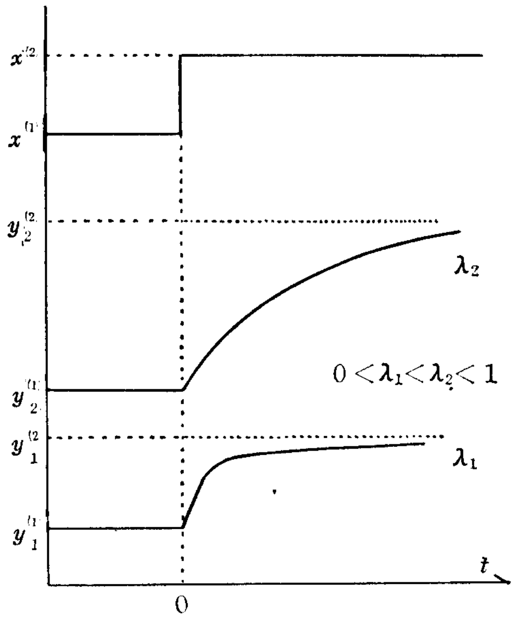
$$x_t = x^{(1)} \qquad (t<0)$$
$$x_t = x^{(2)} \qquad (t \geqq 0)$$

1) Koyck, L. H.〔5〕p.6 参照．

と仮定している．図—1 では，$t<0$ で y_t の水準が等しいが，β, λ の相違によって，x_t の水準の変化に伴う y_t の時間径路のタイプの相違を表わしている．図—2 においては，βは等しいが，λ の相違によって，それぞれの y_t の時間径路の相違を図示したものである.[1)]



図—1



図—2

上で述べたように，動学的な観点を導入する分布ラグモデルを消費関数に適用した場合を考えよう．以下でわれわれが考察する消費関数は，

$$(25)\quad C_t=\alpha+\beta\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i Y_{t-i}+u_t$$

である．ここで，Y_{t-i} は外生変数と見做される所得水準であり，この遅れのある変数 Y_{t-i} で消費水準 C_t を説明する．

上の考察からも明らかなように，(25) において，短期の限界消費性向は，

$$\frac{\partial C_t}{\partial Y_t}=\beta$$

1) $y_1^{(1)}=\dfrac{\beta}{1-\lambda_1}x_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}=\dfrac{\beta}{1-\lambda_2}x^{(1)}$ であり，$0<\lambda_1<\lambda_2<1$ より明らかに $y_1^{(1)}<y_2^{(1)}$ である．また $x^{(2)}$ 対応する y を，$y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$ で示しているが $\lambda_1<\lambda_2$ より，$y_2^{(2)}-y_2^{(1)}>y_1^{(2)}-y_1^{(1)}$ が導出できる．

であり，長期の限界消費性向は (25) において Y_{t-i} をすべて一定水準 $\bar{Y}$ として，

$$\frac{\partial C_t}{\partial Y}=\frac{\beta}{1-\lambda}$$

と得られる．われわれは，(25) の消費関数を，各期の所得の水準に依存して遅れを伴なって消費水準が決定されるような行動様式，したがって，過去のすべての所得水準が現行の消費水準に影響を与えるような消費関数を考察している．が，一方，ナーラヴ (Nerlove)，クライン，あるいはフリードマン (Friedman) 等の消費行動仮説を (25) の消費関数を使って次のように解釈できる．

消費水準 C_t は，期待所得 Y_t^* の関数であって

(26) $C_t=\alpha+\beta_0 Y_t^*+u_t$

と仮定する．さらに，期待所得 Y_t^* の調整関数として，

(27) $Y_t^*-Y_{t-1}^*=\mu(Y_t-Y_{t-1}^*)$

を導入する．上の二式において Y_t^* は，$t-1$ 期の時点で（あるいはそれ以前において）予想する t 期の期待所得であり，Y_t は現実の所得である．(27) より，

$$Y_t^*=\mu\sum(1-\mu)^i Y_{t-i}$$

が得られ，これと (26) より，$\beta_0\mu=\beta$, $1-\mu=\lambda$ とすれば (25) が得られる．

また，(25) を

(28) $C_t=\alpha(1-\lambda)+\beta Y_t+\lambda C_{t-1}+(u_t-\lambda u_{t-1})$

と変形できるが，ブラウン (Brown) の解釈では[1]，(28) そのものを消費関数と見做す．したがって今期の消費水準は今期の所得とともに，前の消費水準にも影響される．つまり消費の習慣は持続すると考え，その効果を計測するため，消費関数に前期の消費額を説明変数として導入するのである．

われわれが以下で推定するモデルは，

$$(25)\quad \begin{aligned}&C_t=\alpha+\beta\sum_{i=0}^{\infty}Y_{t-i}+u_t\\&u_t=\rho u_{t-1}+e_t,\qquad e_t\sim N(0,\ \sigma^2)\end{aligned}$$

である．そして，実際に推定する際は，

1) Brown, T. M. 〔1〕参照.

(28) $C_t = A + \beta Y_t + \lambda C_{t-1} + w_t, \qquad A = \alpha(1-\lambda), \qquad w_t = u_t - \lambda u_{-1t}$

を利用する.

§3 用いられるデータについて

以下で，われわれは実際のデータを用いて消費関数を推定する. 用いるデータは，昭和39年および40年の「貯蓄動向調査」であり，この調査で採用されている貯蓄の概念と調査方法 調査範囲等については，「貯蓄動向調査年報」に詳細に記されている. われわれは以下で，消費をこの報告での所得と貯蓄の差として把握している.

さて，現在，計量経済学的研究の大半は時系列データによっているが，その際におこる問題点が，われわれが用いるクロス・セクション・データでは比較的それらの問題点を回避し得る点を若干考察しておこう.

まず，上で述べたクロス・セクション・データの顕著な利点は多数標本であるということであろう. 通常時系列データの標本数は年時系列で15～20，四半期時系列で40～60程度であり，標本数が少ないことは推定値を不安定にしやすい. これに反して，クロス・セクション・データの標本数は数百以上であり，有意な係数の推定値は安定的である場合が多い. 次に，時系列データの場合，説明変数と攪乱項の相関が強いと考えられるケースが多くある. 以下で推定するように所得 Y が，反応方程式，あるいは行動方程式としてみれる消費関数を通じて消費 C を決定する. そして C を決定する大きな要因は所得 Y であると考えられるが，所得以外の C を決定する要因を攪乱項 u に含ましめている. この場合，経済全体の時系データを利用すると，国民所得自体が経済体系の一部として他の変数によって影響され，決定されるという関係が考えられる. これは上のモデルでいえば，消費 C の説明変数としての所得 Y は攪乱項 u によって影響されることを意味する. このように考えれば，説明変数と攪乱項とが独立であるという前提は満たされない. この場合には，最小二乗推定値は不偏性と一致性を満たさないので，これらの統計学的特性をもつ推定値を得るためには，連立方程式体系での推定法を適用することを考えねばならない. これに反しクロス・セクション・データーを利用する場合，たとえば，多くの家計の所得はほぼ確定しており，時系列データの場合のように，攪乱項との相関が強いというのではなく，個々の家計のランダムな要因として攪乱項を消費

関数に含ましめ得る.

消費関数の推定に際して，説明変数として所得の他に流動資産残高を含める場合，時系列データでは，所得と流動資産残高との間に強い相関関係が存在するケースが多い．データにこの多重共線性の起こる場合，係数の推定値は非常に不安定になる．クロス・セクション・データでは多重共線性に関する問題点も改善される場合が多い．つまりクロス・セクション・データでの標本数の増大によって，個々の所得階層に応じて流動資産残高の水準が低い家計から高い家計へとデータが広がり，データ全体には所得と流動資産残高とに一定の関係があると見られないことになる．一方，時系列データの場合には，個々の所得水準のそれに応じて，ほぼ一定の流動資産残高の水準が対応し，データ全体として，所得と流動資産残高とに一定の関係があると見なければならないことが多い.

上に述べたように，時系列データに比してクロス・セクション・データを利用する利点があるが，われわれの採用するデータは次の基準によって，もとの標本からさらに選択されている.

(1) 勤労者世帯の家計報告のみとり挙げる.

(2) 2年を通じて報告のある標本.

(3) 家計1人当りの年間所得が20万円以下および家計人員1人あたり年間消費が5万円以下の家計は除く.

(4) 年初流動資産残高が負または，80万円以上の家計を除く．さらに年間所得140万円以上も除く.

(1) の理由は，勤労者世帯の消費行動と，農家・自由業・自営業主・法人役員・無職等の家計の消費行動とは異なると考えられるからである[1)]．(2) は，われわれが推定しようとしている消費関数は分布ラグモデルによるそれであり，すでに明らかなように，二年間通じてのデータが必要であるからである．(3) を考慮した理由は，1人あたり年間消費が5万円以下の家計というのは報告自体に誤りがあると考えられるし，さらに年間所得が20万円以下の家計は勤労者世帯の中でも無職の家計に近く，消費行動に関して他の家計

1) われわれが利用する「貯蓄動力向調査」にはもともと農林漁家および単身者世帯は調査対象から除かれている.

とは同質と見られないからである.

(4) をとりあげた理由は，いま，(1)〜(3) を満たす家計の標本は439個である．そのうち年間所得140万円以上の家計は30個，年初流動資産残高80万円以上の家計は72個であるが，その水準の広がりに比して非常にデータの個数が小さい．さらに，それ等のデータを所得水準と流動資産残高水準との2元分類した場合，両方の高い水準の部分で多重共線性があると見られる．先述のように，個々の所得水準に応じて，流動資産の高い水準から，低い水準までデータの広がりがあって，データに多重共線性がない範囲を選択しているのである．また，流動資産残高が負である家計の報告を除くのも，このような家計と他の家計とは同質と考えられないからである.

§4　分布ラグ消費関数の計測

前節で挙げた標本選択の基準を満たす標本は353個であり，これらのデータにもとづいて推定した結果，先の (28) に対応する推定式は次のように得た.

最小二乗法では，

$$(29)\quad \underset{(18.9)}{C=28.9}+\underset{(0.028)}{0.761\,Y}+\underset{(0.030)}{0.126\,C_{-1}}+w \qquad s=111.5 \qquad R=0.879$$

であり，Y_{-1} を操作変数とする操作変数法では，

$$(30)\quad \underset{(19.8)}{C=38.2}+\underset{(0.032)}{0.783\,Y}+\underset{(0.041)}{0.082\,C_{-1}}+w \qquad s=111.8 \qquad R=0.878$$

である.[1)2)] ここで，先の節で考察したりリヴィエタンの検定方法によれば，上の最小二乗推定値と操作変数法推定値には有意な差はないと考えられる[3)].

われわれは勤労者世帯の家計の消費関数を推定しているが，攪乱項について，分散の不均一性を考慮しなければならないと思われる．これは特に，クロス・セクション・データを利用する際に注意しなければならないことであるが，消費関数の中で攪乱項の分

1) 以下クロス・セクション・データによる推定式ではすべて単位は1000円である.

2) $C=C_t$, $Y=Y_t$, $C_{-1}=C_{t-1}$ の意味であり，以下このような記号法を用いる.

3) (29), (30) における (23) に対応する統計量は，$\dfrac{|\hat{\lambda}-l|}{\sqrt{V_{d2}}}=1.57$ であった.

散について，低い所得層の分散より，高所得層の分散がより大きいと考えられるからである．すなわち，高所得層の家計は相対的に多額の消費をなし得るが，それと同時に消費の変動幅が低所得層の消費の変動範囲より大きい可能性がある．

われわれは以下の推定で，攪乱項についてその分散が所得 Y の2乗に比例するものと想定する．この場合，(28) は，

$$(31)\quad \frac{C}{Y}=\alpha(1-\lambda)\frac{1}{Y}+\beta+\lambda\frac{C_{-1}}{Y}+w$$

として，(31) の攪乱項に関しては以前のままの前提でとり扱うことができる[1]．

前節で標本選択の基準を考えるとき，標本の同質性を問題にした．家計の消費関数を推定する際の基本的な仮定は，各家計が同一の効用関数を持つということである．このためわれわれは全家計の標本を利用するのではなく，勤労者家計を採用したのである．しかし，さらに各家計の同質性を問題にするとき，その消費関数の中で家計の構成人数も考慮すべきであると考えられる．したがって，われわれは，家計の構成人数，すなわち家計人数 N をも説明変数に加えることにする．

上のように考えると，われわれの推定すべき消費関数は，

$$(32)\quad \frac{C}{Y}=\alpha(1-\lambda)\frac{1}{Y}+\beta+\lambda\frac{C_{-1}}{Y}+\sigma N+w$$

となる．この場合，短期の限界消費性向 $SMPC$，および，長期の限界消費性向 $LMPC$ はそれぞれ，

$$SMPC=\beta+\sigma N$$

$$LMPC=\frac{\beta+\sigma N}{1-\lambda},$$

となることに注意しなければならない[2]．

上の (32) による推定の結果，最小二乗法では，

---

1) より厳密には $w=u-\lambda u_{-1}\cdot\dfrac{Y_{-1}}{Y}$ となるが，われわれは，これの近似として，以前の定式化と同様に $w=u-\lambda u_{-1}$ として扱うことにする．

2) (32) とは異なり，

$$(32')\quad \frac{C}{Y}=\alpha(1-\lambda)\frac{1}{Y}+\beta+\lambda\frac{C_{-1}}{Y}+\sigma\frac{N}{Y}+w$$

とした場合，限界消費性向は家計人数とは独立である．しかし，われわれは (32) の方がより現実妥当的であるように考える．

$$(33)\quad \frac{C}{Y}=\underset{(14.9)}{31.2}\frac{1}{Y}+\underset{(0.044)}{0.737}+\underset{(0.025)}{0.099}\frac{C_{-1}}{Y}+\underset{(0.007)}{0.011}N+w \qquad s=0.158 \quad R=0.270$$

であり，$\frac{Y_{-1}}{Y}$ を操作変数とする操作変数法では，

$$(34)\quad \frac{C}{Y}=\underset{(15.5)}{37.5}\frac{1}{Y}+\underset{(0.044)}{0.748}+\underset{(0.032)}{0.070}\frac{C_{-1}}{Y}+\underset{(0.007)}{0.011}N+w \qquad s=0.158 \quad R=0.263$$

である.

(33)，(34) の推定式の意味を検討してみよう．最小二乗法による短期の限界消費性向 $SMPC_1$，操作変数法による短期の限界消費性向 $SMPC_2$ はそれぞれ，

$$SMPC_1=0.737+0.011\,N$$

$$SMPC_2=0.748+0.011\,N$$

である．したがって，短期の限界消費性向はいずれの推定法によっても，家計人員が1人増すごとに0.011増加することがわかる．いま，家計人数が4人である平均的な家計の場合，短期の限界消費性向は点推定で，0.780あるいは0.794である[1]．さらに係数推定値の標準誤差を考慮して，短期の限界消費性向の信頼係数95％の信頼区間を計算すると，最小二乗推定の場合は，(0.725；0.835) であり，操作変数法推定の場合は，(0.736；0.852) と得られる．また，点推定で，長期の限界消費性向は (33) では0.865であり，(34) では0.854と計算することができる.

一方，分散の不均一性を仮定しないで，家計人数を考慮した (28) の形で推定した結果では[2]，短期の限界消費性向は0.755あるいは，0.776と得られ，長期の限界消費性向は0.864あるいは0.843となり，非常にわずかであるが，分散の不均一性を前提した場合よりも低い推定値が得られた.

周知のように，消費水準を説明するいろいろな仮説が提示されているが，それらは，消費関数の形状と同時に消費関数のシフト要因を説明しているとも考えられる．トービンの流動資産仮説によれば，同一の所得水準であっても流動資産保有高の相違で，消費水準の違いは起こり得る．上でわれわれが推定した消費関数においては，流動資産保有

1) (32′) のように推定した場合，短期の限界消費性向は，0.777あるいは0.791とほとんど変らぬ結果を得た.

2) つまり $C=\alpha(1-\lambda)+\beta Y+\lambda C_{-1}+\sigma N+w$.

高が消費水準にどれ位の影響を与えるかは明らかではない．以下で，年初流動資産現在高 L をも説明変数として加えた消費関数を推定したい．

推定の結果，最小二乗法では，

$$(35)\quad \frac{C}{Y}=\underset{(14.9)}{31.1}\frac{1}{Y}+\underset{(0.045)}{0.722}+\underset{(0.025)}{0.097}\frac{C_{-1}}{Y}+\underset{(0.029)}{0.041}\frac{L}{Y}+\underset{(0.007)}{0.011}N+w \qquad s=0.158 \quad R=0.274$$

であり，操作変数法では，

$$(36)\quad \frac{C}{Y}=\underset{(15.5)}{37.8}\frac{1}{Y}+\underset{(0.046)}{0.733}+\underset{(0.032)}{0.066}\frac{C_{-1}}{Y}+\underset{(0.030)}{0.043}\frac{L}{Y}+\underset{(0.007)}{0.011}N+w \qquad s=0.158 \quad R=0.267$$

と得られた．これらの推定された方程式よりわかることは，流動資産残高1単位の増加によって消費水準の増加額は点推定で0.041あるいは0.043であるが，その信頼区間は標準誤差が大きいため負の値をも含むことには注意しなければならない．また，流動資産残高の効果を消費関数に含めた場合，それを考慮しない消費関数よりも，限界消費性向に関しては0.02程度低く推定されている．

一方，(35)，(36) とは異なって分散の不均一性を考慮しない消費関数の推定では，標準誤差が大きく信頼区間に正の値を含むが，流動資産効果の点推定は負となった．また，この場合に，短期の限界消費性向は，(35)，(36) において平均的な家計人数が4人の場合のそれと変らない結果であり，長期の限界消費性向については0.02～0.03程度高く推定された．

§5　時系列データによる推定との比較

前節までで，われわれは分布ラグ消費関数のクロス・セクション・データによる推定を行ない，特に，短期の限界消費性向と長期の消費性向が実際にどのような値をとるかに注目してきた．これらの推定結果は，アメリカの *Surveys of Consumers Finances*, *Ford Panel Study* およびイスラエルの *Israel Reinterview Savings Survey* の3種のクロス・セクション・データを用いたリヴィエタンの消費関数の推定結果[1)]とほぼ同様の値を示している．これは，上で得た結果がクロス・セクション・データによる消費関数の推定値と

---

1) Liviatan, N.〔7〕参照．ただし，リヴィエタンは分散の不均一性を考慮していない．

して妥当し得るものと思われる.

一方，クロス・セクション・データによる分布ラグ消費関数と，時系列データによるそれとの比較のために，昭和30年〜43年の時系列データによってわれわれが行なった消費関数の推定結果を次に示しておこう.

まず，最小二乗法によっては，

$$(37)\quad C=3.84+\underset{(1.52)}{}\underset{(0.095)}{0.498}\,Y+\underset{(0.133)}{0.399}\,C_{-1}+w \qquad s=1.34 \quad R=0.999$$

また，操作変数法によっては

$$(38)\quad C=3.88+\underset{(1.84)}{}\underset{(0.129)}{0.503}\,Y+\underset{(0.181)}{0.391}\,C_{-1}+w \qquad s=1.41 \quad R=0.999$$

を得た.[1] (37)，(38)において Y, C は国民所得統計の可処分所得，消費を消費財デフレーターで除した実質国民所得，消費水準を表わす変数である.[2]

上に示した時系列データによる分布ラグ消費関数による推定の結果，短期の限界消費性向は点推定で0.498あるいは0.502であり，長期の限界消費性向は0.829あるいは0.825である.[3] これからすでに明らかなように，短期の限界消費性向は，クロス・セクション・データによる結果とはかなりの違いがある．さらに長期の限界消費性向については，わずかに低いだけであるが，C_{-1} の係数推定値には大きな違いが見られる.

先に示したように，攪乱項に系列相関がある場合，最小二乗法による推定値の偏りがあることは明らかである．しかし，上の(37)，(38)の結果より最小二乗推定値と操作変数法推定値に大きな違いはない.[4] 上の推定結果は，いずれの推定法によっても推定値の標準誤差の大きいことからみて，少数標本による推定値の不安定性が現われているとも考えられるし，また，経済全体を同時に把握しようとする連立方程式体系での推定法を採っていないという欠点をもっているとも考えられる．しかし，上に得た推定結果からクロス・セクション・データによる分布ラグ消費関数推定と時系列データによるそれ

---

1) 時系列データによる場合，分散の不均一性を考慮する根拠はないように思われる.

2) 単位は昭和40年の消費財価格表示の千億円である.

3) 先の図—1において，クロス・セクション・データの場合は (β_1, λ_1) に，時系列データの場合は (β_2, λ_2) に対応していると見ることができる.

4) 参考のためにあげるならば，(37)，(38) において $\dfrac{|\hat{\lambda}-l|}{\sqrt{V_{d2}}}=0.12$ である.

との間にかなりの推定値の相違が認められるのである．

この相違はまずデータの性質の違いに依ると考えられる．すなわち，われわれが用いたクロス・セクション・データは勤労者家計の個々の標本であり，時系列データは全経済体系内の観測値の集計量であり，これら二つのデータの性質は異なると考えられるからである．これを，さらに推定の問題として把握すると，時系列データには多重共線性があること，また操作変数とした所得 Y 及び遅れのある所得 Y_{-1} が攪乱項と相関関係にあること等が考えられるのである．したがって，これらの問題を考慮した推定をしなければならない，と言えるであろう．

以上クロス・セクション・データによる分布ラグ消費関数の計測を行い，時系列データとの若干の比較検討をした．時系列データを利用しての推定法を明らかにすると伴に[1)]，上に考察したようなクロス・セクション・データと時系列データとによる推定値の相違を説明し得る理論を見いだすことは，経済学の実証研究における大きな課題の一つであると思われる．

参 考 文 献

1. Brown, T. M., "Habit persistence and Lags in Consumer Behaviour", *Econometrica*, July,1952, pp.355–71.
2. Dhrymes, P. J., "Efficient Estimation of Distributed Lags with Autocorrelated Errors," *International Economic Review*, February, 1969, pp.47–67.
3. Griliches, Z., "A Note on Serial Correlation Bias in Estimates of Distributed Lags," *Econometrica*, January, 1961, pp.65–73.
4. Klein, L. R., "The Estimation of Distributed Lags," *Econometrica*, October, 1958, pp.553–65.
5. Koyck, L. H., *Distributed Lags and Investment Analysis*, (Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1954).
6. Liviatan, N., "Consistent Estimation of Distributed Lags," *Internotional Economic Review*, January, 1963, pp.44–52.

1) Dhrymes, P. J. 〔2〕の提示した一つの最尤法は時系列データによる推定法として興味あるものと思われる．

7. Liviatan, N., "Estimates of Distributed Lag Consumption Functions from Cross Section Data," *Review of Economics and Statistics*, February, 1965, pp. 44–53.
8. Malinvaud, E., "The Estimation of Distributed Lags; A Comment," *Econometrica*, July, 1961, pp. 430–33.
9. Sargan, J. D., "Estimation of Economic Relationships Using Instrumental Variables," *Econometrica*, July, 1959, pp. 443–67.
10. Sargent, Y. J., "Some Evidence on the Small Sample Properties of Distributed Lag Estimators in the Presence of Autocorrelated Disturbances," *The Review of Economics and Statistics*, 1968, pp. 87–95.
11. Taylor, L. D. and Wilson, T. A., "Three-Pass Least Squares: A Method for Estimating Models with A Lagged Dependent Variable," *The Review of Economics and Statistics*, November, 1964, pp. 329–46.
12. 総理府統計局，貯蓄動向調査年報，昭和40年（東京：総理府統計局）.