効率性と価格について

福尾洋一

§1　はじめに

″資本蓄積と効率的資源配分″という題名の Malinvaud の論文［7］は，最適資本蓄積といった現代的問題との関連から言っても示唆に富んだものであるが，そのことを別にしても，それ自体多くの興味ある概念と帰結を含んでいる．きわめてしばしば参考にされる文献であり，その発展の最近の成果は，例えば，Kurz や Starrett の論文［5］［6］［11］の中に見ることができる．広範囲に及ぶ Malinvaud の問題意識を一言で言おうとするならば，それは十分長い時間長を考慮した場合の競争均衡と効率性の問題であると理解することができよう．競争経済においては効率性の利点がとりわけ強調されるわけであるが，一体，効率的であるということと売上最大とか利潤最大ということはどのような関係にあるのであろう．（1）効率的生産活動に対しては，売上を最大ならしめるようなある適当な相対価格系が存在するとか，（2）その相対価格系の下では，投入と産出を適当に組み合せることによって利潤最大と費用最小を実現することができるといった静学の命題は，十分長い時間を考慮する動学―そこでは資本蓄積という複雑な問題がはいってくる―においても主張することができるであろうか．

本稿では，このようなかれの問題について，その一部をできるだけ厳密に整理すると共に，かれのモデルに内在すると思われるいくつかの疑問点を提起する．そして今度は，これら疑問点を少しでも解消すべく，同じ問題を再検討する．

§2では，Malinvaud 生産技術の諸特徴を述べる．§3では，いわゆる nontightness の仮定に言及する．§4では，有限時間長の場合について，効率

性と価格の問題を考える．§5では，同じ問題を無限時間長の場合について考察する．§6では，§5までにおいて整理された Malinvaud モデルについて，モデルに内在していると思われる疑問点を指摘する．§7では，Malinvaud の問題を再検討する．§8では，§7で得た帰結について，1つの例を挙げる．McFadden の論文[9]が随時参照される．§9はむすびに充てられる．

§2　生産可能性集合

この§では，Malinvaud 生産技術のいくつかの特質を述べると共に，いくつかの言葉を定義する．

自然数全体の集合を N, 実数全体の集合を R^1, 非負実数全体の集合を Ω^1 とする．R^1 及び Ω^1 に対して，任意自然数 ν 個の直積を R^ν 及び Ω^ν と書く．R^ν に線型演算を導入することによって，R^ν はベクトル空間を形成する．このとき，Ω^ν は R^ν の部分ベクトル空間となる．今後は，部分ベクトル空間についても単に部分空間と言うことにする．

R^ν の任意の2つの要素を

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix}, \qquad x'=\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x'_\nu \end{bmatrix}$$

とするとき，その内積を xx' と書き，

$$xx'=\sum_{i=1}^{\nu} x_i x'_i$$

によって定義する．また，要素 x について，そのノルムを $\|x\|$ と書き，時に応じて，

$$\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\nu}|x_i|^2}$$

あるいは，

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{\nu}|x_i|$$

のいずれかによって定義する．

財の個数を n（自然数）とし，所与不変であると仮定する.[1] そうすれば，Ω^n は財ベクトル空間と言うべきものである.

時刻を t で表わす．ここでは離散的時刻を採用し，すべての時刻を自然数で表示する．かくして，すべての t について，$t \in N$ である．生産に要する時間，すなわち，投入から産出を得るに要する時間は1単位時間とする．つまり，時刻 t の投入は時刻 $t+1$ に産出をもたらす.

時刻 t における投入と産出は Ω^n の要素であるが，それを

$$a_t = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{nt} \end{bmatrix}, \qquad b_t = \begin{bmatrix} b_{1t} \\ b_{2t} \\ \vdots \\ b_{nt} \end{bmatrix}$$

で表わす．時刻 t の消費を c_t，純産出 $b_t - a_t$ を y_t とおくと，

$$c_t = \begin{bmatrix} c_{1t} \\ c_{2t} \\ \vdots \\ c_{nt} \end{bmatrix}, \qquad y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1t} - a_{1t} \\ b_{2t} - a_{2t} \\ \vdots \\ b_{nt} - a_{nt} \end{bmatrix}$$

を意味する．時刻 t における可能外生資源供給の集合を Z_t とする．時刻 t に供給される外生資源は Z_t の要素であって，それを

$$z_t = \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \\ \vdots \\ z_{nt} \end{bmatrix}$$

と書く．始発時刻1の産出 b_1 は所与であって，$b_1 = \bar{b}_1$ としておく.

当モデル経済における物的均衡条件は，

$$(\forall t) : c_t + a_t = z_t + b_t,$$ [2]

あるいは，

$$(\forall t) : c_t = y_t + z_t$$

によって与えられる.

1) “財” とは財及び用役を意味する.

2) （$\forall$～）は “すべての～に対して” と読む.

投入 a_t とその投入から技術的に生産可能な産出 b_{t+1} との組を $(a_t,\ b_{t+1})$ とするとき，この投入産出の組を要素とする集合を生産可能性集合と言い，T_t で表わす．生産可能性集合を次のように定義してもよいだろう．すなわち，時刻 t の生産対応を $\Gamma_t: \Omega^n \longrightarrow \Omega^n$ とし，Γ_t のグラフを T_t とするのである．そうすれば，

$$T_t = \{(a_t,\ b_{t+1}) \mid a_t \in \Omega^n,\ b_{t+1} \in \Gamma_t(a_t)\}$$

と書かれる．明らかに，T_t は Ω^{2n} の部分集合である．Γ_t，従って，T_t は時刻 t の技術知識状態から外生的に与えられる．

生産可能性集合についてはいくつかの仮定が設定されるのであるが，ここにその一部を挙げておく．いずれもすべての t について成立しているものと考える．

仮定(1)　錐．

仮定(2)　凸集合．

仮定(3)　自由処分，すなわち，

$$(a'_t,\ b'_{t+1}) \in T_t,\ a_t \geqq a'_t \ \&\ 0 \leqq b'_{t+1} \leqq b_{t+1} \Longrightarrow (a_t,\ b'_{t+1}) \in T_t$$

次に，今後利用するいくつかの概念を述べておく．

無限列 $y = (y_t)_{t \in N}$ に関連して，集合 G 及び F を

$$G = \{y \mid (\forall t): y_t = b_t - a_t,\ (a_t,\ b_{t+1}) \in T_t,\ b_1 = \bar{b}_1\}$$

$$F = \{y \mid y \in G\ ;\ (\forall t): c_t = y_t + z_t \geqq 0,\ z_t \in Z_t\}$$

によって定義し，G の要素を計画，F の要素を実行可能計画と呼ぶことにする.[1] $y \in G$ のとき，しばしば，$y = (y_t)_{t \in N} = (b_t - a_t)_{t \in N} = b - a$ のいずれかの関係を用いるだろう．

所与の時間長 h (自然数) と計画 $\tilde{y} \in G$ あるいは実行可能計画 $\tilde{y} \in F$ に基いて，集合 $G^h(\tilde{y})$ 及び $F^h(\tilde{y})$

$$G^h(\tilde{y}) = \{y \mid \tilde{y},\ y \in G\ ;\ (\forall t > h): y_t = \tilde{y}_t\},$$

1) 計画とは Programme の日本訳である．

$$F^h(\tilde{y})=\{y \mid \tilde{y},\ y\in F\ ;\ (\forall t>h)\ :\ y_t=\tilde{y}_t\}$$

をによって定義する．これら集合は，最初の有限の h 個を除いて，$\tilde{y}$ と一致する無限列の集合である．

さらに，一般に，無限列 $x=(x_t)_{t\in N}$ の第 h 項までの列を $x^h=(x_t)_{t\in\{1,\cdots h\}}$ によって表わし，x の h 項までの縮少有限列と言う．

§3　nontightness の仮定

生産可能性集合については，上記(1)(2)(3)の他にも仮定が加えられる．この§では，1つの追加的仮定について考える．

n 個の財を，生産可能性集合上で，常に生産可能な財と永久に生産不可能な財の 2つのクラスに分類し，前者を生産財，後者を非生産財と言うことにする．例えば，労働用役をモデルの中に明示的に導入するような場合には，種々のタイプの労働用役は，すべての t に対して，T_t 上で非生産財であると理解した方が適切であろう．そこで，いま，財の番号の集合 $\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ を2つの部分集合 $\{1, \cdots\cdots, m\}$ と $\{m+1, \cdots\cdots, n\}$ $(m\neq 0)$ に分類し，前者を生産財の番号の集合，後者を非生産財の番号の集合とする．そしてこれに伴って，時刻 t の投入 a_t，産出 b_t 及び外生的資源供給 z_t についても，次のように2つのクラスに分類しておく．

$$a_t=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{1t}\\ \vdots\\ a_{mt}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_{m+1,t}\\ \vdots\\ a_{nt}\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}_pa_t\\ {}_za_t\end{pmatrix},$$

$$b_t=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1t}\\ \vdots\\ b_{mt}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}_pb_t\\ 0\end{pmatrix},$$

$$z_t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_{m+1,t} \\ \vdots \\ z_{nt} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_z z_t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$${}_p a_t,\ \ {}_p b_t \in \Omega^m,\ \ {}_z a_t,\ \ {}_z z_t \in \Omega^{n-m}$$

ここで，添字 p は生産財，z は非生産財であることを示している．

計画 $\tilde{y}\in G$ と実行可能計画 $\tilde{y}\in F$ に関連して，集合 $E(G)$ と集合 $E(F)$ を

$$E(G)=\{\tilde{y}\,|\,\tilde{y}\in G\ ;\ (\forall y\in G,\ y\neq\tilde{y})\ :\ y\not\geq\tilde{y}\}^{1)}$$

$$E(F)=\{\tilde{y}\,|\,\tilde{y}\in F\ ;\ (\forall y\in F,\ y\neq\tilde{y})\ :\ y\not\geq\tilde{y}\}$$

によって定義する． $E(G)$ の要素を効率計画， $E(F)$ の要素を効率的実行可能計画と言うことにする． 任意の相異なる効率計画（あるいは効率的実行可能計画）は比較不能である．

また，時刻 t と計画 $y=(b_t-a_t)_{t\in N}$ が与えられているとき，均衡条件と非負条件を満し，かつ，技術的に生産可能であるようなあらゆる投入産出の組の集合を $T_t(y)$ とおく．すなわち，

$$T_t(y)=\left\{(a_t,\ \ b_{t+1})\ \middle|\ \begin{array}{l}(a_t,\ \ b_{t+1})\in T_t,\ \ c_t=\tilde{b}_t-a_t+z_t\geqq 0,\\ c_{t+1}=b_{t+1}-\tilde{a}_{t+1}+z_{t+1}\geqq 0\end{array}\right\}.$$

以上の準備の下に仮定(4)を次のように形式化する．

仮定(4)　nontightness

（i） $(\forall\tilde{y}\in E(G)\ \&\ \forall t)\ (\exists(a_t,\ b_{t+1})\in T_t)\ :\ {}_p b_{t+1}>{}_p\tilde{b}_{t+1},\ {}_z a_t<{}_z\tilde{a}_t$ [2]

（ii） $(\forall\tilde{y}\in E(F)\ \&\ \forall t)\ (\exists(a_t,b_{t+1})\in T_t(\tilde{y}))\colon {}_p b_{t+1}>{}_p\tilde{b}_{t+1},\ {}_z a_t<{}_z\tilde{a}_t$

仮定（4-i）は，任意の効率計画に対して，すべての時刻について，生産財の投入を適当に変化させることによって，すべての非生産財の投入を減少させ，か

1) $y\not\geq y$ とは，ある t について，$y_t\not\geq y_t$ のことであり，$y_t\not\geq y_t$ とは，$y_t\geqq y_t$ の否定である．

2) （$\exists$～）は“ある～が存在して”と読む．

つ，すべての生産財の産出を増大させることが技術的に可能であることを意味している．一方，仮定（4-ii）は，任意の効率的実行可能計画 $\tilde{y}$ に対して，すべての t とそれに対応する産出 $\tilde{b}_t$ と投入 $\tilde{a}_{t+1}$ について，生産財の投入を適当に変化させることによって，すべての非生産財の投入を減少させ，かつ，すべての生産財の産出を増大させることが，$c_t=\tilde{b}_t-a_t+z_t\geqq 0$ と $c_{t+1}=b_{t+1}-\tilde{a}_{t+1}+z_t\geqq 0$ という条件の下で，技術的に可能であることを意味している．明らかに，(4-ii)⇒(4-i).

ところで，(4-i) 及び (4-ii) は，例えば，(1)ある時刻について，ある非生産財の投入とある生産財の産出の比率が生産可能性集合上で固定的であるというケースとか，(2)ある時刻について，ある非生産財の供給がゼロであるというケースについては，成立しないことになる．特に，(4-ii) は一段と制約の多い仮定である．この点を念頭に置きながら，以下においては，(4-i) と (4-ii) を適宜選択的に利用する．

§4　価格系の問題 I

この§では，効率計画あるいは効率的実行可能計画の縮少有限列に随伴する価格の半正有限列の存在問題を取り上げる．[1)]

時刻 t の財の価格は Ω^n の要素でなければならないが，それを

$$p_t=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{1t}\\ \vdots\\ p_{mt}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}p_{m+1,t}\\ \vdots\\ p_{nt}\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}_pp_t\\ {}_zp_t\end{pmatrix},\quad {}_pp_t\in\Omega^m,\quad {}_zp_t\in\Omega^{n-m}$$

と表わす．また任意の所与時間長 h に対して，価格の有限列を縮少有限列と同一視して $p^h=(p_t^h)_{t\in\{1\cdots h\}}$ と書く．明らかに $p^h\in\Omega^{nh}$ が要求される．一方，価格の無限列は $p=(p_t)_{t\in N}$ によって表わす．

1) 半正とは非負かつ非ゼロのことである．一般に，要素 x が半正であるとき，$x\geq 0$ と書く．

次の一般的補題を利用すれば，価格の半正有限列の存在に関する補題2が得られる．

補題1[1)] 凸集合 S が Ω^{ν} の内点を含まなければ，

$$(\exists q\in\Omega^{\nu},\ q\neq 0)(\forall x\in S\ \&\ \forall x^0\in\Omega^{\nu}):qx\leqq 0\leqq qx^0$$

補題2 仮定(2)(3)の下で $\tilde{y}\in G$ と $h\in N$ を所与とするとき，

$$(\forall y\in G^h(y)):y\ngeq\tilde{y}\implies$$

$$(\exists p^h\geq 0)(\forall y\in G^h(\tilde{y})):p^h\tilde{y}^h\geqq p^h y^h$$

ここに $\tilde{y}^h$ と y^h は，$\tilde{y}$ と y の縮少有限列である．

証明 すべての $y\in G^h(\tilde{y})$ に対して $y\ngeq\tilde{y}$ であるから，$y^h\ngeq\tilde{y}^h$，すなわち $y^h-\tilde{y}^h\ngeq 0$. よって，$y^h-\tilde{y}^h$ は Ω^{nh} の内点ではない．一方仮定(2)より，T_t はすべての t について凸集合であるから，$G^h(\tilde{y})$ も凸集合となる．かくて，凸集合 $\Delta=\{y^h-\tilde{y}^h\,|\,y\in G^h(\tilde{y})\}$ は Ω^{nh} の内点を含まないので，補題1より，すべての $y^h-\tilde{y}^h\in\Delta$ に対して，$p^h(y^h-\tilde{y}^h)=p^hy^h-p^h\tilde{y}^h\leqq 0$ となるような $p^h\geq 0$ が存在する．（証終）

計画 $\tilde{y}=(\tilde{y}_t)_{t\in N}=(\tilde{b}_t-\tilde{a}_t)_{t\in N}\in G$ と時間長 $h\in N$ が与えられたとき，すべての $t>h$ に対して $y_t\geqq\tilde{y}_t$ を満す計画 $y=(y_t)_{t\in N}=(b_t-a_t)_{t\in N}\in G$ を可能ならしめる，時刻 h の投入 a_h の集合を $A(\tilde{y}\in G,\ h)$ で表わす．同様にして，実行可能計画 $\tilde{y}\in F$ と $h\in N$ が与えられたとき，すべての $t>h$ に対して $y_t\geqq\tilde{y}_t$ を満し，a_h と $\tilde{a}_h$ が比較不能である場合には，$\tilde{b}_h-a_h+z_h\geqq 0$ を満す実行可能計画 $y\in F$ を可能ならしめる，時刻 h の投入 a_h の集合を $A(\tilde{y}\in F,\ h)$ で表わす．形式的には，

$$A(\tilde{y}\in G,\ h)=\{a_h\,|\,(\exists y\in G)(\forall t>h):y_t\geqq\tilde{y}_t\}$$

$$A(\tilde{y}\in F,\ h)=\{a_h\,|\,(\exists y\in F)(\forall t>h):y_t\geqq\tilde{y}_t\ ;\ \tilde{b}_h-a_h+z_h\geqq 0\}$$

と書くことができる．

次の補題3，4は補題2と関連がある．

1) 証明は二階堂〔10〕pp. 207-208 を参照のこと．

補題 3　仮定(3)の下で，$\tilde{y}\in G$，$h\in N$ 及び $p^h\geq 0$ が与えられているとき，

$$(\forall y\in G^h(\tilde{y})):p^h\tilde{y}^h\geqq p^h y^h \iff$$

(a)　$(\forall t<h\ \&\ \forall(a_t,\ b_{t+1})\in T_t):p^h_{t+1}\tilde{b}_{t+1}-p^h_t\tilde{a}_t\geqq p^h_{t+1}b_{t+1}-p^h_t a_t,$

(b)　$(\forall a_h\in A(\tilde{y}\in G,\ h)):p^h_h\tilde{a}_h\leqq p^h_h a_h.$ [1]

証明　(⇒)：　$p_1\tilde{b}_1=p_1b_1=p_1\bar{b}_1$ を考えて，$p^h\tilde{y}^h\geqq p^h y^h$ を書き代えると，

(1)　$$\sum_{t=1}^{h-1}[(p^h_{t+1}\tilde{b}_{t+1}-p^h_t\tilde{a}_t)-(p^h_{t+1}b_{t+1}-p^h_t a_t)]-p^h_h(\tilde{a}_h-a_h)\geqq 0.$$

(a)の証明　ある $t=\tau<h$ とある $(a_\tau,\ b_{\tau+1})\in T_\tau$ に対して，$p^h_{\tau+1}\tilde{b}_{\tau+1}-p^h_\tau\tilde{a}_\tau<p^h_{\tau+1}b_{\tau+1}-p^h_\tau a_\tau$ として矛盾を導く．すべての $t\neq\tau$，$\tau+1$ については $y_t=\tilde{y}_t$，$y_\tau=\tilde{b}_\tau-a_\tau$，$y_{\tau+1}=b_{\tau+1}-\tilde{a}_{\tau+1}$ によって無限列 $y=(y_t)_{t\in N}$ を定義すると，$y\in G^h(\tilde{y})$ である．この y については明らかに(1)式が成立しない．(b)の証明　(b)が成立しないとする．このとき仮定(3)によって，すべての $t\neq h$ に対して $y_t=\tilde{y}_t$，$y_h=\tilde{b}_h-a_h$ によって定義される無限列 $y\in G^h(\tilde{y})$ をつくることができる．この y については(1)式が成立しない．(⇐)：明らか．（証終）

系　補題 3 において仮定(1)を追加すると，(a)は

(a′)　$(\forall t<h\ \&\ \forall(a_t,\ b_{t+1})\in T_t):$

$$0=p^h_{t+1}\tilde{b}_{t+1}-p^h_t\tilde{a}_t\geqq p^h_{t+1}b_{t+1}-p^h_t a_t$$

と書くことができる．

証明　任意の時刻 $\tau<h$ と任意の正実数 λ を固定する．すべての $t\neq\tau$，$\tau+1$ に対しては $y_t=\tilde{y}_t$，$y_\tau=\tilde{y}_\tau-\lambda\tilde{a}_\tau$，$y_{\tau+1}=\tilde{y}_{\tau+1}+\lambda\tilde{b}_{\tau+1}$ によって無限列 y を定義すると，仮定(1)より $y\in G^h(\tilde{y})$．この y を(1)式に代入すると，$\lambda>0$ より $0\geqq p^h_{\tau+1}\tilde{b}_{\tau+1}-p^h_\tau\tilde{a}_\tau$ を得る．ここで，$0>p^h_{\tau+1}\tilde{b}_{\tau+1}-p^h_\tau\tilde{a}$ とすると，仮定(1)より $(0,\ 0)\in T_t$ であるから，$p^h_{\tau+1}b_{\tau+1}-p^h_\tau a_\tau=p^h_{\tau+1}\cdot 0-p^h_\tau\cdot 0=0>p^h_{\tau+1}\tilde{b}_{\tau+1}-p^h_\tau\tilde{a}_\tau$

---

1)　与えられた $\tilde{y}\in E(G)$ に対して，すべての時間長 h について(a)(b)を成立させるような価格の無限列 $P=(P_t)_{t\in N}$ は，しばしば，Malinvaud 価格系と言われる．例えば，若干異った表現であるが，Starrett [11] p. 705 を参照されたい．

となって，補題3の(a)に矛盾する．（証終）

補題4　仮定(3)の下で，$\tilde{y}\in F$，$h\in N$ 及び $p^h\geq 0$ が与えられているとき，

$(\forall y\in F^h(\tilde{y}),\ y\not\geq\tilde{y}):p^h\tilde{y}^h\geqq p^hy^h\quad\Longrightarrow$

(a)　$(\forall t<h\ \&\ \forall(a_t,\ b_{t+1})\in T_t(\tilde{y})):p^h_{t+1}\tilde{b}_{t+1}-p^h_t\tilde{a}_t\geqq p^h_{t+1}b_{t+1}-p^h_ta_t$

(b)　$(\forall a_h\in A(\tilde{y}\in F,\ h)):p^h_h\tilde{a}_h\leqq p^h_ha_h.$

証明　(a)：ある $t=\tau<h$ とある $(a_t,\ b_{t+1})\in T_\tau(\tilde{y})$ に対して(a)が成立しないとすると，補題3と同様に，すべての $t\neq\tau$，$\tau+1$ について $y_t=\tilde{y}_t$，$y_\tau=\tilde{b}_\tau-a_\tau$，$y_{\tau+1}=b_{\tau+1}-\tilde{a}_{\tau+1}$ によって無限列 $y\in F^h(\tilde{y})$ を定義すると(1)式に矛盾する．(b)：$\tilde{a}_h\geq a_h$ とすると，仮定(3)によって，すべての $t\neq h$ に対して $y_t=\tilde{y}_t$，$y_h=\tilde{b}_h-a_h$ によって無限列 $y\in F^h(\tilde{y})$ を定義することができる．このとき $y\geq\tilde{y}$ となるから矛盾である．$\tilde{a}_h$ と a_h が比較不能であるとき，やはり上に定義した y を考えるとその縮少有限列 y^h については(1)式が成立していることから，$p^h_h\tilde{a}_h\leqq p^h_ha_h$ を得る．$\tilde{a}_h\leq a_h$ のときは明らかである．（証終[1]）

§5　価格系の問題 II

この§では，前§の延長として Malinvaud [8] の論旨をできるだけ忠実にフォローすることによって，効率計画あるいは効率的実行可能計画に随伴する価格の半正無限列（＝支持価格）の存在問題を取り上げる．

p_t，${}_pp_t$ 及び ${}_zp_t$ がそれぞれ Ω^n，Ω^m 及び Ω^{n-m} の要素であるとき，そのノルムを

$$(2)\quad \|p_t\|=\sum_{i=1}^{n}p_{it},\qquad \|{}_pp_t\|=\sum_{i=1}^{m}p_{it},\qquad \|{}_zp_t\|=\sum_{i=m+1}^{n}p_{it}$$

によって定義しておく．また Ω^n，Ω^m 及び Ω^{n-m} のそれぞれについて，その任意座標が1である要素を e，${}_pe$，${}_ze$ と表わすことにする．すなわち，

1)　逆（$\Leftarrow$）を示すにはもっと厳しい仮定が要求されるように思う．例えば，(a)(b)の下では，ある任意の $t=\tau$，$\tau+1<h$ について $y_\tau\neq\tilde{y}_{\tau+1}$，$y_{\tau+1}\neq\tilde{y}_{\tau+1}$，その他の t については $y_t=\tilde{y}_t$ によって定義されるすべての実行可能計画 $y\in F$ に対しては，$p^h\tilde{y}^h\geqq p^hy^h$ が成立する．また所与の $\tilde{y}\in F$ に対して補題3の条件(a)と補題4の条件(b)が成立するならば，逆（$\Leftarrow$）を主張することができる．

$$e=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}_pe\\ {}_ze\end{pmatrix},\quad e\in\Omega^n,\ {}_pe\in\Omega^m,\ {}_ze\in\Omega^{n-m}$$

とする．このとき，次の補題５，６及び定理１，２を得る．

補題５〖６〗 仮定 (4-i)〖(4-ii)〗の下では，条件(a)(b)を満す $\overset{h}{p_t}=(p_h)_{t\in\{1\cdots h\}}\geqq 0$ に対して，h によって定まるある正の有限実数列 $\alpha^h=(\alpha_t^h)_{t\in\{1\cdots h\}}$ が存在し，

$$(\forall t):\ {}_pp_1^h\geqq 0,\ \|{}_pp_{t+1}^h\|\leqq\alpha_t^h\|{}_pp_t\|,\ \ \|{}_zp_t^h\|\leqq\alpha_t^h\|{}_pp_t^h\|.$$

証明[1)] 仮定 (4-i) のケースについてのみ考える． 仮定 (4-i) によって，条件(a)を

$$(3)\quad (\forall t<h)(\exists(a_t,\ b_{t+1})\in T_t):$$
$$ {}_pb_{t+1}-{}_p\tilde{b}_{t+1}>0,\ {}_za_t-{}_z\tilde{a}_t<0\ \&$$
$$ {}_pp_{t+1}^h({}_pb_{t+1}-{}_p\tilde{b}_{t+1})-{}_pp_t^h({}_pa_t-{}_p\tilde{a}_t)-{}_zp_t^h({}_za_t-{}_z\tilde{a}_t)\leqq 0$$

と書くことができる． ここで ${}_pp_t^h=0$ とすると，(3)式より ${}_pp_{t+1}^h=0,\ {}_zp_t^h=0$ となる．よって，${}_pp_1^h=0$ なら，すべての $t\leqq h$ に対して $p_t^h=0$ となり，仮定に反する[2)]．ゆえに，${}_pp_1^h\geqq 0$．次に，正実数 γ_t^h と δ_t^h を適当にとって，

$$ {}_pb_{t+1}-{}_p\tilde{b}_{t+1}\geqq\gamma_t^h{}_pe,\ \ {}_za_t-{}_z\tilde{a}_t\leqq-\gamma_t^h{}_ze,\ \ {}_pa_t-{}_p\tilde{a}_t\leqq\delta_t^h{}_pe$$

とすると，(3)式より

$$\gamma_t^h\|{}_pp_{t+1}^h\|-\delta_t^h\|{}_pp_t^h\|+\gamma_t^h\|{}_zp_t^h\|$$
$$\leqq{}_pp_{t+1}^h({}_pb_{t+1}-{}_p\tilde{b}_{t+1})-{}_pp_t^h({}_pa_t-{}_p\tilde{a}_t)-{}_zp_t^h({}_za_t-{}_z\tilde{a}_t)\leqq 0.$$

---

1) 証明は Malinvaud [8] pp. 571–572 による．

2) 仮定(4)の下で有限時間長を考える場合には，$b_h=\begin{bmatrix}{}_pb_h\\ 0\end{bmatrix}$ たることを考えて，${}_zp_h$ を除いておく．

ここで $\alpha_t^h=\delta_t^h/\gamma_t^h$ とおくと結論を得る．（証終）

定理 1〘**2**〙 仮定(2)(3)（4-i）〘(4-ii)〙の下で $\tilde{y}\in E(G)$〘$E(F)$〙が与えられている．このとき，

$$(\exists p\geq 0)(\forall t\ \&\ \forall(a_t,\ b_{t+1})\in T_t[\![T_t(\tilde{y}_t)]\!]):$$
$$p_{t+1}\tilde{b}_{t+1}-p_t\tilde{a}_t\geqq p_{t+1}b_{t+1}-p_ta_t$$

証明 補題2，3〘4〙及び5〘6〙より，所与の $h\in N$ に対して条件(a)を満す $p_h\geq 0$ が存在し，特に $p_1^h\geq 0$ である．そこで，所与の h に随伴する半正有限列 p^h を各 h について適当に規準化して，$\|p_1^h\|=1$ となるよにしておく．そうすると，任意の所与自然数 h と $\tau\leqq h$ に対して，

$$\|p_\tau^h\|\leqq\|{}_pp_\tau^h\|+\|{}_zp_\tau^h\|\leqq\prod_{t=1}^{\tau-1}\alpha_t^h\|{}_pp_1^h\|+\prod_{t=1}^{\tau}\alpha_t^h\|{}_pp_1^h\|$$
$$\leqq\prod_{t=1}^{\tau-1}\alpha_t^h+\prod_{t=1}^{\tau}\alpha_t^h\leqq 2\prod_{t=1}^{h}\alpha_t^h$$

となって，各所与自然数 h とそれに対応するすべての $t\leqq h$ に対して，$\|p_\tau^h\|$ は有界である．ここで，次のような数列の族

$$(\|p_1^h\|)_{h\in N},\quad(\|p_2^h\|)_{\substack{h\in N,\\1<h}},\quad(\|p_3^h\|)_{\substack{h\in N,\\2<h}},\cdots\cdots(\|p_t^h\|)_{\substack{h\in N\\t-1<h}}\cdots\cdots$$

を考えると，これら可算無限個の数列はいずれも有界であるから収束部分列をもつ．そこで任意の t について，$(\|p_{t+1}^h\|)_{\substack{h\in N\\t-1<h}}$ の添字 h は $(\|p_t^h\|)_{\substack{h\in N\\t-1<h}}$ の収束部分列の添字の意味で使用し，$(\|p_t^h\|)_{\substack{h\in N\\t-1<h}}$ の収束部分列の極限要素を $\|p_t\|$ とする．こうして得られる無限列 $p=(p_t)_{t\in N}$ が求めるものであることは，p_t の作り方から理解できる．（証終）

§6 若干の疑問

これまでわれわれは，Malinvaud の資本蓄積と効率的資源配分モデルの一部をできるだけ厳密に整理し，同時にいくつかの疑問を暗黙の内に示唆しようと努めてきた．この§では，既に提起されている暗黙のものをも含めて，いくつかの疑問を明示的に述べる．

補題3，4と定理1，2によって，効率計画あるいは効率的実行可能計画は，すべての時刻について利潤最大計画であり，また，所与の時間長については終端費用最小計画であることが示された.[1] この点だけに注目するならば，補題3と定理1が意味する内容と，補題4と定理2が意味する内容は殆んど類似しているような印象を与える．しかし実際，両者の間には重大な差異があるように思われる．その理由は，補題3と定理1においては，物的均衡条件，消費に関する非負条件あるいは投入に必要な財の存在条件等が全く考慮されず，各時刻の技術的可能性のみが問題にされているところに起因しているようである．効率計画に対しては各時刻において最大利潤をもたらす支持価格が存在するという命題が意味をもつためには，当該効率計画が実行可能であり，しかも，その命題を主張するために比較の目的で選ばれるある適当な計画が実行可能であるということを明らかにしておく必要がある．はたして，補題3と定理1に設けられた仮定の範囲内でそのことを説明することができるであろうか．この点について，われわれには明確な解答が得られない．いずれにしても，われわれに興味があるのは実行可能計画の集合である．

補題4と定理2においては上述の疑問は解消される．しかし今度は，所与の効率的実行可能計画とそれに随伴する支持価格が，その計画とは異るすべての実行可能計画に対して，最大利潤とか最小費用を保証するか否かが明らかではない．なぜなら，一般に，所与の効率的実行可能計画 $\tilde{y}=(\tilde{b}_t-\tilde{a}_t)_{t\in N}$ とそれとは異る任意の実行可能計画 $y=(b_t-a_t)_{t\in N}$ に関しては，$\tilde{b}_t-a_t+z_t$ と $b_{t+1}-\tilde{a}_{t+1}+z_{t+1}$ の符号は確定しないはずであるが，補題4と定理2においては，それらの値が非負であるような投入産出の組のみが考慮されているからである．

次に異った角度から眺めることにする．補題2は，仮定(2)と(3)の下で効率計画 $\tilde{y}$ と時間長 h を所与とするとき，時刻 h 以後は $\tilde{y}$ と一致するすべての計画に対して，$\tilde{y}$ を支持する価格の半正有限列 p^h が存在すること，つまり $p_h\tilde{y}_h\geqq p_hy_h$ を主張している．しかも補題3によれば，このとき条件(a)(b)が成立す

1) $A(\tilde{y}\in G,\ h)$，$A(\tilde{y}\in F,\ h)$ の定義からすると，必ずしも正確な表現ではない．

ることが示されている．さて定理1は，これらの結果を利用することによって，時間長が無限である場合にも条件(a)が成立することを明らかにしようとするものである．ここにおいてまずわれわれが疑問に感ずるのは，$\lim_{h\to\infty} p_h\tilde{y}_h$ とか $\lim_{h\to\infty} p^h y^h$ という値は比較可能かどうかという点である．所与時間長 h については，$p^h\tilde{y}^h$ と $p^h y^h$（但し $y\in G^h(\tilde{y})$）とは比較可能であろう．しかし，h が無限に大きくなっていくという場合，一般には，これら両者の比較可能性は保証されないだろう．とすれば，条件(a)が成立するかどうかも分らなくなってしまう．またそもそも，無限列 $(p_t^h)_{\substack{h\in N\\ t-1<h}}$ を考えることがどのような意味をもつのか明白ではなくなってしまうし，そのような無限列を考えようにも考えることすらできなくなってしまうであろう．

さて，補題5によって，所与の h とそれに対応するすべての $t\leqq h$ に対しては $\|p_t^h\|$ の有界性が主張される．しかし，そのことは数列 $(\|p_t^h\|)_{\substack{h\in N\\ t-1<h}}$ の有界性を少しも保証しないだろう．なぜなら，補題5で得られた $\alpha_t=\delta_t^h/\gamma_t^h$ の性質についてもう少し明確な情報が与えられなければ，$\lim_{h\to\infty}\prod_{t=1}^{h}\alpha_t^h$ が有界であるのか，収束するのか，発散するのかということが明らかではないからである．そしてもし，$\lim_{h\to\infty}\prod_{t=1}^{h}\alpha_t^h$ が発散すれば，上記数列は有界ではないかもしれないのである．この点の疑問を数学的に回避する最も簡単な方法は，すべての h とそれに対応するすべての $t\leqq h$ について $\alpha_t^h\leqq 1$ であるとか，$\lim_{h\to\infty}\prod_{t=1}^{h}\alpha_t^h$ が有界であるということを仮定することである．しかし，このような追加的仮定は生産可能性集合に課する仮定としては余りに厳しく，経済学的にはとてもプロージブルとは思えない．

以上のように考えてみると，無限時間長を考察する場合，経済学的に十分説得的な仮定設定の下で，効率的実行可能計画に随伴する競争価格（あるいは支持価格）系を見出すことは容易ではなく，Malinvaud モデルは十分説得的な解答を与えているようには思われない．

§7　再検討

§6では，Malinvaud の資本蓄積と効率的資源配分モデルについていくつかの疑問点を挙げた．この§では，これらの疑問をいくらかでも解消しようという意図の下に，Malinvaud の問題を再検討する．

しばらくは一般論について述べる．ベクトル空間 R^n の無限要素列 $x=(x_t)_{t\in N}$ で，$\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}|x_{it}|^2<\infty$ を満すものの全体を H で表わし，その内積とノルムを

$$xx'=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}x_{it}x'_{it},\qquad \|x\|=\sqrt{\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}|x_{it}|^2}$$

によって導入すると，H は1つのヒルベルト空間をなす[1)]．

次の補題はヒルベルト空間一般に関するものであるが，ここでは適用範囲 H をに限ることにする．

補題7[2)]　ヒルベルト空間 H において，S を1つの空でない閉凸集合とする．このとき，

$$(\forall x^\circ\notin S)(\exists x^*\in S)(\forall x\in S,\ x\neq x^*):$$
$$\|x^\circ-x^*\|<\|x^\circ-x\|\ \&\ (x-x^*)(x^\circ-x^*)\leqq 0$$

系1　ヒルベルト空間 H において，S を1つの空でない閉凸集合とする．このとき，

$$(\forall x^\circ\notin S)(\exists q=x^\circ-x^*\neq 0,\ x^*\in S)(\forall x\in S,\ x\neq x^*):$$
$$qx\leqq qx^*\equiv\eta<qx^\circ$$

証明　補題7より，$x(x^\circ-x^*)\leqq x^*(x^\circ-x^*)\equiv\eta$．　一方，$x^\circ(x^\circ-x^*)=(x^*+x^\circ-x^*)(x^\circ-x^*)=\|x^\circ-x^*\|^2+x^*(x^\circ-x^*)>\eta$．ゆえに，$x(x^\circ-x^*)\leqq x^*(x^\circ-x^*)\equiv\eta<x^\circ(x^\circ-x^*)$（証終）

---

1)　内積が定義され，さらにその内積から定義されたノルムに関して完備な複素ベクトル空間をヒルベルト空間という．

2)　いわゆる分離定理である．証明については竹之内 [12] pp. 45–46参照．

系2[1] ヒルベルト空間 H において，S を1つの空でない凸集合とする．このとき，x° が S の境界点であれば，

$$(\exists q \neq 0)(\forall x \in S) : qx \leqq qx^\circ$$

系3[2] ヒルベルト空間 H において，S を空でない凸集合とする．H の非負象限の内部を H_+° とするとき，

$$S \cap H_+^\circ = \phi \implies$$

$$(\exists q \geq 0)(\forall x \in S \ \& \ \forall x^\circ \in H_+^\circ) : qx \leqq 0 \leqq qx^\circ$$

以上で一通りの準備ができたので，Malinvaud の問題に立戻ることにする．これまでわれわれは純産出 y を中心に論を展開してきたが，今後は便宜上，消費 c に照準を合せることにする．集合 C を

$$C = \left\{ c \,\middle|\, \begin{array}{l} (\forall t) : c_t = b_t - a_t + z_t \geqq 0, \ (a_t, \ b_{t+1}) \in T_t, \ z_t \in Z_t, \\ b_1 = \bar{b}_1 \quad \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{it}^2 < \infty \end{array} \right\}$$

とおき，要素 $c = (c_t)_{t \in N}$ を有限実行可能消費計画と呼ぶことにする．$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} c_{it}^2 < \infty$ という条件が経済学的にどのような意味をもつかという点については，ここでは深く論じないことにする．常識的に考えみると，消費の無限時間長にわたる流れの総和が有限であるというのは不自然のように思えるかもしれない．しかし，消費の大きさを絶対的な大きさだけで把握する必要は毛頭もないこともまた確かである．従って，この条件がナンセンスであるとは必ずしも言いきれない．むしろわれわれは，成功するか否かは別にして，消費の無限列がこの条件を満すような何らかの数学的技巧—しかも経済学的に十分説得力のある技巧—を見出すように努力するであろう．

---

1) 二階堂 [10] p. 205 の系をヒルベルト空間 H に拡張したものである．証明方法は二階堂 [10] の場合と同様であるから省略する．

2) 二階堂 [10] p. 207 の定理1をヒルベルト空間 H に拡張したものである．以前と同様に証明は省略する．ϕ は空集合を示す記号である．

集合 $E(C)$ を

$$E(C)=\{\tilde{c}\mid\tilde{c}\in C,\ (\forall c\in C,\ c\neq\tilde{c}):c\ngeq\tilde{c}\}$$

によって定義し，その要素 $\tilde{c}=(\tilde{c}_t)_{t\in N}$ を効率的実行可能消費計画と呼ぶ．任意の相異なる２つの効率的実行可能消費計画は比較不能である．

以後，仮定(4)を放棄する．その代り，さし当り次の仮定を追加する．

仮定(5)　可能外生的資源供給の集合 Z_t は，すべての t について凸集合．

仮定(5)が追加されると次の定理を示すことができる．

定理３　仮定(1)(2)(3)(5)の下で，$\tilde{c}\in E(C)$ が与えられているとき，

$$(\exists p\geq 0)(\forall c\in C):p\tilde{c}\geqq pc$$

証明　仮定(2)(5)より，C は凸集合である．そこでいま，集合 $\Delta(c)=\{c-\tilde{c}\mid c\in C\}$ を考えると，$\Delta(\tilde{c})$ は凸集合である．仮定(1)より，$0\in C$ であるから，$-\tilde{c}\in\Delta(\tilde{c})$ となって，$\Delta(\tilde{c})$ は空ではない．また $\tilde{c}\in E(C)$ より，すべての $c\in C$ に対して $c-\tilde{c}\ngeq 0$ となるから，$\Delta(\tilde{c})$ は H の非負象限の内部 H_+° とは交わらない．すなわち，$\Delta(\tilde{c})\cap H_+^\circ=\phi$ よって補題７系３により，ある価格の半正無限列 $p=(p_t)_{t\in N}$ が存在し，すべての $c-\tilde{c}\in\Delta(\tilde{c})$ に対して，$p(c-\tilde{c})\leqq 0$.

（証終）

定理３は，効率的実行可能消費計画に随伴する半正の価格系 $p=(p_t)_{t\in N}$ が存在し，その価格の下で効率的実行可能消費計画の現在価値が最大なることを主張している．この結論は，$\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}c_{it}^2<\infty$ という条件を除くならば，Malinvaud が［７］において明らかにしようとして成功しなかった命題[1)]のより明示的な表現である．ところがもし，$\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}c_{it}^2<\infty$ という条件について経済学的に説得的な意味づけを与えることができなければ，非常に意義深いと思われるこの定理３も大して十分な効用を発揮することができない．そこで次の§では，この条件について少し考察してみよう．

1)　Malinvaud［７］p. 245.

§8　例証

この§では，$\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} c_{it}^2 < \infty$ という条件を満足させる1つの巧みな工夫を，McFadden［9］のアイデアを適宜参考にしながら例示する．もとより，それはあくまでも例示にすぎないのであるから，われわれはそれで十分であるとは決して思ってはおらないことを断っておく．

§2では，Malinvaud に従って生産財と非生産財を明示的に区別した．ここでは，このような方法の経済学的有意味性を十分認識しながらも，便宜上この区別を採用しないことにし，生産可能性集合について新たに3つの仮定を追加する．いずれもすべての時刻について成立するものと考える．

仮定(6)　閉集合．

仮定(7)　すべての財が生産可能，

$$(\exists(a_t,\ b_{t+1}) \in T_t):\ b_{t+1} > 0$$

仮定(8)　無から有は生じない，

$$(0,\ b_{t+1}) \in T_t \implies b_{t+1} = 0$$ [1)]

仮定(6)は数学的に要求されるものであり，経済学的には正否の判定が困難である．しかしごく直観的には，それほど不自然な仮定ではないように思える．仮定(8)は容認しやすいであろう．仮定(7)は§2の議論に逆行するものであるが，実は，その点については多少弁護することができる．というのは，多くの Neumann 型成長モデルに見られるように，非生産財の必要投入を生産財の必要投入に環元することが理論的には可能だからである．通常，非生産財と言えば，恐らくは種々のタイプの労働を思い起すであろうが，労働者はいずれ自らの受け取る賃金で消費財（＝生産財）を購入するであろう．それゆえ，労働投入を，かれらが賃金で購入する生産財の投入という形で，間接的に表現することができるのである．このようにして，労働投入（あるいは非生産財の投入）を明示的に表示しないことにすれば，すべての財を生産財であると考えて差し支

1）　仮定(7)と(8)は Kemoth〔4〕p. 118 の仮定の一般化である．

えないということになる.[1]

さて，仮定(1)より $(0,\ 0)\in T_t$ である．一方，仮定(8)より，$a_t=0$ ならば半正の産出をもたらすことができない．この点を考慮して，$a_t\geq 0$ なる任意所与の投入産出の組 $(a_t,\ b_{t+1})\in T_t$ に対して，拡張率 $\rho(a_t,\ b_{t+1})$ を

$$\rho(a_t,\ b_{t+1})=max\{\rho_t \mid b_{t+1}\geq\rho_t a_t,\ (a_t,\ b_{t+1})\in T_t\}$$

によって定義する．$a_t\geq 0, b_{t+1}\geq 0$ より，明らかに $0\leqq\rho(a_t,\ b_{t+1})<\infty$ となるが，このとき次の補題が成立する．

補題 8[2] 仮定(1)(2)(3)(6)(7)(8)の下では，ある正数 $\rho^*_{t+1}\equiv\rho(a^*_t,\ b^*_{t+1})$, $a^*_t\geq 0$ が存在して，

(a) $b^*_{t+1}=\rho^*_{t+1}a^*_t$

(b) $(\forall\rho(a_t,\ b_{t+1}),\ a_t\geq 0):\ \rho^*_{t+1}\geqq\rho(a_t,\ b_{t+1})$.

補題8は最大均斉成長径路の存在を主張している．ρ^*_{t+1} はいわゆる Neumann 成長率であり，また a^*_t は生産可能性集合 T_t に対応する Neumann 半直線上の点である．

さてここで，以後しばらく McFadden の議論に従うことにする．

生産可能性集合 T_t に対して，現在価値生産可能性集合 T^*_t

$$T^*_t=\left\{(a^*_t,\ \frac{b_{t+1}}{\rho^*_{t+1}})\ \middle|\ (a_t,\ b_{t+1})\in T_t\right\}$$

を対応させる．そうすると，$(a^*_t,\ b^*_{t+1})=(a^*_t,\ \rho^*_{t+1}a^*_t)\in T_t$ であるから，$(a^*_t,\ a^*_t)\in T^*_t$ となり，集合 T^*_t は Neumann 成長率が1の生産可能性集合として扱うことができる．技術変化がある場合には，ρ^*_t と ρ^*_{t+1} の値及び集

1) 自然資源を考慮すると，この考えはやや弱いものになるだろう．しかし，そこまで考えをめぐらす場合には，われわれは生産可能性集合が錐であるという仮定を再考する必要があろう．

2) 証明は Karlin [3] pp. 338–339 あるいは Glycopantis [2] pp. 295–297 参照のこと．なお，Glycopantis では(7)(8)がないが，その場合には $\rho^*_t=0$ や $\rho^*_t=\infty$ というケースを排除しえない．

合 T^*_{t-1} と T^*_t とは異るということがある. もし $T^*_{t-1}=T^*_t$ ならば, Neumann 半直線上においてもそれ以外の投入産出の組についても, 効率の変化は全く一様であると言える. 従ってかりに, ρ^*_t と ρ^*_{t+1} の値が異っても, 分析の上では大した変化を伴わない. $T^*_t \subsetneq T^*_{t-1}$ というような技術変化, すなわち, T^*_t が T^*_{t-1} の真部分集合となるような技術変化は, 明らかに, 均斉成長に向わしめる可能性を大きくするから, Neumann 半直線にとって都合のよい技術変化であるということができる.

すべての現在価値生産可能性集合 T^*_t (但し$t\in N$) を含む最小の閉凸錐を T^* で表わし, 包絡生産可能性集合と呼ぶ.[1] そしてこの包絡生産可能性集合について, われわれは次の仮定を導入する.

仮定(9)　いかなる財も T^* 上で過剰生産になることはない,

$$(a_\nu,\ b_\nu)\in T^* \implies b_\nu-a_\nu \ngeq 0 \qquad (\text{但し},\ a_\nu,\ b_\nu\in\Omega^n)$$

現在価値生産可能性集合 T^*_t の要素 $\left(a_t,\ \dfrac{b_{t+1}}{\rho^*_{t+1}}\right)$ については, 明らかに, $\dfrac{b_{t+1}}{\rho^*_{t+1}}-a_t \ngtr 0$ である. なぜなら, もし $\dfrac{b_{t+1}}{\rho^*_{t+1}}-a_t>0$ なら, ある $\rho>\rho^*_{t+1}$ を選んで $\dfrac{b_{t+1}}{\rho}-a_t\geq 0$ とすることができるが, これは ρ^*_{t+1} の定義に反するからである. しかしながら, $\dfrac{b_{t+1}}{\rho^*_{t+1}}-a_t\geq 0$という事態は大いに生じる可能性があり, かくして, $(a_\nu,\ b_\nu)\in T^*$, $b_\nu-a_\nu\geq 0$ ということも十分ありうることになる. 例

1) 一般に T^* については, Nenmann 成長率が1である保証はない. また, T^* が仮定(8)を満すとは限らない. 例えば次の例がそれを示している.

偶数の t については, $(a_t,\ b_{t+1})=((1,1),\ (1,2))$ を含む最小の凸錐を T^*_t とし, 奇数の t については, $(a_t,\ b_{t+1})=((1,1),\ (2,1))$ を含む最小の凸錐を T^*_t とする. そうすると, $0<\theta<1$ なる θ に対して, $\theta((1,1),\ (1,2))+(1-\theta)((1,1),\ (2,1))\in T^*$. ゆえに, $\theta=1/2$とおくと $((1,1),\ (3/2,\ 3/2))\in T^*$. かくて Neumann 成長率は1.5となる.

$(a_t,\ b_{t+1})=((1,1),\ (1,1+t))$ を含む処分自由な最小の凸錐を T^*_t とする. $\dfrac{1}{t}((1,1),\ (1,1+t))\in T^*_t\subset T^*$ より, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}((1,1),\ (1,1+t))=((0,0),\ (0,1))\in T^*$. よって, 仮定(8)は成立しない.

えば，Neumann 成長率が産出の内のある生産過剰な財を処分することによって実現されるという場合には，$\frac{b_{t+1}}{\rho_{t+1}^{*}}-a_t \geq 0$ という事態が発生する．仮定(9)は，すべての t において，すべての $(a_t, \frac{b_{t+1}}{\rho_{t+1}^{*}}) \in T_t^{*}$ に対して $\frac{b_{t+1}}{\rho_{t+1}^{*}}-a_t \not\geq 0$ となること，換言すれば，$b_{t+1} \geq \rho_{t+1}^{*} a_t^{*}$ かつ $b_{t+1} \not> \rho_{t+1}^{*} a_t^{*}$ となるいかなる b_{t+1} についても $(a_t^{*}, b_{t+1}) \notin T_t^{*}$ となることを要求するばかりでなく，任意の $(a_\nu, b_\nu) \in T^{*}$ に対して $b_\nu - a_\nu \not\geq 0$ を要求するのであるから，非常に厳しい仮定であることを認めざるをえない．各時刻において限界変換率が正であるという意味において，投入と産出の間に十分高い代替性が存在し，その結果，Neumann 半直線上ではいかなる財も過剰生産とはならないといった好都合な状況下では，この仮定が成立するかもしれない．このように，仮定(9)は厳しいものであるが，例証という目的のために一応採用する．もっと別のより説得的な仮定に代用することは，今後に残された課題である．

話題を変える．この§においては，仮定(7)が導入されることによって，すべての財が生産可能であるとされた．この場合には以前の§と異って，外生資源という概念があいまいになる．いまや，外生資源と非生産財は同じ内容を意味しない．既述のように，生産に必要な労働投入は生産財の投入という形に環元されてしまうので，土地等のいわゆる自然資源を別にすれば，外生資源を別個に考えることの有用性が希薄になる．自然資源は恐らく生産不能な財であるから，この体系内には明示的に組み入れられてはおらない．かくして，すべての財が生産可能というこの§のモデルでは，外生資源供給はないかのように考えても大きな異論はなさそうである．

ところで，すべての t に対して $z=0$ と想定する場合，始発時刻産出 $b_1=\bar{b}_1$ がゼロであれば，仮定(8)によって，正の産出を生み出しえず生産の続行は不可能となる．それゆえ，$b_1=\bar{b}_1 \geq 0$ という条件は絶対不可欠になる[1)]．そこでわれ

1) $\bar{b}_1$ は始発時刻において何らかの形で外生的に与えられる生産財の供給である．これを外生資源の供給と考えて，$b_1=0$，$z_1 \geq 0$，$z_t \geqq 0$ $(t \neq 1)$ と仮定しても差し支えない．McFadden [9] p. 46．仮定 9 参照のこと．

われは，次の仮定を追加する．

仮定(10)　$(\forall t): z_t=0$;　　$b_1=\bar{b}_1\geq 0$

次に，仮定(10)を考慮して，集合 $\hat{C}$ を

$$\hat{C}=\{c \mid (\forall t): c_t=b_t-a_t\geqq 0,\ (a_t,\ b_{t+1})\in T_t,\ b_1=\bar{b}_1\}$$

とおき，要素 $c=(c_t)_{t\in N}$ を実行可能消費計画と呼ぶ．また，Neumann 拡張因子を

$$\sigma_t=\rho_1^*\times\rho_2^*\times\cdots\times\rho_t^*,\quad \sigma_1=\rho_1^*=1$$

と定義する．

次の補題はわれわれの目的に非常に有用である．

補題 9[1)]　集合 S を R^n の閉凸錐とする．任意のゼロでない $x\in\Omega^n$ に対して，$x\notin S$ ならば，このとき，

$$(\exists q>0)(\forall x\in S): qx\leqq 0$$

補題 9 を利用すれば次の結果が得られる．

定理 4　仮定(1)(2)(3)(6)(8)(9)(10)の下では，

$$(\exists \text{正数 } \zeta)(\forall c\in\hat{C}): \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c_{it}}{\sigma_t}\right)^2<\zeta$$

証明　すべての $c=(c_t)_{t\in N}=(b_t-a_t)_{t\in N}\in\hat{C}$ に対しては，すべての t に対して $(a_t,\ b_{t+1})\in T_t$ であるから，$\left(a_t,\ \dfrac{b_{t+1}}{\rho_{t+1}^*}\right)\in T_t^*\subset T^*$．$T^*$ は閉凸錐であり，仮定(9)によって $\dfrac{b_{t+1}}{\rho_{t+1}^*}-a_t\not\geq 0$ となる．補題 9 より，ある $u>0$ に対して $u\left(\dfrac{b_{t+1}}{\rho_{t+1}^*}-a_t\right)\leqq 0$ であるから，

$$\frac{ub_{t+1}}{\sigma_{t+1}}=\frac{ub_{t+1}}{\rho_{t+1}^*\sigma_t}\leqq\frac{ua_t}{\sigma_t}=\frac{ub_t}{\rho_t^*\sigma_{t-1}}-\frac{uc_t}{\sigma_t}\leqq\frac{ua_{t-1}}{\sigma_{t-1}}-\frac{uc_t}{\sigma_t}$$

$$=\frac{ub_{t-1}}{\rho_{t-1}^*\sigma_{t-2}}-\left(\frac{uc_t}{\sigma_t}+\frac{uc_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right)\leqq\cdots\cdots=u\bar{b}_1-\sum_{\tau=1}^{t}\frac{uc_\tau}{\sigma_\tau}.$$

ゆえに，

1) 証明は Karlin [3] p. 404，あるいは二階堂 [10] p. 210 系を参照のこと．

$$(4)\quad \frac{ub_{t+1}}{\sigma_{t+1}}+\sum_{\tau=1}^{t}\frac{uc_\tau}{\sigma_\tau}\leqq u\bar{b}_1,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{ub_{t+1}}{\sigma_{t+1}}+\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{uc_\tau}{\sigma_\tau}\leqq u\bar{b}_1$$

仮定(10)より，(4)式の右辺は当然有界であるから，$u>0$ より $\sum_{t=1}^{\infty}\frac{ec_t}{\sigma_t}$ も有界である．かくして，

$$\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}c_{it}}{\sigma_t}\right)^2\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}c_{it}\right)^2}{\sigma_t^2}\geqq\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c_{it}}{\sigma_t}\right)^2$$

において，左辺は有界であるから，右辺も有界となる．（証終）

定理4によって，次の結論を得たことになる．すなわち，消費計画の現在価値を算定する場合，技術的手続きとして各時刻の消費の大きさを Neumann 拡張因子で割引いて算定するかのごとくに考えれば，§7 で附加された条件 $\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}|c_{it}|^2<\infty$ は一応納得できる．

§9　むすび

Malinvaud が資本蓄積と効率的資源配分モデルにおいて明らかにしようとした問題は多岐にわたっている．本稿では，その内，効率的実行可能計画とそれに随伴する競争価格系の問題に焦点を絞って検討してきた．§6において指摘したように，Malinvand の取り扱いの中にはいくつかの疑問点がある．特に，価格の半正無限列つまり競争価格系の存在証明については，それが正しいのかもしれないが，われわれには十分理解ができなかった．そこでわれわれは，同じ証明問題を別の方法によって証明しようと試みた．しかしながら，それが経済学的に説得力があるものだとは必ずしも断言できないかもしれない．採用された仮定が，Malinvand の仮定に比して厳しいか緩いかという点は別にしても，当初明らかにしたいと思っていた次の命題を明らかにすることはできなかった．

定理3の系（？）　仮定(1)(2)(3)(8)の下で，$\tilde{c}\in E(C)$ が与えられている．このとき

$$(\exists p=(p_t)_{t\in N}\geqq 0)(\forall c=(b_t-a_t)_{t\in N}\in C)(\forall t):$$

$$0=p_{t+1}\tilde{b}_{t+1}-p_t\tilde{a}_t \geqq p_{t+1}b_{t+1}-p_t a_t.$$

消費計画に関する非負条件，すなわち $c \geqq 0$，という制約がなければ，この命題を示すことは容易である．しかし，$c \geqq 0$ が保証されなければ，経済学的には有用な結論とは言い難い．このことを逆説的に言うと，はなはだ興味深い結果となるかもしれない．というのは，一般に，効率的実行可能計画の現在価値が最大になる価格系は，各時刻において，必ずしも最大利潤を保証しないと言えるかもしれないからである．しかしこの点はまだ確実ではない．

われわれが明らかにした唯一のことは，効率的実行可能消費計画に随伴する半正の価格系 $p=(p_t)_{t\in N}$ が存在し，その価格の下で効率的実行可能消費計画の現在価値は最大になるということであった．しかし，これとても十分満足のいくものでなかった．というのは，§8で述べたように，仮定(9)が非常に厳しいからである．新古典派タイプの完全代替可能生産対応を想定すれば，この仮定は恐らく成立する．しかしもっ緩い仮定が望ましいのである．

われわれは McFadden の論文［9］を随所に参考にした．本文では論ずることをしなかったが，かれの議論展開についてもごく僅かながら不満が感ぜられる．結局のところ，McFadden は本質的にヒルベルト空間（いわゆる l^2 空間）上で分析を進めている．任意のベクトル空間からヒルベルト空間を作るためには，ヒルベルト空間の定義に叶うように相応の手続きを経る必要がある.[1] 一般に，ベクトル空間上の線型汎関数 $f(x)$ が与えられたとき，それを直ちに内積と表現するのは，必ずしも適切なことではないように思える．その意味において，これはわれわれの考えが間違っているのかもしれないが，文献［9］p. 33 の補題に対する McFadden の応用の仕方は，その補題の正否を別にしても,[2]

1) McFadden は，有限個を除いては0となる要素の全体の集合（＝ベクトル空間）を X_0 で定義している．X_0 の閉包がヒルベルト空間になることはよく知られている．McFadden［9］p. 31 参照のこと．

2) McFadden は，Ascoli の文献と Dunford & Schwartz の文献［1］p. 449 からある補題を引用している．少くとも後者には，それと同一の補題はなさそうである．一見類似する補題はあった．しかし残念ながら，われわれは両者が同一内容たることを確信するには至らなかった．

疑問の余地を残している.

ところで, McFadden は到達可能計画という興味深い概念を導入した. 実行可能という用語について, かれの定義と本稿の定義は一致しておらないので, かれの考えを必ずしも正確には表現できないが, 到達可能消費計画は次のように定義される.

定義：実行可能消費計画 $c=(c_t)_{t\in N}\in\hat{C}$ が, 次の条件

$$(\forall \text{正実数}\ \lambda)(\exists\tau\in N):\ c'\equiv(0,0,\cdots\cdots 0,\ \lambda c_{\tau},\ \lambda c_{\tau+1},\ \lambda c_{\tau+2}\cdots)\in\hat{C}$$

を満すとき, 計画 $c\in\hat{C}$ を到達可能消計画という.

さて, Kurz & Starrett [6] は, (1) McFadden は, 効率的到達可能実行可能消費計画については, 他のいかなる実行可能計画の現在価値に比してよりも, その現在価値が大きくなるような半正競争価格系 $p=(p_t)_{t\in N}$ が存在することを示したが, (2)到達可能性というのは余りに厳しい条件であって大して有用ではない, と主張している.[1)] しかし上述のごとく, われわれの理解では, McFadden の分析は本質的にヒルベルト空間上でなされており, しかも§7で示したように, ヒルベルト空間 H 上では, 到達可能性条件を必要とすることなしに, 効率的実行可能消費計画の現在価値が最大となるような価格の半正無限列 $p=(p_t)_{t\in N}$ の存在を主張することができる. §8においては, $\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}|c_{it}|^2<\infty$ という条件を成立させるために, かなり厳しい仮定を導入したことは認める. それにしても, それらの仮定が到達可能性の十分条件とか必要条件に何らかの関係があるか否かは明確ではない. むしろわれわれの直観では, 両者は無関係であるように思える. もともと, McFadden が到達可能性条件を導入することによって明らかにしようとした内容はもっと別のことであり, 従って, Kurz & Starrett のかれに対する批判は当を得ておらないように思える.[2)] しかしこの点については, もう少し熟考してみたい. 以　上

1) Kurz & Starrett [6] p. 573.

2) McFadden は追付基準にもとずく社会的厚生比較を並行して検討していた. われわれの理解では, この社会的厚生の比較に際して, かれはミンコフスキー汎 *

参考文献

[1] Dunford, N. & Schwartz, J. T., (1957), *Linear Operators, Part I*, (Interscience Publishers, Inc., New York), 1957.

[2] Glycopantis, D., (1970), "The Closed Linear Model of Production : A Note," *R. E. S.*, Vol. 37, 1970, pp. 295–297.

[3] Karlin, S., (1959), *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming ana Economics*, Vol. 1, (Addison-Wesley, Reading, Mass.), 1959.

[4] Kemeny, J. G., Morgenstern, O. & Thompson, G. L. (Kemoth), (1956), "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy," *Econometrica*, Vol. 24, 1956, pp. 115–135.

[5] Kurz, M., (1969), "Tightness and Substitution in the Theory of Capital," *Journal of Economic Theory*, Vol. 1, 1969. pp. 244–272.

[6] Kurz, M. & Starrett, D. A., (1970), "On the Efficiency of Competitive Programmes in an Infinite-Horizon Model," *R. E. S.*, Vol. 37, 1970, pp. 571–584.

[7] Malinvaud, E., (1953), "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources," *Econometrica*, Vol. 21, 1953, pp. 233–268.

[8] Malinvaud, E., (1662), "Efficient Capital Accumulation : A Crrigendum," *Econometrica*. Vol. 30. 1962, pp. 570–573.

[9] McFadden, D., (1967), "The Evaluation of Development Programmes," *R. E. S.*, Vol. 34, 1967, pp. 25–50.

[10] 二階堂副包, (1960),『現代経済学の数学的方法』, 岩波書店, 1960.

[11] Starrett, D., (1970), "The Efficiency of Competitive Programs, "*Econometrica*, Vol. 38, 1970, pp. 704–711.

[12] 竹之内 脩, (1968),『函数解析』, 朝倉書店, 1968.

---

* 関数と到達可能性条件を巧みに利用したのである. なお, かれの証明方法については小さな疑問があるということは既に述べた通りである.