―研　究―

二種類の消費財の下における アグリゲート最適成長モデル[1)]

福　尾　洋　一

I. は じ め に

Ramsey [8] によって初めて厳密に論じられた最適経済成長の問題はその後長らく顧みられることがなかった．しかし，近年に至って急速にその強力な数々のアイデアが継承され，いまや経済成長理論―あるいはもっと正確に言うならば，経済政策の基礎理論としての経済成長理論―における大きな一研究分野を形成しつつある．Koopmans の論文 [5] はこの最適成長理論の回顧と展望を試みたものである．暫くかれの説明を適宜拝借することによって議論の糸口を探ることにしよう．

中央計画経済においては，最適経済成長の議論がいかに重要であるかは説明を要しないであろう．計画者は経済成長の歩調や性質に対して直接影響力を持っているのであるから，規範的経済理論としての最適成長理論がそのまま実施に移されるかもしれないという強い可能性がある．

一方今日われわれの住む個別企業経済においては，規範的経済理論としての最適成長理論はどの程度の意義を持ち得るであろうか．一般に容認されるごとく，今日においては，いかなる個別企業経済にあっても貯蓄やその他の経済成長の諸相に及ぼす政府の影響力は決して無視し難いものである．従って，政府が貯蓄等の経済諸局面に及ぼす影響力の度合に応じて，最適経済成長の議論が種々の現代個別企業経済下において展開されてしかるべきであろう．

---

1) この論文は1969年度理論・計量経済学会西部部会で発表したものである．討論者の神戸外国語大学上河泰男助教授には実に数多くの有益な教示を頂いた．ここに感謝します．もちろん内容についての一切の責任は筆者が負うものである．

さらにある場合には，資源配分の異時点間の効率という観点から，またある場合には，実現された経済成長率とあるべき経済成長率の比較という観点から，今日の世界に存する種々の経済組織形態を評価比較することも興味深いことである．

さて，本稿で展開される議論の是非あるいは良否は別にしても，上述のような基本的考え方については多くの人々が納得するであろう．われわれの出発点における関心もまたこれと同じである．

以下においてわれわれが取り扱う問題は Solow [9] タイプのアグリゲート資本蓄積モデルを基礎にしている．通常この種のアグリゲート・モデルでは，単一生産物アウトプットは単一消費財アウトプットと単一投資財アウトプットによって構成されている．われわれはこれを若干変化させて，単一生産物アウトプットは二種類の消費財のアウトプットと単一投資財アウトプットによって構成されるものと仮定する．この結果，われわれが採用する最大化の目的たる社会的厚生関数は第Ⅰ消費財消費量と第Ⅱ消費財消費量という二つの独立変数によって定義されることになろう．

ここで消費財の種類を二つに分割した理由について若干触れておこう．実際，消費財のタイプを二つに分類することには種々の異った観点から意味を与えることができるように思われる．まず第一に，物的消費財とサービスを区別してもよいかもしれない．サービスを財貨と見なすか否かについては論議を呼ぶところであろう．しかしそれだけに物的消費財とサービスを区別することは興味深いであろう．われわれに毎年報告されている国民総生産額の中には確かにサービスの価値が含まれている．しかも，公共サービス，教育，運輸通信報道，金融保険，ガス電力供給，芸術芸能その他娯楽等，サービスの現代経済に占める比重は無視しえないものである．もとよりこのような分類は機能的分類とは言い難い．にもかかわらず，形態上の相違が個々人の効用ひいては社会的厚生に異った効果を及ぼすかもしれないのである．

次に食料品と非食料品とを区別するという方法も考えられる．この場合特に興味深いことは，最低生存生活を営むに当っては食料品は不可欠であるが，非食料品については無しで済ますことができるであろうし，一方，食料品については社会的厚生の飽和状態が予想されるのに対して，非食料品にはむしろ社会的厚生の飽和状態は存在しないと考えるのが妥当であるという点である．

以上のいずれの解釈をも受け入れることができないとしても，二種類の消費財が存在す

るというケースから得られる結果と単一消費財のみの存在から得られる結果との間にはどのような相違が見られるであろうか，あるいは全く同一の結果に帰すものであろうか．この点を考察してみるのも必ずしも無意味とは言えないだろう．

いずれにせよ二種類の消費財を想定することによって，両財が社会的厚生に及ぼす効果を明示することができるようになる．

上述の観点から，われわれは Cass [2] [3] の分析法を参考にして一つの封鎖的アグリゲート・モデル経済を考え，ある任意の計画期間にわたって社会的厚生を最大化するという意味において最適な経済成長計画（＝径路）の存在と一意性について論ずるであろう[1]．第Ⅱ節では封鎖的アグリゲート最適成長モデルを提示し，第Ⅲ節では最適性の必要条件を，第Ⅳ節では必要条件を満す計画が実際に最適成長計画となることを明らかにする．第Ⅴ節では最適均斉成長計画の存在と一意性を，第Ⅵ節では任意の計画期間に対する最適成長計画の存在と一意性を示す．第Ⅶ節では視点を少し変え，ある一つのローリング・プランの特性を記述する．最後の節は若干のまとめに充てられる．

Ⅱ．最適成長モデル

二種類の生産要素すなわち同質的労働力と同質的資本財を使用して単一生産物を得る封鎖経済を考えることにしよう．この経済においては科学技術上の変化はなく，生産可能性集合は既知とされる．それは，規模に関して収穫不変，各生産要素の限界生産力は正，両要素間の限界代替率は逓減という性質をもつ二回連続的偏微分可能なアグリゲート生産関数によって表現されるものとする．以下においては全関連諸量を労働力1単位当りで表示することにすれば，労働力1単位当りの資本財ストック（＝資本労働力比率）k で定義された社会的生産関数 f は

(1) $y=f(k)\equiv f\in C^2$

と表現され，$k>0$ に対して二回連続的微分可能である[2]．ここで y は労働力1単位当りで表示した単一生産物のアウトプットを示している．議論を扱い易くするために，生産関

1) 以下において，われわれは〝計画〟と〝径路〟とは同一内容を意味する代替的用語として使用する．

2) 簡単化のため，われわれは労働力1単位＝労働者1人と考える．従って労働力＝労働人口である．

数についての上述の仮定に多少追加的仮定を施して，

$$(2)\quad \begin{aligned} &f>0,\ f'>0,\ f''<0\ (0<k<\infty \text{ に対して}) \\ &\lim_{k\to 0} f=0,\quad \lim_{k\to\infty} f=\infty \\ &\lim_{k\to 0} f'=\infty,\quad \lim_{k\to\infty} f'=0 \end{aligned}$$

が成立しているものとしよう．

労働力は外生的に与えられる率 n で成長し，かつすべて雇用されるものと仮定される．

唯一の新財貨供給源たる経常アウトプットは第Ⅰ消費財に対する消費，第Ⅱ消費財に対する消費及び粗投資に配分される．かくて，労働力1単位当りの第Ⅰ消費財への消費配分及び第Ⅱ消費財への消費配分をそれぞれ c_{I}，c_{II} で表わし，労働力1単位当りの粗投資を z によって表わせば，任意の時刻において実行可能な代替的配分の集合は

$$(3)\quad \begin{aligned} &y(t)=c_{\mathrm{I}}(t)+c_{\mathrm{II}}(t)+z(t) \\ &c_{\mathrm{I}}(t)\geqq 0,\ c_{\mathrm{II}}(t)\geqq 0,\ z(t)\geqq 0 \end{aligned}$$

によって与えられる．

任意の時刻における新資本財の形成は粗投資から資本財ストックの減耗を減じた部分として定義される．従って，資本財ストックの減耗率はコンスタント μ によって外生的に与えられるものと仮定すると，任意の時刻における資本労働力比率の変化率 $\dot{k}$ は

$$(4)\quad \dot{k}(t)=z(t)-\lambda k(t),\ \text{ここで}\ \lambda\equiv n+\mu$$

によって表わされる．[1]

この封鎖的モデル経済において採用される社会的厚生関数 u は二種類の消費財の消費量と関連をもっている．すなわち，任意の時刻における社会的厚生は労働力1単位当りで表示された両消費財に対する配分 c_{I} 及び c_{II} を通じて測定されるであろう．かくて社会的厚生関数 u は

$$(5)\quad u(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})\equiv u\in C^2$$

と表示され，正の未知関数 c_{I} 及び c_{II} に対して二回連続的偏微分可能である．

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial c_{\mathrm{I}}\equiv u_1, && \partial u/\partial c_{\mathrm{II}}\equiv u_2 \\ &\partial^2 u/\partial c_{\mathrm{I}}^2\equiv u_{11}, && \partial^2 u/\partial c_{\mathrm{II}}^2\equiv u_{22} \\ &\partial^2 u/\partial c_{\mathrm{II}}\partial c_{\mathrm{I}}\equiv u_{12}, && \partial^2 u/\partial c_{\mathrm{I}}\partial c_{\mathrm{II}}\equiv u_{21} \end{aligned}$$ [2]

1) 以下においては混乱の生ずる恐れのない限り未知関数の独立変数 t は省略する．

2) $u\in C^2$ より，$u_{12}=u_{21}$ $(0<c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}<\infty$ に対して).

とし，われわれは

$$u_1>0,\ u_2>0,\ u_{11}<0,\ u_{22}<0\ (0<c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}<\infty \text{ に対して})$$

$$(6)\quad \lim_{c_{\mathrm{I}}\to 0} u_1=\infty,\quad \lim_{c_{\mathrm{I}}\to\infty} u_1=0 \quad (0<c_{\mathrm{II}}<\infty \text{ に対して})$$

$$\lim_{c_{\mathrm{II}}\to 0} u_2=\infty,\quad \lim_{c_{\mathrm{II}}\to\infty} u_2=0 \quad (0<c_{\mathrm{I}}<\infty \text{ に対して})$$

が成立するものと仮定する．(6)の最初の行は c_{I} 及び c_{II} の正値に対して限界厚生は正で逓減することを意味している．第二行第一式は，第Ⅰ消費財の限界厚生は第Ⅱ消費財の任意の所与正消費及び第Ⅰ消費財のゼロ消費に対して無限に大きくなるという仮定である．この仮定は第Ⅰ消費財についての最低生存水準の設定を連続関数に矛盾しない形で一般化したものである[1]． 議論を単純ならしめるために全く対称的仮定が第Ⅱ消費財に関しても採用される．すなわち，第Ⅱ消費財の限界効用は第Ⅰ消費財の任意の所与の正消費及び第Ⅱ消費財のゼロ消費に対して無限に大きくなるであろう．このようにして両消費財に対して導入された最低生存水準の結果，任意の最適成長計画は，もしそのような計画が存在するならば，c_{I} あるいは c_{II} のどちらか一方または双方共がゼロになるような消費配分をすることはないであろう．第三行第二式は，第Ⅱ消費財の限界厚生は第Ⅰ消費財の任意の所与の正消費及び第Ⅱ消費財の無限消費に対してゼロに向うという仮定であるが，これは第Ⅰ消費財の任意の所与の正消費に対して第Ⅱ消費財の厚生の飽和状態はないという仮定を連続関数に矛盾しない形で一般化している[2]． ここでも議論の単純化のために対称的仮定を第Ⅰ消費財に関しても採用する．すなわち，第Ⅱ消費財の任意の所与の正消費に対して第Ⅰ消費財の厚生の飽和状態はない．なお，

$$(7)\quad \lim_{c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}\to 0} u_i\ \&\ \lim_{c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}\to\infty} u_i \quad (i=1,\ 2) \text{ に関しては定義しない．}$$

関数 u について，最後に，

$$(8)\quad u_{11}u_{22}-u_{12}^2\equiv\omega>0\ (0<c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}<\infty \text{ に対して})$$

を仮定しよう．例えば，

$$\min\ (|u_{11}|,\ |u_{22}|)>|u_{12}|,\ (0<c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}<\infty \text{ に対して})$$

すなわち，両消費財に関して，任意の所与の正消費に対して，同種類の消費財が限界厚生に及ぼす効果は異種類のそれが限界厚生に及ぼす効果よりも大きいという場合には，仮定

1) Cass〔3〕p. 835 参照.
2) Cass〔3〕p. 835 参照.

(8)は当然満されている．とにかく仮定(6)(8)より，u に関する Hesse 行列

$$U \equiv \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix},\ (0<c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}<\infty\ \text{に対して})$$

は負定値となる．

次にわれわれの封鎖的モデル経済の最大化目標を定義しよう．まず，以下の便宜をはかって，歴史的に与えられた正の初期資本労働化率

(9) $k(0)\equiv k_0>0$

の下で，

$$0\leqq t\leqq T\leqq\infty$$

に対して，(1)(3)(4)を満す計画 $(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}},\ z,\ k)$ を実行可能計画と呼ぶことにする．ここで T はわれわれが考察対象として取り上げる計画期間の終端時刻であり，それは有限値のこともあるし無限大のこともある．T は外生的に与えられる．

さてわれわれの目標は，初期条件(9)の下で，終端条件

(10) $k(T)\geqq k_T$，ここで $0\leqq k_T<\infty$

を満し，かつ割引された社会的厚生の計画期間を通じての積分

(11) $\int_0^T u(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})e^{-\delta t}dt$，ここで $\delta>0$

を最大にする実行可能計画 $(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}},\ z,\ k)$ を特定化することである．なお，k_T は初期時刻において外生的に設定される終端時刻の資本労働力比率に対する制約条件，すなわち，終端資本労働力比率 $k(T)$ に対して満すべき条件として外生的に設定された終端資本労働力比率の最小目標である．言うまでもなく k_T は非負である．

δ は社会的厚生に対する割引率で所与不変とする．われわれは $\delta>0$ を仮定したが，この仮定には異論がないわけではない．Ramsey モデル[8]のように計画期間が無限$(T=\infty)$である場合には，$\delta>0$ なる仮定は任意の実行可能計画 $(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}},\ z,\ k)$ に対して定積分(11)をある有限値に収束させるための一つの方策になっている．しかし，Koopmans [5] が指摘するように，この仮定が意味するところは近い将来の世代ほど優遇されるということであり，すべての人間は平等に取り扱われるべきであるという倫理的思考からは逸脱するものと言えよう．Ramsey の仮定をわれわれの封鎖的モデル経済にあてはめるならば，それは $\delta=0$ の状況に対応している．この場合定積分(11)は有限値に収束しないかもしれない．この困難を克服するために，かれは消費に関する至福状態（＝厚生の飽和状態）ないしは資

本財ストックに関する飽和状態（＝生産の飽和状態）の存在を想定した[1]. かくして $T=\infty$ の場合には δ のもつ意味は原理上の問題にかかわってくる[2]. 一方計画期間が有限（$T<\infty$）である場合には，δ が有限値でありさえすれば任意の実行可能計画（c_{I}, c_{II}, z, k）に対して定積分⑾は常に有限値を取るので，δ が非正値を取るという可能性も容認される[3]. 従って $T<\infty$ の場合には先に生じた原理上の問題はさして深刻なものにはならない[4].

この節の最後に $T<\infty$ のケースに生ずる固有の問題を検討しておこう．$T<\infty$ かつ $k_T>0$ の時，われわれの目標が意味をもつためには，すなわち，初期条件⑼の下で終端条件⑽を満しかつ定積分⑾を最大化する実行可能計画（c_{I}, c_{II}, z, k）が存在するためには，組（k_T, T）は，k_T が計画期間内の実行可能計画の集合に属する少くとも一つの成分について達成可能となるように，選ばれなければならない．この実行可能かつ達成可能条件を Cass［3］に従って次のように書こう：$\hat{k}$ 及び関数 g を

⑿ $f(\hat{k})=\lambda k$

⒀ $g(k_T,\ T)=T-\int_{k_0}^{k_T}(f(k)-\lambda k)^{-1}dk$ （$k_0\leqq k_T$ に対して）

$$=\int_{k_0}^{max(k_T,\hat{k})}(f(k)-\lambda k)^{-1}dk-T \quad (k_0>k_T \text{ に対して})$$

とすれば，$k_0\neq\hat{k}$ に対しては，

⒁ $(k_T,\ T)\in A=\{(k_T,\ T)\,|\,0\leqq k_T\leqq max(k_0,\ \hat{k}),\ g(k_T,\ T)\geqq 0\}$.

なお，⑿は，$k=\hat{k}$ において労働力1単位当りの単一生産物アウトプットは資本財ストックの減耗と人口成長によって結果する資本労働力比率の減少分に等しい，従って，$k=\hat{k}$ に対してはアウトプットがすべて資本形成に充てられるならば，そしてその時に限り，資本労働力比率は変化しないことを示している．⒀の最初の式は，$k_0\leqq k_T$ の場合における，T と k_0 から k_T に至る実行可能な最小必要時間との差を定義し，残る式は，$k_0>k_T$ の場合における，k_0 から k_T に至る実行可能な最大許容時間と T との差を定義している．k_T に

1) Ramsey［8］pp. 544–5. 参照.
2) 定積分⑾が収束しないのかもしれないという困難を回避するためのもう一つの有力な方法は overtake criterion の採用である．この基準については，例えば，Weizsäcker［10］を参照.
3) しかしこの場合にも，別の理由から δ の下限が設定されよう．Cass［3］p. 841 参照.
4) $T<\infty$ の場合には，計画期間を過ぎた後の経済状態についてわれわれが示しうるのは，終端時刻以後の実行可能径路の集合のみである.

至る実行可能最小必要時間ないしは実行可能最大許容時間は両消費財のゼロ消費に対して定義されるものであるから，⒀における $f(k)-\lambda k$ は $\dot{k}$ を示している．また⑿から明らかなように，⒁の $max(k_0, \hat{k})$ は k_0 から出発する達成可能最大資本労働力比率を示している．$k_T \leqq k_0 = \hat{k}$ に対しては，任意の所与の T について k_T は常に実行可能かつ達成可能である．

Ⅲ．最適成長計画の必要条件

最適成長計画に関する必要条件を列挙するために，Понтрягин（ポントリャーギン）等［7］によって初めて厳密な証明が与えられた最大値原理を利用する.[1)]

まず，α 及び β を

⒂
$$z(t)/y(t) \equiv \alpha(t) \equiv \alpha$$
$$c_{II}(t)/y(t) \equiv \beta(t) \equiv \beta$$

によって定義すると，

$$(\alpha,\ \beta) \in \bar{R} = \{(\alpha,\ \beta) \mid 0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \beta \leqq 1,\ 0 \leqq \alpha+\beta \leqq 1\}$$

が成立している．われわれは α と β を制御変数とする．

次に補助未知関数（＝補助変数）$\phi(t)$

⒃ $\phi(t) = q(t)e^{-\delta t}$ [2)]

を導入して Hamilton 関数 Π を

⒄ $\Pi(\phi, k, \alpha, \beta, t) = u(c_I,\ c_{II})e^{-\delta t} + \phi\dot{k}$

と定義し，⒃⒄を考慮して

$$\Pi(\phi, k, \alpha, \beta, t) = H(q, k, \alpha, \beta, t) \equiv H$$

とおけば，(1)(3)(4)⒂⒃より結局 Hamilton 関数 H は

⒅ $H = [u((1-\alpha-\beta)f,\ \beta f) + q \cdot (\alpha f - \lambda k)]e^{-\delta t}$

と書かれる．今 q を厚生測定単位で表示したｋ1単位の帰属価格と解釈し，従って ϕ を初期を基準として割引かれた帰属価格と解釈すれば，⒅の右辺［　］内すなわち $u+q\dot{k}$ は

1) 特に文献〔7〕p. 63. 定理3*参照．なおこの定理の一層初等的証明についてはБоптянский（ボルチャンスキー）〔1〕pp. 276–7. V. 3., V. 4 及び pp. 285–90 を参考にするとよい．ただし，〔1〕の定理を援用するためには $u(c_I,\ c_{II}) > 0$ ($0 < c_I,\ c_{II} < \infty$ に対して）という仮定を導入する必要がある．

2) 以下においては ϕ 及び q の変数 t を省略する．

厚生測定単位で表示した労働力1単位当りの純アウトプット価値を示し，H は初期を基準とした純アウトプットの現在価値を示している．

以上の準備の下にポントリャーギン等の諸定理を直接採用するならば，われわれは以下のような最適性の必要条件を得る．

【A】 $-\partial H/\partial k=\dot{\phi}$ ($0\leqq t\leqq T$ に対して)

すなわち，最適成長計画の下では，計画期間を通じて，資本財の割引きされた純価値生産性と割引された帰属価格の変化率は絶対値が等しく符号が異るであろう．(16)(18)よりこの条件は

(19) $\dot{q}=(\delta+\lambda)q-\{(1-\alpha-\beta)u_1+\beta u_2+\alpha q\}f'$ ($0\leqq t\leqq T$ に対して)

と書かれるが，このことは，計画期間を通じて，q は厚生測定単位で表示した資本財の限界純価値生産性についてあたかも完全予測可能であるかのごとくに変化しなければならないことを意味している．

【B】 最適成長計画に対応する制御変数を $\alpha^0(t)$, $\beta^0(t)$ とするとき．

$$H(k,\ q,\ \alpha^0,\ \beta^0,\ t)=\max_{(\alpha,\beta)\in\bar{R}}H(k,\ q,\ \alpha,\ \beta,\ t)\quad (0\leqq t\leqq T \text{ に対して})$$

すなわち，最適成長計画の下では，計画期間を通じて，所与の k 及び q に対して，α 及び β は純アウトプットの現在価値が最大となるように選ばれるであろう．この条件は，$0\leqq t\leqq T$ 及び $k>0$ に対して

$$\begin{cases}\partial H/\partial\alpha<0 & \vee & q<u_1\longrightarrow\alpha^0=0\\ \partial H/\partial\alpha=0 & \vee & q=u_1\longrightarrow 0\leqq\alpha^0\leqq 1\\ \partial H/\partial\alpha>0 & \vee & q>u_1\longrightarrow\alpha^0=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\partial H/\partial\beta<0 & \vee & u_1>u_2\longrightarrow\beta^0=0\\ \partial H/\partial\beta=0 & \vee & u_1=u_2\longrightarrow 0\leqq\beta^0\leqq 1\\ \partial H/\partial\beta>0 & \vee & u_1<u_2\longrightarrow\beta^0=1\end{cases}$$

となることを意味している．ところで，もしある $0\leqq t_1\leqq T$ なる t_1 に対して $\alpha^0(t_1)=1$ になったとすれば，そのときには $c_{\mathrm{I}}=c_{\mathrm{II}}=0$ であるが，(7)を考慮すれば，このような t_1 が存在する場合についてはいかなる特定の最適成長計画をも定義することはできない．またもしある $0\leqq t_2\leqq T$ なる t_2 に対して $\beta(t_2)=0$ あるいは $\beta(t_2)=1$ になったとすれば，そのときには $c_{\mathrm{II}}=0$ あるいは $c_{\mathrm{I}}=0$ となるが，(6)及び(19)より，この場合にもやはりいかな最適成長る特定の計画をも見出すことができない．かくて特定の最適成長計画に対応する条件【B】は次のように書くことができる：

(20)
(1) $q<u_1(c_{\mathrm{I}}, c_{\mathrm{II}}) \longrightarrow \alpha^0=0$ ($0\leqq t\leqq T$ に対して)
(2) $q=u_1(c_{\mathrm{I}}, c_{\mathrm{II}}) \longrightarrow 0\leqq\alpha^0<1$ ($0\leqq t\leqq T$ に対して)

(21) $u_1(c_{\mathrm{I}}, c_{\mathrm{II}})=u_2(c_{\mathrm{I}}, c_{\mathrm{II}}) \longrightarrow 0<\beta^0<1$ ($0\leqq t\leqq T$ に対して)

ここで(20)は，最適成長計画が特定化されているならば，q は第I消費財に関する社会的限界厚生 u_1 を上回ることはなく，もし q が厳密な意味で u_1 よりも小さければ粗投資は行なわれておらないということを意味する．一方(21)は，特定の最適成長計画の下では両消費財に関する社会的限界厚生は均等であることを意味している．

【C】 $\phi(T)(k(T)-k_T)=0$

すなわち，最適成長計画の下では，終端資本労働力比率が最小目標資本労働力比率を厳密な意味で上回るならば，すなわち終端時刻において資本過剰ならば，割引された終端帰属価格はゼロになり，$\phi(T)>0$ ならば，二つの資本労働力比率は丁度等しい，すなわち資本に過不足がないことを意味している．ところで，無期限計画期間に対しては資本労働力比率について正の最小目標を設定することは経済的観点から言って意味がないと考えてよいだろう．それゆえわれわれは $k_\infty=0$ と仮定する．かくしてこの条件は

(22)
(1) $q(T)(k(T)-k_T)=0$ ($T<\infty$ に対して)
$\lim_{t\to\infty} q(t)e^{-\delta t}k(t)=0$ ($T=\infty$ に対して)

と書くことができる．

最後に，経済的観点から

(23) $q\geqq 0$ ($0\leqq t\leqq T$ に対して)

を条件付けることが許されるであろう．[1)]

Ⅳ．必要条件の十分性

(2)(6)(8)によって，初期条件(9)の下で終端条件(10)を満す実行可能計画（c_{I}, c_{II}, z, k）は，最適性の必要条件(19)〜(23)を満すとき，実際最適成長計画となる．このことを示すために(9)(10)(19)〜(23)を満す実行可能計画が存在するものと仮定し，これを

$$P^0\equiv(c_{\mathrm{I}}^0,\ c_{\mathrm{II}}^0,\ z^0,\ k^0,\ q^0:\ 0\leqq t\leqq T)$$

で示そう．さらに，$0\leqq\tau\leqq T$ なるある τ に対して，$I(\tau)$を τ のまわりのある開区間とすれば，

1) この点については Cass〔3〕p. 845 参照.

(24) $k^0(t) \neq k^1(t)$ $(t \in I(\tau)$ に対して)

という意味において P^0 とは異る任意の実行可能計画と(23)を満す q の組を

$$P^1 \equiv (c_{\mathrm{I}}^{1},\ c_{\mathrm{II}}^{1},\ z^1,\ k^1,\ q^1 : 0 \leqq t \leqq T)$$

で示し，

$$u(c_{\mathrm{I}}^{0},\ c_{\mathrm{II}}^{0}) \equiv u^0,\ u(c_{\mathrm{I}}^{1},\ c_{\mathrm{II}}^{1}) \equiv u^1$$

とおこう．われわれは

$$\int_0^T u^0 e^{-\delta t} dt > \int_0^T u^1 e^{-\delta t} dt$$

なることを明らかにする．

u^1 を $(c_{\mathrm{I}}^{0},\ c_{\mathrm{II}}^{0})$ のまわりで展開すると，

$$(\bullet) = (c_{\mathrm{I}}^{0} + \theta(c_{\mathrm{I}}^{1} - c_{\mathrm{I}}^{0}),\ c_{\mathrm{II}}^{1} + \theta(c_{\mathrm{II}}^{1} - c_{\mathrm{II}}^{0})),\ 0 < \theta < 1$$

とおけば，

$$u^1 = u^0 + (u_1^0, u_1^0)(c_{\mathrm{I}}^{1} - c_{\mathrm{I}}^{0}, c_{\mathrm{II}}^{1} - c_{\mathrm{II}}^{0})' + \frac{1}{2}(c_{\mathrm{I}}^{1} - c_{\mathrm{I}}^{0}, c_{\mathrm{II}}^{1} - c_{\mathrm{II}}^{0})\ U(\bullet)(c_{\mathrm{I}}^{1} - c_{\mathrm{II}}^{1}, c_{\mathrm{II}}^{1} - c_{\mathrm{II}}^{0})'$$ [1]

となるが，U は負定値であるから $c_{\mathrm{I}}^{1} = c_{\mathrm{I}}^{0}$ あるいは $c_{\mathrm{II}}^{1} = c_{\mathrm{II}}^{0}$ というケースをも考慮して，右辺第3項は非正値を取る．それゆえ，

$$\begin{aligned}
u^0 - u^1 &\geqq u_{\mathrm{I}}^0 \bullet (c_{\mathrm{I}}^{0} - c_{\mathrm{I}}^{1}) + u_1^0(c_{\mathrm{II}}^{0} - c_{\mathrm{II}}^{1}) \\
&= u_1^0 \bullet (c_{\mathrm{I}}^{0} - c_{\mathrm{I}}^{1}) + u_2^0 \bullet [\{f(k^0) - z^0 - c_{\mathrm{I}}^{0}\} - \{f(k^1) - z^1 - c_{\mathrm{I}}^{1}\}] \quad \text{((1)(3)(21)より)} \\
&= u_1^0 \bullet \{f(k^0) - f(k^1)\} - u_1^0 \bullet (z^0 - z^1) + q^0(z^0 - z^1) - q^0(z^0 - z^1) \\
&\geqq u_1^0 f'(k^0)(k^0 - k^1) +)q^0 - u_1^0)(z^0 - z^1) - q^0(z^0 - z^1) \quad \text{((2)より)} \\
&\geqq u_1^0 f'(k^0)(k^0 - k^1) - q^0[(\dot{k}^0 + \lambda k^0) - (\dot{k}^1 + \lambda k^1)] \quad \text{((20)及び(4)より)} \\
&= [u_1^0 f'(k^0) - \lambda q^0](k^0 - k^1) - q^0(\dot{k}^0 - \dot{k}^1) \\
&= -(\dot{q}^0 - \delta q^0)(k^0 - k^1) - q^0(\dot{k}^0 - \dot{k}^1) \quad \text{((19)(20)(21)より)}
\end{aligned}$$

となり，(24)によって，

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u^0 - u^1) e^{-\delta t} dt &> -\int_0^T [(\dot{q}^0 - \delta q^0)(k^0 - k^1) + q^0(\dot{k}^0 - \dot{k}^1)] e^{-\delta t} dt \\
&= -\left[q^0 e^{-\delta t}(k^0 - k^1)\right]_0^T \\
&= -q^0(T)(k^0(T) - k^1(T)) e^{-\delta t}
\end{aligned}$$

が成立している．ここで，$T = \infty$ の場合には (22-2) より直ちに結論を得る．一方 $T < \infty$ の場合には，(22-1) より，$k^0(T) > k_T$ なら $q^0(T) = 0$ であるし，$k^0(T) = k_T \leqq k^1(T)$ なら

1) $(c_{\mathrm{I}}^{1} - c_{\mathrm{I}}^{0},\ c_{\mathrm{II}}^{1} - c_{\mathrm{II}}^{0})'$ は列ベクトルを意味している．

$k^0(T)-k^1(T)\leqq 0$ となってやはり結論を得る.

V. 最適均斉成長計画の存在と一意性

この節では，計画期間を通じて，時刻に関する未知関数の組（c_{I}, c_{II}, z, k, q）の変化率がゼロとなる最適成長計画，すなわち最適均斉成長計画

$$P^* \equiv (c_{\mathrm{I}}^*,\ c_{\mathrm{II}}^*,\ z^*,\ k^*,\ q^* : 0\leqq t\leqq T)$$

が存在するかどうかを検討しよう.

ところで，P^* が特定化されるためには，Ⅲ節で見られた議論より均斉資本労働力比率 k^* は正値で，かつ

$$(\alpha^*,\ \beta^*)\in R=\{(\alpha,\ \beta)\,|\,0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ \alpha+\beta<1\}$$

でなければならない[1)]. 従って(1)(4)(15)(19)(20)(21)より P^* は

(25) $\dot{q}^*=0 \quad \vee \quad f'(k^*)=\delta+\lambda$

(26) $\dot{k}^*=0 \quad \vee \quad \alpha^* f(k^*)=\lambda k^*$

(27) $c_{\mathrm{I}}^*=(1-\alpha^*-\beta^*)f(k^*)$

(28) $c_{\mathrm{II}}^*=(1-\beta^*)f(k^*)$

(29) $q^*=u_1(c_{\mathrm{I}}^*,\ c_{\mathrm{II}}^*)=u_2(c_{\mathrm{I}}^*,\ c_{\mathrm{II}}^*)$

によって定義される. P^* の存在と一意性は次のプロセスをたどることによって明らかにされるであろう. まず(2)(25)より k^* が一意的に決定される. 再び(2)を考慮すれば(26)より α^* が確定する. 次に(6)(27)(28)及び(29)の後半の方程式より c_{I}^*, c_{II}^* 及び β^* が無差別表を通じて一意的に決定される. かくて(29)によりて q^* もまた一意的に決定されている. さらに，このようにして決定された P^* について $(\alpha^*,\ \beta^*)\in R$ は明らかである.

P^* の特性をもう少し研究しておこう. P^* については(24)が成立しているのであるから，P^* の極く近傍における最適成長計画についても $(\alpha,\ \beta)\in R$ の関係が成立している. かくて(20-1) (21)より，P^* の極く近傍における最適成長計画上では

(30) $dq=u_{11}dc_{\mathrm{I}}+u_{12}dc_{\mathrm{II}}=u_{21}dc_{\mathrm{I}}+u_{22}dc_{\mathrm{II}}$

が成立し，

(31)
(1) $c_{\mathrm{I}}'(q)=\dfrac{1}{\omega}(u_{22}-u_{12})$
(2) $c_{\mathrm{II}}'(q)=\dfrac{1}{\omega}(u_{11}-u_{12})$

---

1) $(\alpha^*.\beta^*)$ は P^* に対応する α 及び β の組である.

を得る．今，方程式系

$$(32)\quad \begin{aligned} \dot{q}(k,\ q) &= (\delta-\lambda-f'(k))q \\ \dot{k}(k,\ q) &= f(k)-c_{\mathrm{I}}(q)-c_{\mathrm{II}}(q)-\lambda k \end{aligned}$$

を考え，その定義域を（k^*, q^*）の極く近傍の開領域としよう．(32)を（k^*, q^*）のまわり で展開し，2次以後の項を無視すると，

$$\xi \equiv q-q^*,\quad \kappa \equiv k-k^*$$

として

$$(33)\quad \begin{aligned} \dot{\xi} &\qquad\qquad + f''(k^*)q^*\kappa = 0 \\ \{c_{\mathrm{I}}'(q^*)+c_{\mathrm{II}}'(q^*)\}\xi + \dot{\kappa} &\qquad\qquad - \delta\kappa = 0 \end{aligned}$$

と書かれる．これより特性根 x は

$$(34)\quad x = \frac{1}{2}[\delta \pm \sqrt{\delta^2+4f''(k^*)q^*\{c_{\mathrm{I}}'(q^*)+c_{\mathrm{II}}'(q^*)\}}]$$

となっている．ここで

$$(35)\quad u_{11}+u_{22}-2u_{12} \equiv \sigma$$

とおくと，Hesse 行列 U は正の c_{I} 及び c_{II} に対して負定値であることから，$\sigma<0$ を知り，(31)より

$$c_{\mathrm{I}}'(q^*)+c_{\mathrm{II}}'(q^*) = \frac{\sigma}{\omega} < 0$$

が分る．一方，$q^*>0$, $f''(k^*)<0$であることから，結局 x の根号内第2項の符号は正となり，（k^*, q^*）が鞍点であることが明らかにされた．

Ⅵ．任意の計画期間に対する最適成長計画の存在と一意性

いよいよわれわれの中心目標たる任意の計画期間に対する特定の最適成長計画の存在と一意性の問題を研究する．そのための準備として，(4)～(19)(23)を満す（k, q）の時間経過に伴うビヘイヴィアを調べることにしよう．

最初に，(4)(20)(21)及び $\dot{k}=0$ を満足する関数 $q(k)$ を

$$q(k)\,|_{\dot{k}=0} \equiv \psi(k) \equiv \psi$$

で表わすならば，（k, q）平面上の正象限内では(4)(15)より $\dot{k}=0$ は $\alpha>0$ を意味するから，関数 ψ は

$$\psi = u_1(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}}) = u_2(c_{\mathrm{I}},\ c_{\mathrm{II}})$$

を満さねばならない．かくして(1)(3)を合せて考慮することによって

(36) $\psi'(k)=\frac{\omega}{\sigma}(f'(k)-\lambda)$

を得る．$\frac{\omega}{\sigma}<0$ より，

(37) $f'(\tilde{k})=\lambda$ （$k=\tilde{k}$ に対して）

とすれば[1]，$k \neq \tilde{k}$ のときには

(38) $sgn\psi'(k)=sgn(k-\tilde{k})$

である．明らかに $k=\tilde{k}$ に対しては $\psi'(k)=0$ が成立する．

次に(19)(20)(21)及び $\dot{q}=0$ を満す関数 $q(k)$ を

$$q(k)\,|_{\dot{q}=0}\equiv\Psi(k)\equiv\Psi$$

で表わすことにする．ところで Ψ 上では $\alpha\neq1$ であるが，もし (20-2) が成立しているならば

$$q\geqq u_1((1-\beta)f(k),\ \beta f(k))$$

が成立し，特に $0<\alpha<1$ ならば厳密な不等号が成立する．一方，(20-1) が成立しているならば，当然

$$q<u_1((1-\beta)f(k),\ \beta f(k))$$

である．この点に留意し $(k,\ q)$ 平面上の正象限に着目すれば，$0<\alpha<1$ に対しては，$\dot{q}=0$ の必要十分条件は $k=k^*$ であるから Ψ は $k=k^*$ によって与えられ，一方 $\alpha=0$ に対しては Ψ は(19)(21)から導かれる．つまり関数 Ψ は

(39)
(1) $k=k^*$ 　　$(q\geqq u_1((1-\beta)f(k^*),\ \beta f(k^*))$ に対して)
(2) $\Psi=u_1f'(k)/(\delta+\lambda)$ $(q<u_1((1-\beta)f(k^*),\ \beta f(k^*))$ に対して)

と書くことができる．$z=0$，(1)(3)(21)及び(2)(8)(35)より，(39-2) の k に関する導関数の符号

---

1) (2)と $\delta>0$ から $k^*<\tilde{k}$．一方 $\varepsilon(\neq\hat{k})>0$ に対して，

$$f(\varepsilon)=f(\hat{k})+f'(\hat{k})(\varepsilon-\hat{k})+\frac{1}{2}f''(\hat{k})+\theta\varepsilon)(\varepsilon-\hat{k})^2$$
$$=f(\hat{k})-f'(\hat{k})\hat{k}+[f'(\hat{k})\varepsilon+\frac{1}{2}f''(\hat{k}+\theta\varepsilon)(\varepsilon-\hat{k})^2].$$

ここで $0<\theta<1$ である．右辺［　］内の符号は $\varepsilon\to0$ に対して負となるから，結局

$$0=\lim_{\varepsilon\to0}f(\varepsilon)<f(\hat{k})-f'(\hat{k})\hat{k}.$$

(12)(37)より $f(\hat{k})=\lambda\hat{k}=f'(\tilde{k})\hat{k}$ であるから，

$$f'(\hat{k})<f'(\tilde{k})$$

となり，再び(2)を見て，$\tilde{k}<\hat{k}$を知る．従って資本労働比率の表記法に関するわれわれの定義(12)(25)(37)は

$$k^*<\tilde{k}<\hat{k}$$

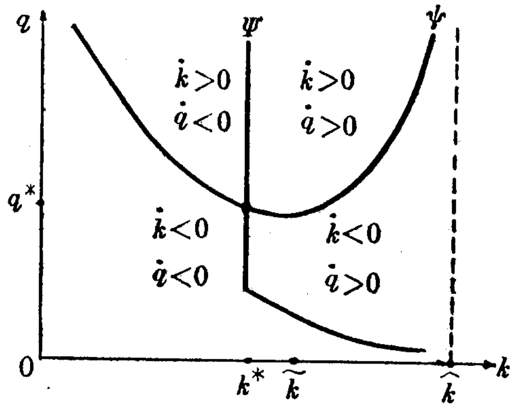
なる関係を成立させている．

Ψは

(40) $\Psi'(k)=(\omega f'^2+\sigma u_1 f'')/(\delta+\lambda)\sigma<0$ ($0<k<\infty$ に対して)

となる.

以上の考察より，(36)〜(40)を利用して $(k,\ q)$ 平面の正象限上に関数 ψ 及び Ψ を描くならば第1図を得る.[1)]



第 1 図

第1図は ψ と Ψ によって四つの領域に分けられるが，それらは $\dot{k}$ 及び $\dot{q}$ の符号を区分するものである．この点を明らかにするために

(41)
(1) $\partial\dot{k}/\partial q=-\sigma/\omega>0$ ($0<\alpha<1$ に対して)
$=0$ ($\alpha=0$ に対して)
(2) $\partial\dot{q}/\partial k=-f''q>0$ ($0<\alpha<1$ に対して)
$=-\dfrac{1}{\sigma}(\omega f'^2+\sigma u_1 f'')>0$ ($\alpha=0$ に対して)

となることに注目しよう．(41–1) は (20–2) (21)(32)(4)及び(8)(35)より，(41–2) は(19)(20)(21)(1)(3)及び(2)(8)(35)より得たものである．(41)によって，ψ 曲線の上方では $\dot{k}>0$，下方では $\dot{k}<0$ となり，Ψ 曲線の左側では $\dot{q}<0$，右側では $\dot{q}>0$ となることが分る．また，$\alpha=0$ 従って $z=0$ の時には(4)より $\dot{k}<0$ であるから，(39–2) によって与えられる Ψ は同じ k の値に対して，常に ψ より下方に位置している.

最後に $\alpha=0$ のときに (20–2) (21)を成立させる関数 $q(k)$ を

$q(k)|_{\alpha=0}\equiv\eta(k)\equiv\eta$

で示すと，(4)(15)より $k>0$ に対して $\dot{k}<0$ であるから，η は $\dot{k}<0$ の領域に属し，それゆえ

(42) $\eta<\psi$ ($0<k<\infty$ に対して)

が成立している．(1)(3)及び(2)(8)(35)より，η の k に関する導関数の符号は

(43) $\eta'(k)=\omega f'/\sigma<0$ ($0<k<\infty$ に対して)

1) 第1図は関数 ψ 及び Ψ の2次導関数の符号を考慮することなしに描かれており，必ずしも正しいものとは言い難い．しかし2次導関数の符号は議論の帰結に何ら重要な影響を及ぼさない．なお第1図は Cass〔2〕〔3〕に見られるものと同じ性質をもつものである.

となる．また，(39-2) と η の定義の仕方から

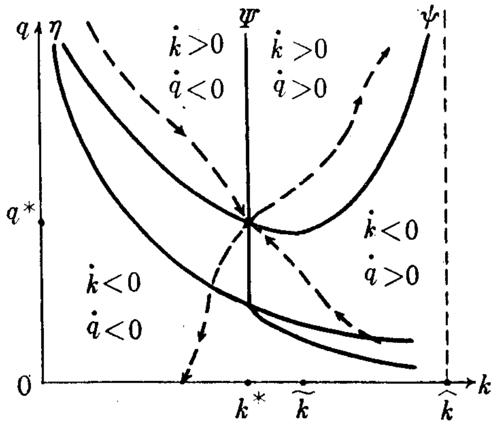
(44)
(1) $\eta > \Psi|_{\alpha=0}$ ($k > k^*$ に対して)
(2) $\eta = \Psi|_{\alpha=0}$ ($k = k^*$ に対して)

であることを知る．

ここで前節の最後に示された“(k^*, q^*) は鞍点である” ことを想起しよう．微分方程式論の定理の教えるところによってわれわれは次のことを知る：

$t\to\infty$ に対して，(k^*, q^*) に漸近する方程式系(32)の二つの解径路が存在し，これに (k^*, q^*) を付け加えると微分可能な連続曲線が得られる．[1)]

以上考察した諸点を考慮すれば次の第２図を得る．



第 2 図

さて，無期限計画期間 ($T=\infty$) の場合の最適成長計画の存在と一意性についてはこれまでの分析から容易に示すことができる．すなわち，初期条件(9)が与えられるとき，$t\to\infty$ に対して (k^*, q^*) に漸近する方程式系(32)の解径路上に対応する初期帰属価格

$$q(0)\equiv q_0>0$$

を設定するならば，(k_0, q_0) を初期条件とし，

$$(k(t),\ q(t))\to(k^*,\ q^*)\quad(t\to\infty \text{ に対して})$$

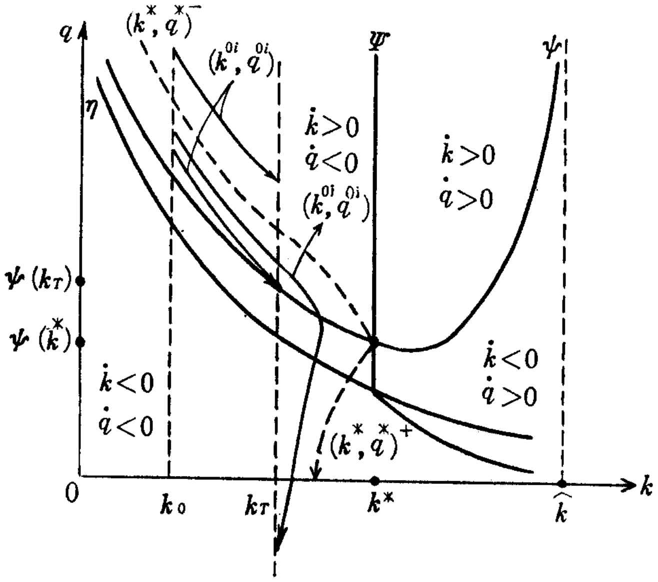
なる計画は確かに一意的最適成長計画 $(c_1^0, c_{11}^0, z^0, k^0, q^0 : t\geqq 0)$ を決定する．なぜならこの計画が，(19)～(10)(23)満す実行可能計画であることは明らかである．

有期限計画期間 ($T<\infty$) の場合についてはどうであろうか．これを検討するために，第２図において，$t\to\infty$ に対して (k^*, q^*) に復帰する傾向をもつ径路を $(k^*, q^*)^-$径路，(k^*, q^*) から乖離する傾向をもつ径路を $(k^*, q^*)^+$径路と呼び，さらに両径路をまとめて (k^*, q^*) 径路と名付けることにしよう．

いまさしあたり，$0<k_0\leqq k_T\leqq k^*$ を想定しよう．この場合，われわれは(10)(19)(20)(21)(22-1)

1) ポントリャーギン〔6〕p. 244 参照．

(23)の計画期間 $[0, T]$ に対する実行可能な特殊解，すなわち，ある特定の最適成長計画 $c_{\mathrm{I}}^0, c_{\mathrm{II}}^0, z^0, k^0, q^0 : 0 \leqq t \leqq T)$ の特に二つの成分 (k^0, q^0) について，次の二つのタイプを区別しておこう．その一つは，k は k_0 から k_T に至るまで持続的に増大し，q は q_0^0 から $q^0(T)$ $(\geqq \psi(k_T))$ に至るまで減少するという径路の集合であり，これらの径路をすべて (k^{0i}, q^{0i}) によって示す．もう一つは，k は k_0 から $k^{0j} \in (k_T, k^*)$ に至るまで持続的に増大し，その後 $k^0(T)$ に至るまで減少し続け，q は q_0^0 から $q^0(T)$ $(<\psi(k_T))$ に至るまで絶えず減少するという径路の集合であり，これらの径路をすべて (k^{0j}, q^{0j}) によって示す．ここで q^{0j} は $q^{0j}=\psi(k^{0j})$ によって定義されている．(k^{0i}, q^{0i}) 径路と (k^{0j}, q^{0j}) 径路の区別は，所与の計画期間内において，$k(t)$ の最大値が $k(T)$ であるか $k(T)$ を超えるかによってなされている．この点を明確にするために次の第3図を見よう．



第 3 図

これまでの分析によって，任意の最適成長計画上における $\dot{k}$ 及び $\dot{q}$ の符号は明らかにされた．しかし，残る変数の変化率 $\dot{c}_{\mathrm{I}}$, $\dot{c}_{\mathrm{II}}$, 及び $\dot{z}$ の符号については何ら明確な答を与えることはできない[1)]．

さて，いよいよ $T<\infty$ の場合の最適成長計画の存在と一意性を示そう．まず (41-1) を見れば，任意の二つの (k^{0i}, q^{0i}) 径路については $q_0{}^0$ が大きければ大きいほど，$(k_0, q_0{}^{0i})$ から $(k_T, q^{0i}(T))$ に至る時間は少くて済み，$q_0{}^{0i} \to \infty$ に対してはその所要時間は無限にゼロに近づいて行く．この点を考慮に入れながら，

1) 例えば Cass[2] [3] のモデルでは単一消費財の消費配分 c 及び粗投資 z の変化率は

$$\dot{c}=c'(q)\dot{q} \quad (0<\alpha<1 \text{ に対して})$$
$$=f'(k)\dot{k} \quad (\alpha=0 \text{ に対して})$$
$$\dot{z}=f'(k)\dot{k}-c'(q)\dot{q} \quad (0<\alpha<1 \text{ に対して})$$

によって与えられるから，$\dot{k}$ 及び $\dot{q}$ の符号が確定すれば $\dot{c}$ 及び $\dot{z}$ の符号は確定する．

次に任意の $(k^{0i},\ q^{0i})$ 径路と $(k^{0j},\ q^{0j})$ 径路を比較すると，(41-2) より，$(k^{0j},\ q^{0j})$ 径路上で $(k_0,\ q_0^{0i})$ から $(k_T,\ q^{0i}(T))$ に至るに要する時間は，$(k^{0j},\ q^{0j})$ 径路上で $(k_0,\ q_0^{0j})$ から $(k_T,\ q^{0j}(T))$ あるいは $(k(T),\ 0)$ に至るに要する時間よりも常に少ない．しかも，q_0^{0j} が $(k^*,\ q^*)$ 径路上の初期帰属価格 $q_0{}^*$ に近づけば近づくほど，$(k_T, q^{0j}(T))$ あるいは $(k(T),\ 0)$ に至るに要する時間は無限に長くなって行く[1)]．このことからわれわれは次の結果を得る：

任意の計画期間に対して，k_0 から出発する一意的最適成長計画が存在する．

以上の分析は $0<k_0\leqq k_T\leqq k^*$ について考察されたものであった．しかし，(41)を利用すれば，全く同様の方法によって，$0<k_0\leqq k^*\leqq k_T<\hat{k}$, $0\leqq k_T\leqq k_0\leqq k^*$ $(k_0>0)$，$0\leqq k_T\leqq k^*\leqq k_0$ の各場合については，任意の計画期間について，初期帰属価格を適当に選ぶことによって，k_0 から出発する一意的最適成長計画の存在を知る[2)]．しかし，$0<k^*\leqq k_0\leqq k_T$ 及び $0<k^*\leqq k_T\leqq k_0$ の場合については，任意の計画期間に対しては $(k_T, T)\in A$ が起るかもしれない．従ってこの場合には上記定理は妥当しない．但し，$(k_T,\ T)\in A$ なら一意的最適計画が存在する．

Ⅶ．ローリング・プラン

これまで展開されてきた有期限計画期間分析においては，計画期間は歴史上のある期間に固定されていた．例えば，1971年から開始される10ケ年最適成長計画は1980年に終了すべく立案されるだろう．計画者達が関心を抱く期間には終端時刻が刻まれており，それ以後に結果するであろう諸状況については，かれらは多大の関心を払いはしなかったという結果を呈するであろう．しかし，現実問題として最適成長問題をとらえる場合には，計画者達の抱く政治経済社会環境に対する関心事は無限の将来に及び，その結果として，計画期間は一定の長さを保持しながら順次繰り延べられていくかもしれない．そしてこの計画期間の順次延長は将来の意思決定に対する再評価とか外的諸条件の変化による原計画修正

1) $0<k_0<k_T<k^*$ というわれわれの想定の下では，$(k^{0j},\ q^{0j})$ 径路については $q_0^{0j}<q_0{}^*$ である．そうでなければ (22-1) は成立しえないからである．

2) k_0, k_T 及び k^* の種々の不等号関係によって，各関係に対応する最適成長計画上の k 及び q の変化方向は当然異ってくる．例えば，$0<k_0<k^*<\bar{k}_T<\hat{k}$ なる場合には，k は k_0 から k_T に至るまで持続的に増加するのに対し，q は $k^0=k^*$ に至るまで減少し，その後 $k^0=k_T$ に至るまで増加し続けるであろう．

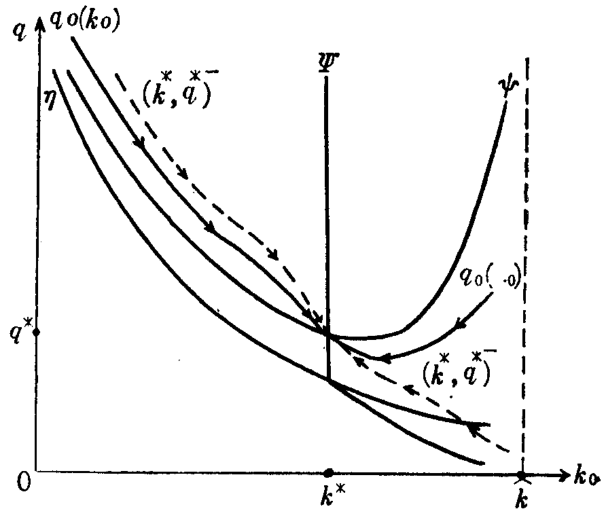
の必要性というものを要求するかもしれないのである．

この節では，最適経済成長問題の実際的一例として，毎時刻連続的修正を施すことによって一定の長さの計画期間を将来にわたって維持するような最適成長計画，すなわちローリング・プランの一例を考察する．ここでは特に，終端資本労働力比率の最小目標は少くとも修正時刻における資本労働力比率に等しくなければならないという条件が課せられているものとしよう．便宜上，修正時刻を 0，修正時刻から T 時間後の時刻を T で示すならば，T 期間ローリング最適成長計画は，終端条件(10)を

(10)′ $k(T)\geqq k_T$，ここで $k_T=k_0$

に特定化したものと解釈できる．

ところで，任意の歴史的に与えられた初期資本労働力比率 k_0 と計画期間の長さ T に対して，(10)(19)(20)～(22-1)(23)を満す実行可能径路，すなわち T 期間最適成長計画の存在と一意性については前節の定理が明らかにするところである．ここでは $(k_0, T)\in A$ を想定して議論を進めることにしよう．いま任意の所与の T 計画期間に応ずる最適成長計画上の初期帰属価格を初期資本労働力比率の関数とし，それを $q_0(k_0)$ で表わすならば[1]，この $q_0(k_0)$ 曲線は $\psi(k_0)$ 曲線とただ一点 (k^*, q^*) で交わる．すなわち，われわれの T 期間ローリング最適成長計画は，前節までに考察された無期限期間最適成長計画と類似して，時間経過と共に (k^*, q^*) に漸近するであろう．なぜなら，所与の $(k_0, T)\in A$ に対して，$q_0(k_0)$ は k_0 の連続一価関数であり，(10)′ より，



第 4 図

$$
(45)\quad
\begin{aligned}
&sgn\ (q_0(k_0)-\psi(k_0))=sgn(k_0-k^*)\\
&q_0(k^*)=\psi(k^*)
\end{aligned}
$$

でなければならない．さらに，$q_0(k_0)$ 曲線は $k_0<k^*$ に対しては $(k^*, q^*)^-$ 径路より下方

1) 以下においては最適成長計画のみに注目する．そのため変数の肩に付けられてきた添字 0 を省略する．

に， $k_0>k^*$ に対しては $(k^*, q^*)^-$ 径路より上方に位置することも容易に分る．かくして，(41)を同時に考慮すれば，$q_0(k_0)$ 曲線に関して第4図を得る．

ところで，いま検討したようなローリング・プランは Goldman [4] によって考察されたものと類似している．かれのモデルは単一消費財単一資本財の最適成長計画モデルで，そこから得られた帰結は究めて興味深いものであった．しかし，われわれの判断では，社会的厚生関数についてのかれの仮定は経済的観点から言って非常に厳しい．われわれは，社会的厚生関数についてのかれの仮定を満足するような特定の初等関数を未だ見出しておらない．このことは，社会的厚生関数がもつ経済的裏付を説明するに際して，若干の困難を引き起すのではないだろうか．

Ⅷ．む す び

われわれの得た中心的帰結は Cass [2][3] のものと極めて類似している．Cass のモデルとわれわれのモデルの形式的相違点は消費財の構成に見られた．すなわち，かれは単一消費財の存在を想定するいわゆる通常のアグリゲート・モデルを採用し，そこから斬新な結論を導出したのに対し，われわれは，かれの手法を借りる一方，二種類の消費財の存在を仮定する従来のものとは幾分異ったタイプのアグリゲート・モデルを組み立てた．消費財の構成に対する仮定の相違は，当然のこととして，社会的厚生関数の性質の相違に及んだのであるが，厚生関数の性質が異っているほどには両モデルの中心結果は変らないことが判明した．これは，両モデルの厚生関数がいずれも凹関数であるいう点に由来するのかもしれないが，ともかく， Cass の得た結論は消費財が二種類存在する場合にもおおむね妥当することを知った．従って，われわれが想定したような社会的厚生関数が正当化されうる程度に応じて，われわれの得た結論が正当化されることになろう．

最後に強調しておくべき点は，われわれのモデルは，最適経済成長計画上における二つの消費配分 c_{I} 及び c_{II} について， その時間を通じての変化の方向を明示することができなかったということである．この点に関しては，われわれのモデルは複雑化されたモデルほどその結論が不鮮明になるという通例に服していると言えるかもしれない．

参 考 文 献

[1] Болтянский, В.Г. (ボルチャンスキー) (1967): Математические оптимального

управления, Москва, 1967.〔坂本実訳『最適制御の数学的方法』, 総合図書, 1968〕

[2] Cass, D. (1965), "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation," *Review of Economic Studies*, July 1965, pp. 233–240.

[3] ――――. (1966), "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theory," *Econometrica*, Oct. 1966, pp. 833–849.

[4] Goldman, S. M. (1968), "Optimal Growth and Continual Planning Revision," *Review of Economic Studies*, Jan. 1968, pp. 145–154.

[5] Koopmans, T. C., "Objectives, Constraints, and Outcomes in Optimal Growth Models," *Econometrica*, Jan. 1967, pp. 1–15.

[6] Понтрягин, Л. С. (ポントリャーギン) (1965): Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, 1965.〔木村俊房, 千葉克裕訳『常微分方程式』, 共立出版, 1968〕

[7] Понтрягин, Л. С. (ポントリャーギン), Болтянский, В. Г. (ボルチャンスキー), Гамкрелидэе, Р. Е. (ガムクレリーゼ) & Миıценко, Е. Ф. (ミシエンコ)(1961): Математическая теория оптимальных процессов, Москва, 1961.〔関根智明訳『最適過程の数学的理論』, 総合図書, 1967〕

[8] Ramsey, F. P., "A Mathematical Theory of Saving," *Economic Journal*, Dec. 1928, pp. 543–559.

[9] Solow, R. M., "A Contribution to the Theory of Economic Growth," *Quarterly Journal of Economics*, Feb. 1956, pp. 65–94.

[10] von Weizsäcker, C. C., "Existence of Optimal Programs of Accumulation for an Infinite Time Horizon," *Review of Economic Studies*, April 1965, pp. 85–104.