

—研究—

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける 最大成長率成長径路と有効成長径路

福 尾 洋 一

I はじめに

von Neumann [12] の均齊成長均衡経済モデルは、現代経済成長理論とりわけ多部門経済成長理論の最も基本的文献の一つである。¹⁾ そこにおいてかれが取上げた問題は、有限個の基本的生産プロセスによって形成される技術状態の集合を所与とするとき、均齊成長均衡をもたらす、経済的に意味のある、生産活動水準及び相対価格は存在するであろうか、もし存在するならば、そのような生産活動水準や相対価格はどのような性質をもつであろうか、というものであった。このモデルの結論については、ごく簡単に次のように要約することができる：競争市場経済においては、経済的に意味のある、生産活動水準及び相対価格をもつ一意的均齊成長率（その値は負であるかもしれない）が存在し、それは利子率に等しい。

ところで、上記の結論を得るために Neumann 自身が用いた数学上の手法は、不動点定理に立脚しており、数学を専門としない経済学徒にとって、それはきわめて難解なものであった。そのためにか、少くとも経済学徒の間では、かれの論文は長らく放置されたままであった。その後、Georgescu-Roegen [4] や二階堂 [13] 等は、不動点定理を援用しな

1) ここでいう均齊成長均衡とは、体系内の全関連諸量の成長率及び相対価格が時を通じて同一不変であるような均衡状態、換言すれば体系は絶対量として見れば拡大（または縮少）しているが、全関連諸量の相対比率及び相対価格は時を通じて変化しない均衡状態を意味している。

2) 二階堂 [13] pp. 238—245. なお、これは同教授の次の論文を要約したものだそうである。“New Aspects of von Neumann's Model with Special Regard to Computational Problems”, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 1955.

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

いより 初等的方法によって Neumann の結論を得ることに成功した。これによつて、 Neumann モデルはかなりの程度理解され易くなったのであるが、にもかかわらず、このモデルには、経済的観点から言ってどうしても受け入れ難い重大な弱点があつた。それは Neumann が採用した次の仮定である：すべての基本的プロセスは、その前の期に生産されてゐたすべての財種 (=すべての種類の財) について、ある量を投入または产出する。一般に、生産技術を考えてみると、あるプロセスは、ある財種を投入物として使用することもないし、产出物として生産することもないということは、いくらでもありうることである。このような現実の状況に照し合せて考えた場合、 Neumann が仮定するような状況は起りそうにない。それゆえ、均齊成長率の一意性を示すには有用なこの仮定も、経済現象に興味をもつものにとって、不当なものと言わざるを得ない。この点を指摘し、修正したモデルとして、 Thompson [15] や Gale [3] のモデルがあつたが、修正された Neumann モデルとして最も興味深いモデルの一つは、恐らく、 Thompson [15] にその基礎をおく、 Kemmeny, Morgenstern & Thompson [6] のそれである。¹⁾ かれらは、上述の Neumann の不当な仮定を放棄し、経済的見地から一層プロジェクトな仮定を採用することによって、次のような興味ある結論を得ている：一意的均齊成長率の存在という点を除けば、他のすべての Neumann の結論を得る；すなわち、競争市場経済においては、（必ずしも一意ではない）有限個の均齊成長率が存在し、各均齊成長率に対応して、それに等しい利子率及び、経済的に意味のある、生産活動水準及び相対価格が存在する。

明らかに、 Neumann や Kemoth の貢献は、均齊成長均衡解の存在を示したことにあるのであるが、かれらはここにおいて多少とも暗黙の内に、最大成長率に対応する均齊成長均衡径路は最適成長径路であるとの感を抱いていたのではないだろうか。一方これとは別に、最適性概念の展開は厚生経済学的見地からもなされてきた。この分野での一つの大きな貢献として、われわれは Malinvaud [7] [8] [9] を取上げてみたい。 Malinvaud 理論の基本概念となっているのは、 Pareto 原理に基いた有効均齊成長の概念であったが、かれの最適性の定義は次のようなものである——ある均齊成長径路 $\hat{\Gamma}$ に対して、次の四つの条件を満すようないかなる成長径路 Γ も存在しない時、 $\hat{\Gamma}$ を最適 (= 有効) 均齊成

1) 今後 Kemoth と呼ぶこととする。

2) これを最大成長率 Neumann 径路と呼ぶこととする。厳密に言えば Neumann の原モデルに関する限り、均齊成長率は一意であるので、ここでいう最大成長率に当るのは、その一意的均齊成長率のことである。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

長径路という：(1) Γ は実行可能な成長径路であること；(2) Γ が必要とする期首投入量は、すべての財種について、 $\hat{\Gamma}$ の要求するそれを上回ることはない；(3) Γ から得られる期末産出量は、すべての財種に対して、 $\hat{\Gamma}$ から得られるそれを下回ることはない；(4) 少くとも一つの財種に対して、 Γ が要求する期首投入量が $\hat{\Gamma}$ の要求するそれよりも少ない、或いは、 Γ から得られる期末産出量が $\hat{\Gamma}$ から得られるそれを上回る。

本稿の目的は、Malinvaud [7] [8] の思考方向に沿って、成長均衡径路間の良否決定の基準（=最適性の基準）に関する上述の多少異った二つの概念を、Kemoth モデルを共通の基盤にしながら比較結合することによって、両概念の類似点、相違点を明確にすることである。われわれはこの問題を、最大成長率 Neumann 径路と有効均齊成長径路の比較の問題としてとらえてみたい。¹⁾

第Ⅱ節では、Neumann の原モデルから出発して、Kemoth モデルを紹介する。第Ⅲ節では、Kemoth モデルには最大成長率 Neumann 径路が存在しうることを、ほとんど Howe [5] に従って証明する。ここで Kemoth による証明をそのまま援用しないのは、証明はできるだけ初等的であることが望ましいと考えるからである。第Ⅳ節では、Malinvaud に従って有効均齊成長径路の定義を与える。第Ⅴ節では、最大成長率 Neumann 径路とすべての期間にわたって有効な均齊成長径路との比較をし、両者の関係を明らかにする。本稿において多少とも新しい何ものがあるとすれば、恐らく、そのすべてがこの節に含まれるであろう。最後の節は若干のまとめに充てられる。

II Kemoth の修正された Neumann モデル

1. 全体を通じての仮定と記号

所与の技術状態については次のような仮定が採用される。

- (1) 自然的生産要素（労働、土地等）は無制限に利用可能である。
- (2) 規模に関して収穫は不变である。
- (3) 基本的生産プロセスの数は m （有限）、財種の数は n （有限）とする。各生産プロセ

1) この種の問題についての異った形の定式化としては、例えば、Dosso [1] や Furuya & Inada [2] がある。これら文献にみられる議論は共に、技術状態の集合に対する仮定において Kemoth モデルよりも一般的である。しかし、とにかくここでは Kemoth タイプの技術状態の集合に議論を限ることにする。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

スは同一の生産期間（その単位は1とする）をもつ。すなわち、生産に長期間を要するプロセスは、もし必要ならば、新たな種類の追加的財貨を導入することによって、¹⁾ 単位生産期間をもつ多数のプロセスに分解される。²⁾

(4) 投入係数を a_{ij} (有限値) で示す。これは、第 i プロセス ($i=1, 2, \dots, m$) 1単位を稼動させるのに技術的に必要な第 j 財種 ($j=1, 2, \dots, n$) の量と、第 i プロセス 1単位を稼動させるに必要な労働者に対する支払いとして最小限必要な第 j 財種の量との和によって与えられる。 $a_{ij} \geq 0$ を仮定し、これを (m, n) 型行列 $[a_{ij}] = A \geq 0$ によって表示する。

(5) 産出係数を b_{ij} (有限値) で示す。これは、第 i プロセス 1単位を稼動させることによって単位期間後に生産される第 j 財種の量を示している。 $b_{ij} \geq 0$ を仮定し、これも (m, n) 型行列 $[b_{ij}] = B \geq 0$ によって表示する。

(6) 第 i プロセスの活動水準を q_i とする。これを m 次元ベクトル $(q_1, q_2, \dots, q_m) = \mathbf{q}$ によって表示すると、経済的観点ないしは技術的観点より $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ でなければならないが、 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ という状態には興味がないので、任意の期間（その単位は1である） t の活動水準 $\mathbf{q}(t)$ に対して、 $\mathbf{q}(t) \geq \mathbf{0}$ なることを必要条件としておく。

(7) 第 j 財種の価格を p_j とする。これを n 次元ベクトル $(p_1, p_2, \dots, p_n) = \mathbf{p}$ によって表示すると、再び経済的観点より、 $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ でなければならないが、 $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ なるケースにはやはり興味がないので、任意の期間 t の価格 $\mathbf{p}(t)$ については、 $\mathbf{p}(t) \geq \mathbf{0}$ なることを必要

1) これを中間生産物と呼んでも別に支障はないが、通常用いられる意味、例えば産業連関分析に出てくるような意味、での中間生産物概念とは異っている。なぜなら、われわれはこのような追加的財貨をも、分析上は最終生産物として取り扱うからである。

2) 詳しくは森嶋 [10] pp. 11~13 を参照。

3) 労働の（最小の）固定的賃金を投入係数の内に含ませることは興味深い技巧である。ここでは労働の固定的賃金を、労働者が消費することによって生じた財の磨耗という形で表現されたコストと考えている。かくて、労働の投入係数は独立にはエクスピリシットに表示されない。なおこの固定的賃金は、種々の労働タイプに応じて異っていても一向に差支えない。

4) ベクトルはすべて肉太の小文字で示すこととする。以下の議論では、行ベクトルと列ベクトルの区別を示す特定の記号を用いない。従ってあるベクトル（例えば \mathbf{q} ）は、時に応じて行ベクトルであったり列ベクトルであったりする。混乱する恐れのある時にはその都度行か列かを表示するであろう。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

条件としておく。

- (8) 利子ファクターを β で示す。これは、利子率を $100\rho\%$ とすると、 $\beta=1+\rho$ によって定義される。 $\beta \leq 0$ という状況には興味がわかないもので、 $\beta > 0$ を必要条件とする。
- (9) 成長ファクターを α で示す。これは、均齊成長率を $100g\%$ とすると、 $\alpha=1+g$ によって定義される。ここでも $\alpha > 0$ を必要な条件とする。

2. Neumann の原モデル

任意の期間において、その期の各財種の（期首）投入量は、その前の期の（期末における）産出量を超えることはできない。この条件式を

$$(2-1)' \quad \mathbf{q}(t)\mathbf{B} \geqq \mathbf{q}(t+1)\mathbf{A}$$

と書こう。ここで、左辺は t 期（期末或いは同じことであるが $t+1$ 期期首）における各財種の産出量を示し、右辺は $t+1$ 期（期首）における各財種の投入量を示している。ところで、均齊成長下にあっては、 $t+1$ 期の各財種の投入量は t 期のそれの α 倍でなければならないから、(2-1)' を

$$(2-1)'' \quad \mathbf{q}(t)\mathbf{B} \geqq \alpha \mathbf{q}(t)\mathbf{A}$$

と書いてよい。ここで両辺の t を省略すると、

$$(2-1) \quad \mathbf{q}\mathbf{B} \geqq \alpha \mathbf{q}\mathbf{A}$$

を得る。繰り返すと、(2-1) は、いかなる財種も利用可能量を超えて生産プロセスにおいて費消することは不可能であることを示している。

均衡下では、生産過剰な財種 (= 条件 (2-1)' において厳密な不等号が成立する財種) の任意の期（の期首）における価格は零である。すなわち、均衡において生産過剰な財種は自由財である。従って、

$$(2-2)' \quad \mathbf{q}(t)\mathbf{B}\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{q}(t+1)\mathbf{A}\mathbf{p}(t+1)$$

となる。ここにおいて左辺は $t+1$ 期（期首）における総供給価値を、右辺は $t+1$ 期（期首）の総需要価値を示している。ところで、Neumann が求めようとした価格ベクトル \mathbf{p} は、時を通じて不变であるようなものであった。従って、時間にはかかわりなく、価格は不变でなければならぬ。このことを考慮すると、均齊成長均衡下にあっては、(2-2)' は

$$(2-2)'' \quad \mathbf{q}(t)\mathbf{B}\mathbf{p} = \alpha \mathbf{q}(t)\mathbf{A}\mathbf{p}$$

と書き換えることができる。ここで再び t を省略すれば、

$$(2-2) \quad \mathbf{q}\mathbf{B}\mathbf{p} = \alpha \mathbf{q}\mathbf{A}\mathbf{p}.$$

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率経路と有効成長経路

均衡下にあっては、いかなるプロセスといえども、均衡利子ファクターによってもたらされる収入を超える収入を獲得することはできないであろう。なぜなら、競争市場経済においては、もあるプロセスが利子支払い後になおかつ正の利潤を生みだすならば、すなわち、

$$\beta(t) \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j(t) < \sum_{j=1}^n b_{ij} p_j(t+1) \quad (\text{ある } i \text{ に対して})$$

が成立すれば、そのプロセスを採用する競争者が殺到し、その結果生ずる、投入する財種及び産出される財種の両面における需給関係のアンバランスは、いかなるプロセスも正の利潤を得ることがないように、価格関係及び利子率を変化させてしまうであろう。かくして均衡下にあっては、

$$(2-3)' \quad \beta(t) A \mathbf{p}(t) \geq B \mathbf{p}(t+1)$$

が成立しておらねばならない。 $(2-3)'$ において、右辺は、 t 期に各プロセスを実際に1単位活動させた場合に、 $t+1$ 期（期首或いは同じことであるが t 期末）において収入として得られる各プロセス当りの価値を示し、左辺は、 t 期において各プロセスを1単位活動させる場合に必要な各プロセス当りの費用の $t+1$ 期（期首）における価値を示している。既述のごとく、Neumann モデルにおいては $\mathbf{p} = \text{const.}$ であるが、さらにかれは、 β もまた時間には無関係に同一不変なることを条件付けている。これらの点を考慮すれば、結局

$$(2-3) \quad \beta A \mathbf{p} \geq B \mathbf{p}.$$

最後に、利子支払い後の利潤が負になるようなプロセス($= (2-3)'$ において厳密な不等号が成立するプロセス)は使用されない。すなわち、そのようなプロセスの活動水準は零である。この条件を正確に書けば

$$(2-4)' \quad \beta(t) \mathbf{q}(t) A \mathbf{p}(t) = \mathbf{q}(t) B \mathbf{p}(t+1)$$

であるが、以前と同様に、 t を消去して

$$(2-4) \quad \beta \overset{(1)}{\mathbf{q}} A \mathbf{p} = \mathbf{q} B \mathbf{p}.$$

- 1) \mathbf{p} 不変の条件を用いることなしに、 $(2-3)'$ から $(2-4)'$ を説明しようとするには若干の困難が生ずる。というのは $(2-3)'$ において厳密な不等号が成立するプロセスが存在するかどうかは $t+1$ 期（期首）の価格状態を知った上で判明することであるのに対し、活動水準の決定は既に t 期（期首）に行なわれており、それは $t+1$ 期の価格状態とは無関係な決定である。それゆえ、 $(2-3)'$ で厳密な不等号が成立するプロセスの t 期の活動水準は零であるとして、 $(2-4)'$ を導出する論法には無理があるように思われる。すなわち、 \mathbf{p} 不変を仮定してこそ $(2-3)'$ と $(2-4)'$ は結合可能となるのではないだろうか。森嶋教授[11]の議論は全体を通じてきわめて明解で興味深いものであるが、この点の説明には若干の不備が見られるようと思う。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

ところで、Neumann が求めようとしたのは、(2-1)～(2-4) を満す非負で零でないベクトル \mathbf{q} , \mathbf{p} 及び正の実数 α , β であった。ところが、(2-1)～(2-4) は時間に無関係であるので、一般性を失うことなく、われわれは \mathbf{q} 及び \mathbf{p} を規準化して、

$$\sum_{i=1}^m q_i = 1, \quad \sum_{j=1}^n p_j = 1$$

とすることができる。¹⁾ すなわち、 \mathbf{q} 及び \mathbf{p} はそれぞれ m 次元及び n 次元の確率ベクトルと解釈することができる。

一般に、投入行列 A 及び産出行列 B について何らかの仮定を追加しなければ、(2-1)～(2-4) を満す非負確率ベクトル \mathbf{q} , \mathbf{p} 及び正の実数 α , β は存在しない。そのため Neumann が追加した仮定については既述の通りであるが、それは、

$$(\dagger) \quad A+B > 0$$

なることを意味している。しかし既に述べた理由によって、われわれは、この仮定を放棄し、Kemoth に従うことにする。

3. Kemoth の修正

Kemoth は Neumann の仮定 (\dagger) を放棄し、モデルを以下のように修正した。

まず、新たに

$$(2-5) \quad \mathbf{qBp} > 0$$

なる条件を追加する。これは、生産されるすべての財種の総（供給）価値は正でなければならないことを意味している。

さらに、経済上ないしは技術上の見地よりきわめて妥当と思われる次のような仮定を (\dagger) に代って採用する：すべてのプロセスは何らかの投入物を使用し、また、いかなる財種もいずれかのプロセスを活動させることによって生産可能となる；すなわち、前者は無から有を生ずることはできないことを意味し、後者は、考察している体系が自給自足体系であることを意味している。この仮定をわれわれは次のように書くことができる：

$(*)$ A の各行は少くとも一つ正の成分をもつ。

$(**)$ B の各列は少くとも一つ正の成分をもつ。

1) 以下において、添字が記入されていない \mathbf{q} や \mathbf{p} はすべて規準化されたベクトルを示すものとする。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

4. 最終消費項の導入

これまでの議論では、雇用される労働者の最低生存に必要な消費を除いて、最終消費は零であるケースに注目してきた。ここでは最終消費項を導入することにしよう。しかしながら、均齊成長均衡過程を分析するに際して、それと矛盾なく、しかも十分満足のいくよう最終消費項を導入することは不可能と言わざるをえない。というのは、活動水準が一定率で拡大（または縮少）することを可能ならしめるためには、最終消費がすべての財に関して零というケースを除いては、最終消費はすべての財種に関して活動水準と同じ率で増加（ないしは減少）して行かねばならない。そのため、均齊成長均衡と矛盾なく最終消費項を導入するには、最終消費もまた均齊成長率で拡大（または縮少）するといった非常に非現実的な想定を採用せざるを得なくなる。従って、われわれの議論はきわめて大ざっぱな第一次接近にすぎない。

上述の点に留意した上で、 $d_j (j=1, 2, \dots, n)$ を既に生産された第 j 財種に対する最終消費を示すものとする。 d_j は非負で、かつ、毎期の生産規模の一定割合を占め、活動水準と同じ成長率 g をもつと仮定する。これを n 次元ベクトル表示で $(d_1, d_2, \dots, d_n) = \mathbf{d}$ としておく。このように考えると、雇用される労働者の消費については、その一部（=生存賃金に対応する消費）は \mathbf{qA} の中に、残りの部分（=生存賃金に対応する消費を超える消費部分）は最終消費 \mathbf{d} に含まれることになる。¹⁾ ここでは取扱いを容易ならしめるために、任意の期間の最終消費はその前の期間の産出から供給されるものと考えよう。最終消費については一期間のタイム・ラグを仮定するわけである。

次に \mathbf{d} は Malinvaud [8] に従って

$$(2-6) \quad \mathbf{d} = \mathbf{qrh}$$

によって定義しよう。ここで、 \mathbf{r} は経済全体の生産規模を計算するに際して各基本的プロセスにア・プリオリに帰属されるウェイトを示す m 次元列ベクトル $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ である。従って、 \mathbf{qr} は任意の期間における経済全体の共通の価値尺度で測定された生産規模である。 \mathbf{h} は $\mathbf{qr}=1$ のときの各財種に対する最終消費を示す n 次元行ベクトル

1) 一方で労働は無制限に利用可能であると仮定し、他方で最終消費項を導入するということは不自然なようにも思われる。しかし、例えば、常に生産された財の一定割合を、新通貨の発行によって市場から購入し、それらの財を労働者に無償で再配分するような、厚生福祉政策に強い関心をもっている第三の経済主体の存在を想定してみるならば、上述の方法は必ずしも不自然なものとは言えないだろう。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ で、ア・プリオリに与えられているものとする。明らかに、 $\mathbf{r} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{h} \geqq \mathbf{0}$ である。

以上のようにモデル (2-1)～(2-5) に最終消費項をエクスプレシットに導入すると、モデルは若干の修正を受ける。数学的見地のみからすれば、それは大して重要な意味をもつものではない。しかし、経済的観点からすると、このことは少なからず重要な意味をもつようと思われる。というのは、先に見たように、最終消費項の導入のされ方が、すべての財種に関して活動水準と同じ率で増加（ないし減少）するというのであったが、そのような方法によって導入される最終消費の下で数学的に存在が保証される価格体系が真に競争市場価格体系と言いうるかどうか、多少問題が残るからである。しかし、純粋に競争的な市場経済とは言い難いが、もし第三の経済主体を導入することによって、最終消費の導入の仕方に多少とも説得的な経済的意味付けを与えることができるとすれば、この点の困難はそれほど大きいものではないと言えるかもしれない。とにかく、われわれは完全に分権化された競争市場経済から一步外に出たタイプの経済体系を取り扱っていると考えることによって、一応この問題を処理することにしたい。

5. Kemoth モデル=まとめ

ここで以下の便宜をはかって、上述のモデルをまとめておく。

$$(2-7) \quad A + \mathbf{r}\mathbf{h} = \mathbf{C} = [c_{ij}]$$

とおくと、明らかに $\mathbf{C} \geqq \mathbf{0}$ で、 \mathbf{C} の各行は少くとも一つ正の成分をもっている。そこで問題は次のようになる：

(*) 任意の i について、 $c_{ij} > 0$ (ある j に対して)

(**) 任意の j について、 $b_{ij} > 0$ (ある i に対して)

の下で、

$$(2-8) \quad \mathbf{q} \in Q = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q} \geqq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^m q_i = 1\}$$

$$(2-9) \quad \mathbf{p} \in P = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \sum_{j=1}^n p_j = 1\}$$

$$(2-10) \quad \alpha > 0$$

$$(2-11) \quad \beta > 0$$

$$(2-12) \quad \mathbf{q}(B - \alpha C) \geqq \mathbf{0}$$

1) p. 96, 1) を参照。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

$$(2-13) \quad \mathbf{q}(B - \alpha C)\mathbf{p} = 0$$

$$(2-14) \quad (B - \beta C)\mathbf{p} \leqq \mathbf{0}$$

$$(2-15) \quad \mathbf{q}(B - \beta C)\mathbf{p} = 0$$

$$(2-5) \quad \mathbf{q}B\mathbf{p} > 0$$

$$(2-6) \quad \mathbf{d} = \mathbf{qrh}$$

を満すべきベクトル $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{d}$, 実数 α, β を求める。但し, 行列 C, B 及びベクトル \mathbf{r}, \mathbf{h} は所与かつ非負である。

III 最大成長率 Neumann 径路の存在

モデル (2-8)~(2-15), (2-5), (2-6) は, (2-6) を除けば Kemoth モデルと形式上全く同一である。しかも (2-6) は解の存在を検討するに際してはほとんど重要な役割を果さない。従って Kemoth の解法を全くそのまま踏襲することができる。しかしここではより初等的な Howe [5] の証明をフォローすることにしよう。

定理 1. モデル (2-8)~(2-15), (2-5) 及び (2-6) は解 $(\alpha, \beta, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{d})$ をもつ。

いくつかの段階に分割することによって, 定理 1 の証明を与えよう。

段階 1 : $\mathbf{q} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \alpha, \beta$ が (2-12)~(2-15) 及び (2-5) を満す解ならば,

$$\alpha = \beta = \frac{\mathbf{q}B\mathbf{p}}{\mathbf{q}C\mathbf{p}} > 0.$$

[証明] $(*)'$ より $\mathbf{q}C\mathbf{p} \geqq 0$ であるが, (2-13) (2-5) より $\mathbf{q}C\mathbf{p} > 0$, 従って (2-13) (2-15) より結論を得る。

ところで段階 1 は, $\mathbf{q} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}, \alpha, \beta$ が (2-12)~(2-15) 及び (2-5) の解であるための必要条件を示しているのであるから, 体系 (2-8)~(2-15), (2-5) 及び (2-6) の解存在を検討するためには, われわれは $\alpha = \beta$ の場合にのみ注目すればよい。ところが $\alpha = \beta$ ならば, (2-12) (2-14) を満す $\mathbf{q} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{p} \geqq \mathbf{0}$ に対しては常に (2-13) (2-15) が成立する。この点を考慮して, 改めて, モデルを簡単化しよう。なお, 便宜上, 諸式に対しては新しい番号を使うことにする。

問題 仮定 $(*)' (**)'$ の下で,

$$(3-1) \quad \mathbf{q} \in Q = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q} \geqq \mathbf{0}, \sum_{i=1}^m q_i = 1\}$$

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

(3-2) $\mathbf{p} \in P = \{\mathbf{p} | \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \sum_{j=1}^n p_j = 1\}$

(3-3) $\alpha > 0$

(3-4) $\mathbf{q}(B - \alpha C) \geq \mathbf{0}$

(3-5) $(B - \alpha C)\mathbf{p} \leq \mathbf{0}$

(3-6) $\mathbf{q}B\mathbf{p} > 0$

(3-7) $\mathbf{d} = \mathbf{qrh}$

を満す解の組 $(\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{d})$ の存在を検討すること。但し、 $C, B, \mathbf{r}, \mathbf{h}$ は所与かつ非負である。

段階 2 : 写像 $\Psi(\alpha, \mathbf{q}) = \mathbf{q}(B - \alpha C) : R \times R^m \rightarrow R^n$ ¹⁾ は連続写像である。

[証明] 任意のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ について、その距離を $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$ によって定義する。さらに、 $\max_{i,j} b_{ij} = \eta, \max_{i,j} c_{ij} = \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} d(\Psi(\alpha^\nu, \mathbf{q}^\nu), \Psi(\alpha, \mathbf{q})) \\ = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^m [q_i^\nu(b_{ij} - \alpha^\nu c_{ij}) - q_i(b_{ij} - \alpha c_{ij})] \right| \\ \leq \sum_{i,j}^m |(q_i^\nu - q_i)b_{ij} - (\alpha^\nu q_i^\nu - \alpha q_i)c_{ij}| \\ \leq \sum_{i,j}^m (|q_i^\nu - q_i|b_{ij} + |\alpha^\nu q_i^\nu - \alpha q_i|c_{ij}) \\ \leq n\eta \sum_{i=1}^m |q_i^\nu - q_i| + n\theta \sum_{i=1}^m |\alpha^\nu q_i^\nu - \alpha q_i| \\ \rightarrow 0 \quad (\lim_{\nu \rightarrow \infty} q_i^\nu = q_i, \lim_{\nu \rightarrow \infty} \alpha^\nu = \alpha \text{ に対して}) \end{aligned}$$

ゆえに Ψ は $R \times R^m$ 上で連続である。

段階 3 : $S_q = \{\alpha(\mathbf{q}) | \alpha \geq 0, \mathbf{q}(B - \alpha C) \geq \mathbf{0} (\mathbf{q} \in Q \text{ に対して})\}$ とするとき、集合 $\bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_q$ は $\alpha > 0$ を含む。

[証明] $q_i = \frac{1}{m}$ とおくと、 $\mathbf{q}(B - \alpha C) = \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^m (b_{ij} - \alpha c_{ij}) \right]$, ²⁾ $(**)$ によって、任意の j に対して $\sum_{i=1}^m b_{ij} > 0$ であり、また $(*)'$ によって、 $\sum_{i=1}^m c_{ij}$ はすべての j に対して零とはならないから、 $\sum_{i=1}^m c_{ij} = 0$ となるような j に対しては、 $\left(\sum_{i=1}^m b_{ij} / \sum_{i=1}^m c_{ij} \right) = +\infty$

1) R は実数全部のなす集合、 R^m は m 次元実ベクトル空間、 R^n は n 次元実ベクトル空間を示す。

2) 明らかにこれは n 次元行ベクトルである。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

と定義し、 $\alpha = \min_j \left(\sum_{i=1}^m b_{ij} / \sum_{i=1}^m c_{ij} \right)$ とおくと、 α は正の有限確定値となり、確かに $\mathbf{q}(B - \alpha C) \geqq \mathbf{0}$ が成立する。

段階4： 集合 $\bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_{\mathbf{q}}$ はコンパクトな集合である。

[証明] 明らかに、 $\bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_{\mathbf{q}}$ は実数全部のなす集合 R の部分集合であるから、コンパクト性を示すには、この集合が有界閉集合であることを示せばよい。

有界性： $\hat{Q} = \{\mathbf{q} | \mathbf{q} \in Q, S_{\mathbf{q}} \neq \emptyset\}$ ¹⁾ とし、 $\mathbf{q} \in \hat{Q}$ とそれに対応する $\alpha(\mathbf{q}) \in S_{\mathbf{q}}$ との対を (α, \mathbf{q}) と書くことにしよう。さらに、すべての成分が1からなる n 次元列ベクトル $(1, \dots, 1)'$ を \mathbf{e} とすると、任意の対 (α, \mathbf{q}) に対して、 $\mathbf{q}(B - \alpha C)\mathbf{e} \geqq 0$. $(*)'$ によって $C\mathbf{e} > 0$ であるから、 $\mathbf{q}C\mathbf{e} > 0$ となり、

$$\alpha \leqq \frac{\mathbf{q}B\mathbf{e}}{\mathbf{q}C\mathbf{e}} \leqq \max_i \frac{B\mathbf{e}}{C\mathbf{e}}.$$

かくて任意の対 (α, \mathbf{q}) に対して α は上に有界、すなわち $\max_i \frac{B\mathbf{e}}{C\mathbf{e}}$ を超えない。もちろん α は下に有界であるから、結局、集合 $\bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_{\mathbf{q}} = \bigcup_{\mathbf{q} \in \hat{Q}} S_{\mathbf{q}}$ は有界な集合である。

閉集合性： $\bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_{\mathbf{q}}$ は有界集合であるから、この集合における任意の無限数列 $\{\alpha^\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) に対して、収束する部分数列を選ぶことができる。従って一般性を失うことなく、 $\{\alpha^\nu\}$ をそのような部分数列であるとしてよい。そしてその集積点を α° で示そう。さらにこの部分数列 $\{\alpha^\nu\}$ に対して、点列 $\{\mathbf{q}^\nu(\alpha^\nu)\}$ を考えると、周知のごとく Q はコンパクト集合であるから、収束する部分点列 $\{\mathbf{q}^{\nu\tau}\}$ ($\tau = 1, 2, \dots$) ($\mathbf{q}^{\nu\tau} \in \hat{Q}$) を選ぶことができ、極限値 \mathbf{q}° に対して、 $\mathbf{q}^\circ \in \hat{Q}$ 。そうすると、 $\{\alpha^\nu\}$ 、 $\{\mathbf{q}^{\nu\tau}\}$ の選び方と極限値の一意性を考慮すると、 $\alpha(\mathbf{q}^\circ) = \alpha^\circ$ ($\tau \rightarrow \infty$ に対して)。段階2によって示されたように、 $\mathbf{q}(B - \alpha C)$ は $\bigcup_{\mathbf{q} \in \hat{Q}} S_{\mathbf{q}} \times Q$ 上で連続な写像であるから、 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathbf{q}^{\nu\tau}(B - \alpha^{\nu\tau} C) = \mathbf{q}^\circ(B - \alpha^\circ C)$ 。任意の ν_τ に対して $\mathbf{q}^{\nu\tau}(B - \alpha^{\nu\tau} C) \geqq \mathbf{0}$ であるから、結局 $\mathbf{q}^\circ(B - \alpha^\circ C) \geqq \mathbf{0}$ となって、 $\alpha^\circ \in \bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_{\mathbf{q}}$ 。かくて $\bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_{\mathbf{q}} = \bigcup_{\mathbf{q} \in \hat{Q}} S_{\mathbf{q}}$ は閉集合である。

段階4は、 $\mathbf{q} \in Q$ に応じて定まる集合値写像 $S_{\mathbf{q}}$ の和集合 $\bigcup_{\mathbf{q} \in Q} S_{\mathbf{q}} = \bigcup_{\mathbf{q} \in \hat{Q}} S_{\mathbf{q}}$ のコンパクト性を主張している。そしてこのことは写像 $\alpha(\mathbf{q})$ が集合 \hat{Q} 上で最大値 $\alpha(\mathbf{q}^*) = \alpha^*$ ($\mathbf{q}^* \in \hat{Q} \subset Q$) をもつことを意味する。そして段階3によって、 $\alpha^* > 0$ が示されているわけ

1) ϕ は空集合を示す記号である。

2) \hat{Q} の定義から、“ Q 上で”と書いても同じことである。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

である。そこで今度は、この最大値 $\alpha^* > 0$ に対して、(3-1) (3-2) (3-4)~(3-7) を満す \mathbf{q} , \mathbf{p} , \mathbf{d} が存在することを示せばよい。この点を証明するに当って、Howe は Tucker [16] の定理を実際に巧みに利用している。ここでは証明することなしに、Tucker の定理を利用しよう。

Tucker の定理 任意の (m, n) 型行列 M に対して、非負条件付双対体系

- (i) $\mathbf{x}M \geqq \mathbf{0}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$
- (ii) $-M\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$

は、条件

- (iii) $\mathbf{x} - M\mathbf{y} > \mathbf{0}$
- (iv) $\mathbf{x}M + \mathbf{y} > \mathbf{0}$

を満すような解の組 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) をもつ。¹⁾

この Tucker の定理を用いて、 $M = B - \alpha^* C$ とおくと、直ちに、 $\mathbf{x}(B - \alpha^* C) \geqq \mathbf{0}$, $(B - \alpha^* C)\mathbf{y} \leqq \mathbf{0}$ を満す $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ の存在が明らかになるが、このような(i)~(iv)を満す解の組 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqq \mathbf{0}$ を特に、 $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ によって表示することにしよう。すると、

段階 5 : $\bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \bar{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}$.

〔証明〕 $\bar{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}$ であること : $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ なら Tucker の定理(iv) によって、 $\bar{\mathbf{x}}M = \bar{\mathbf{x}}(B - \alpha^* C) > \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{x}}[B - (\alpha^* + \delta)C] = \bar{\mathbf{x}}(B - \alpha^* C) - \delta \bar{\mathbf{x}}C$ であるから、 $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i c_{ij} = 0$ となるような j に対しては、 $\left[\sum_{i=1}^m \bar{x}_i (b_{ij} - \alpha^* c_{ij}) / \sum_{i=1}^m \bar{x}_i c_{ij} \right] = +\infty$ と定義し、 $0 < \delta < \min_j \frac{\bar{x}(B - \alpha^* C)}{\bar{x}C}$ となるように δ を選ぶと、 $\bar{\mathbf{x}}[B - (\alpha^* + \delta)C] > \mathbf{0}$. 両辺を $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i$ で割っても、この不等号の関係はそのままであるが、それは明らかに α^* の定義に反する。 $\bar{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$ である。

1) 通常、Tucker の定理として最も基本的な形式は次のようなものである。(Tucker [16] P. 8).

定理 双対体系,

$$\mathbf{x}M \geqq \mathbf{0}, \text{ 及び } M\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$$

に対して,

$$\mathbf{x}M + \mathbf{y} > \mathbf{0}$$

となるような解の組 (\mathbf{x}, \mathbf{y}) が存在する。

さて、Howe が利用した本文の Tucker の定理も実はこの基本定理から簡単に得ることができる。(Tucker [16] p. 11)。しかし、この基本定理の証明はかなり複雑である。なおこの基本定理の証明に関しての入手しやすい文献としては二階堂 [14] pp. 123-126 がある。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

こと : $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ なら, Tucker の定理 (iii) によって, $M\bar{\mathbf{y}} = (B - \alpha^*C)\bar{\mathbf{y}} < \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{y}} > \mathbf{0}$. ところで α^* の定義から, α^* に対応して必ずある $\mathbf{q}^* \in Q$ が存在して, $\mathbf{q}^*(B - \alpha^*C) \geqq \mathbf{0}$. ゆえに, $\mathbf{q}^*(B - \alpha^*C)\bar{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}$. しかるに $M\bar{\mathbf{y}} < \mathbf{0}$ より, $\mathbf{q}^*(B - \alpha^*C)\bar{\mathbf{y}} < \mathbf{0}$ でなければならない. これは矛盾である.

段階 6 : $\bar{\mathbf{x}}B\bar{\mathbf{y}} > 0$.

[証明] Tucker の定理 (i) (ii) より, $\bar{\mathbf{x}}M\bar{\mathbf{y}} = 0$.

今これを並べ替えて,

$$(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2) \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{y}}_1 \\ \bar{\mathbf{y}}_2 \end{pmatrix} = 0$$

とする. ここで, $\bar{\mathbf{x}}_1 > \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0}$; $\bar{\mathbf{y}}_1 > \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{0}$ である. これより

$$\bar{\mathbf{x}}_1 M_{11} \bar{\mathbf{y}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1 (B_{11} - \alpha^* C_{11}) \bar{\mathbf{y}}_1 = 0.$$

さて, いまもし $\bar{\mathbf{x}}B\bar{\mathbf{y}} = 0$ ならば, 明らかに, $\bar{\mathbf{x}}_1 B_{11} \bar{\mathbf{y}}_1 = 0$. $\bar{\mathbf{x}}_1 > \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{y}}_1 > \mathbf{0}$ であるから, $B_{11} = \mathbf{0}$ となり, それゆえ $C_{11} = \mathbf{0}$ となる. そしてこのことは任意の $\alpha > 0$ に対して $B_{11} - \alpha C_{11} = \mathbf{0}$ を意味する. 一方, Tucker の定理 (iv) から, $\bar{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{0}$ を考慮すると,

$$\bar{\mathbf{x}}_1 M_{12} + \bar{\mathbf{x}}_2 M_{22} = \bar{\mathbf{x}}_1 M_{12} = \bar{\mathbf{x}}_1 (B_{12} - \alpha^* C_{12}) > 0.$$

しかるに (i) によって,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}M &= (\bar{\mathbf{x}}_1 M_{11} + \bar{\mathbf{x}}_2 M_{21}, \bar{\mathbf{x}}_1 M_{12} + \bar{\mathbf{x}}_2 M_{22}) \\ &= [\bar{\mathbf{x}}_1 (B_{11} - \alpha^* C_{11}), \bar{\mathbf{x}}_1 (B_{12} - \alpha^* C_{12})] \geqq \mathbf{0} \end{aligned}$$

であるが, $B_{11} = C_{11} = \mathbf{0}$ より, $\alpha > \alpha^*$ なる α を選んで $\bar{\mathbf{x}}(B - \alpha C) \geqq \mathbf{0}$ とすることができる. しかもこの関係は辺々を $\sum_{i=1}^m \bar{x}_i$ で割っても変わることがない. しかしこのことは α^* の仮定に反することになり, 結局 $\bar{\mathbf{x}}B\bar{\mathbf{y}} > 0$ となる.

ここにおいて, $(\bar{\mathbf{x}} / \sum_{i=1}^m \bar{x}_i) = \mathbf{q}^*$, $(\bar{\mathbf{y}} / \sum_{j=1}^n y_j) = \mathbf{p}^*$, $\mathbf{q}^* \mathbf{r} \mathbf{h} = \mathbf{d}^*$ とおくと, 組 $(\alpha^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{d}^*)$ は体系 (3-1)~(3-7) の解である. かくして定理 1 は完全に証明され, それと共に, 最大成長率 Neumann 径路の存在も証明されたことになる.

この節の最後に, 最大成長率 Neumann 径路の十分条件を一つ与えよう. そのため, 体系 (3-1)~(3-7) を満足する解の組を $(\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{d})$ で示し, このような組を 今后, Neumann 径路と呼ぶことにする.

定理 2 ある所与の Neumann 径路 $(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{d}})$ において, $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ なら, そのような

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路
径路は最大成長率 α^* に対応する Neumann 径路である。¹⁾

[証明] いま任意の Neumann 径路を $(\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{d})$ とすると、(3-5) によって $(B - \alpha C) \bar{\mathbf{p}} \leqq \mathbf{0}$ であるから、

$$(3-8) \quad \mathbf{q}(B - \alpha C) \bar{\mathbf{p}} \leqq \mathbf{0}.$$

また、(3-4) によって $\mathbf{q}(B - \alpha C) \geqq \mathbf{0}$ であるから、

$$(3-9) \quad \mathbf{q}(B - \alpha C) \bar{\mathbf{p}} \geqq \mathbf{0}.$$

(3-8)(3-9) によって

$$(3-10) \quad (\bar{\alpha} - \alpha) \mathbf{q} C \bar{\mathbf{p}} \geqq \mathbf{0}.$$

ところで $(*)'$ 及び $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ より $C \bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ であるから、 $\mathbf{q} \in Q$ より、 $\mathbf{q} C \bar{\mathbf{p}} > 0$. それゆえ (3-10) によって $\bar{\alpha} \geqq \alpha$. $(\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{d})$ の選び方は任意であったから、結局 $(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})$ は最大成長率 Neumann 径路である。なお、 $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ は $\bar{\mathbf{q}}(B - \bar{\alpha}C) = \mathbf{0}$ 、すなわち (3-4) が等号で成立していることを意味している点に注意しておくべきであろう。

IV 有効成長径路

この節では、今までと少し趣きを変え、資源の最適利用の理論ないしは厚生経済学の立場から、最適性の性質について考えてみよう。そこでまず、Malinvaud [8] にならって、有効均齊成長径路概念を次のように定義しよう。

定義： (3-1), (3-3), (3-4) 及び (3-7) によって決定される成長径路を組 $(\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{d})$ によって示し、これを技術的に実行可能な均齊成長径路と呼ぶこととする。組 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ は、以下の条件を満すいかなる成長径路も存在しない時、 T 期間有効均齊成長径路と言う。すなわち、任意の $t=1, 2, \dots, T-1$ に対して、

$$\mathbf{q}(t-1)B \geqq \mathbf{q}(t)C,$$

或いは同じことであるが

$$\mathbf{q}(t-1)B - \mathbf{q}(t)A \geqq \mathbf{d}(t) \geqq \mathbf{0}$$

を満すある対 $(\mathbf{q}(t), \mathbf{d}(t))$ —われわれはこれを実行可能径路と呼ぶ—が、

$$(4-1) \quad \mathbf{d}(t) \geqq \hat{\alpha}^t \hat{\mathbf{d}}$$

$$(4-2) \quad \mathbf{q}(0)A \leqq \hat{\mathbf{q}}A \quad \& \quad \mathbf{q}(T-1)B \geqq \hat{\alpha}^{T-1} \hat{\mathbf{q}}B$$

1) Malinvaud [8] (p. 219) の命題2を参照されたし。

ノイマン型均齊成長モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

の内、少くとも一つを厳密な不等号で成立させる。また特に、すべての $T > 1$ に対して、(4-1) 及び (4-2) がその内少くとも一つ厳密な不等号で成立するような、いかなる実行可能な径路も存在しないとき、組 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ を全期間有効成長径路と呼ぶ。²⁾

ところで、有効均齊成長径路の下においては、すべての財種についてその需給は均衡する。すなわち、すべての財種について超過供給は零となっている。このことを次に示そう。

定理3 任意の T 期間有効均齊成長径路 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ ($T > 1$) に対して、次の関係が成³⁾立する。

$$(4-3) \quad \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{C}) = \mathbf{0}.$$

[証明] 組 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ については、 $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{C}) = \hat{\mathbf{e}} \geqq \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$ なら $\hat{\mathbf{e}} \geqq \mathbf{0}$ であるから、 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}} + \frac{1}{\hat{\alpha}}\hat{\mathbf{e}})$ を考えると、これは実行可能な均齊成長径路である。このことは、 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ が有効均齊成長径路であるという仮定に明らかに矛盾する。従って、 $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{B} - \hat{\alpha}\mathbf{C}) = \mathbf{0}$ 。

V. 有効径路と Neumann 径路

(4-3) は有効均齊成長径路の必要条件であったが、それは Neumann 径路の必要条件 (3-4) よりも一層厳しいものである。このことから、ごく直観的には、最大成長率 Neumann 径路に対応する成長ファクター α^* の下での（全期間）有効均齊成長径路が存在するならば、それは最大成長率 Neumann 径路であると結論できそうである。しかし、このことが必ずしも主張しえないことは、両径路の定義の内容を明確に理解すれば、容易に分ることである。有効均齊成長径路概念はあくまで技術的関係を示すものであるから、そこには、 α^* に対応する有効均齊成長径路 $(\alpha^*, \hat{\mathbf{q}}^*, \hat{\mathbf{d}}^*)$ に対して、経済的意味をもつ価格体系、換言すれば、(3-5), (3-6) を満す $\mathbf{p} \in P$ が存在するかどうかは何も保証されておらない。従って、有効均齊成長径路と最大成長率 Neumann 径路とは、一般には明確な関

- 1) (4-1), (4-2) の形から $T > 1$ で考えなければ、“均齊成長” ということばは用をなさない。つまり $T = 1$ というのは、同一期間内の活動水準を比較することを意味し、そこには成長概念を導入する余地がない。従って、有効均齊成長径路は $T > 1$ に対して定義される。
- 2) 有効均齊成長概念は、静態論における生産の有効点、すなわち Pareto の最適性、の定義に対応するものである。
- 3) Malinvad [8] (p. 221) の命題3を参照されたし。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

係をもつものではない。このことをはっきりさせるために、Gale [3] の例をほとんどそのまま借用することによって、有効均齊成長径路が最大成長率 Neumann 径路にならない場合を示そう。

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\hat{\alpha} = 1$, $\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{3}(1, 1, 1, 0, 0)$, $\hat{\mathbf{d}} = (0, 0, 0, 0, 0)$ とすると、 $C = A$ を考慮して、 $\hat{\mathbf{q}}A = \hat{\mathbf{q}}B = (1, 1, 1, 1, 0, 0)$ となり、(4-1) (4-2) を、少くともその内一つを厳密な不等号で、成立させるいかなる実行可能な径路も存在せず、 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ は全期間有効均齊成長径路である。にもかかわらず、 $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\mathbf{q} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}(0, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, 1)$,

$\mathbf{d} = (0, 0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{p} = \frac{1}{7 + \sqrt[3]{2}}(1, 3, 2, \sqrt[3]{2}, 1, 0)$ は Neumann 径路である。明

らかに $\hat{\alpha} < \alpha$ となり、 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ は最大成長率 Neumann 径路とはならない。逆に、最大成長率 Neumann 径路 $(\alpha^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{d}^*)$ についても、もし、 $\mathbf{q}^*(B - \alpha^*C) \geq \mathbf{0}$ となれば、定理3より、そのような径路は有効均齊成長径路とはなりえない。かくて、両概念の間に何らかの明確な関係を発見しようとすれば、そこには何らかの条件が与えられる必要がある。

次の定理は、ある Neumann 径路が全期間有効均齊成長径路となるための十分条件を示すものである。

定理4 ある Neumann 径路 $(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})$ が与えられるとき、 $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ なら¹⁾、径路 $(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{d}})$ は全期間有効均齊成長径路である。

[証明] 最初に、Neumann 体系においては、 $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ なら、 $\bar{\mathbf{q}}(B - \bar{\alpha}C) = \bar{\mathbf{q}}(B - \bar{\alpha}A) = \mathbf{0}$ 、従って、 $\bar{\mathbf{q}}(B - \bar{\alpha}A)\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ なることに注目しておこう。さて、 $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ なるときに、Neumann 径路 $(\bar{\alpha}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{d}})$ が全期間有効均齊成長径路ではない、すなわち、 T 期間において有効ではないとして矛盾を導く。そのため、径路 $(\mathbf{q}(t), \mathbf{d}(t))$ を(4-1) (4-2) を、少くとも一つ厳密な不等号で、満す任意の実行可能径路としよう。そ

1) 定理2より、これは最大成長率 Neumann 径路である。

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

すると、任意の $t > 1$ に対して、

$$\mathbf{q}(t-1)\mathbf{B} - \mathbf{q}(t)\mathbf{A} \geq \mathbf{d}(t) \geq \mathbf{0} = \bar{\alpha}^t \mathbf{q} \mathbf{r} \mathbf{h} = \bar{\alpha}^t \bar{\mathbf{d}}$$

が成立するから、

$$\begin{aligned} & \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{\bar{\alpha}^{t-1}} (\mathbf{q}(t-1)\mathbf{B} - \mathbf{q}(t)\mathbf{A}) \bar{\mathbf{p}} \\ &= \sum_{t=1}^{T-2} \frac{1}{\bar{\alpha}^t} (\mathbf{q}(t)\mathbf{B} - \bar{\alpha}\mathbf{q}(t)\mathbf{A}) \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}(0)\mathbf{A}\bar{\mathbf{p}} - \frac{1}{\bar{\alpha}^{T-2}} \mathbf{q}(T-1)\mathbf{A}\bar{\mathbf{p}} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

次に (4-2) の各不等式の辺々に $-\bar{\alpha}\bar{\mathbf{p}}$ 及び $\frac{1}{\bar{\alpha}^{T-1}}\bar{\mathbf{p}}$ をそれぞれ右から掛けると、

$$\begin{aligned} -\bar{\alpha}\mathbf{q}(0)\mathbf{A}\bar{\mathbf{p}} &\geq -\bar{\alpha}\bar{\mathbf{q}}\mathbf{A}\bar{\mathbf{p}}, \\ -\frac{1}{\bar{\alpha}^{T-1}}\mathbf{q}(T-1)\mathbf{B}\bar{\mathbf{p}} &\geq \bar{\mathbf{q}}\mathbf{B}\bar{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

ここですぐ上の三つの不等式を辺々加えると、 $(\mathbf{q}(t), \mathbf{d}(t))$ については、(4-1)(4-2) の内、少くとも一つ厳密な不等号が成立し、しかも $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ であるから、結局

$$\sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{\bar{\alpha}^t} \mathbf{q}(t)(\mathbf{B} - \bar{\alpha}\mathbf{A})\bar{\mathbf{p}} > \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{B} - \bar{\alpha}\mathbf{A})\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$$

一方、(3-5) より $(\mathbf{B} - \alpha\mathbf{C})\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{B} - \alpha\mathbf{A})\bar{\mathbf{p}} \leq \mathbf{0}$ であり、もちろん $\mathbf{q}(t) \geq \mathbf{0}$ であるから、

$$\mathbf{q}(t)(\mathbf{B} - \bar{\alpha}\mathbf{A})\bar{\mathbf{p}} \leq \mathbf{0}$$

となるが、これは矛盾である。

この定理においては $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ が仮定されている。このことは結局、最終消費項を導入しない Neumann 体系を考察していることになる。より一般的な $\mathbf{h} \geq \mathbf{0}$ のケースについては、残念ながら、明確な結論を得ることができない。ただ、 $\mathbf{h} \geq \mathbf{0}$ であっても、 $\mathbf{q} \mathbf{r} \mathbf{h} = \mathbf{0}$ すなわち $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ となるケースについては、この定理はやはり成立する。

定理 4 から得られる当然の系を、以下の便宜をはかって、ここに挙げておこう。

系 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ (または $\mathbf{d}^* = \mathbf{0}$) のとき、最大成長率 Neumann 径路 $(\alpha^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{d}^*)$ において、 $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$ ならば、 $(\alpha^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{p}^*, \mathbf{d}^*)$ は全期間有効均齊成長径路である。

また、有効均齊成長径路 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ については次の定理が成立する、

定理 5 任意の $T > 1$ に対して、任意の有効均齊成長径路 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ には、(3-5) を満す $\hat{\mathbf{p}} \in P$ が存在する。特に $\hat{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ なら (3-6) が成立する。

[証明] 定理 1 段階 3 でやったように、

$$G_{\hat{\mathbf{q}}} = \{\pi(\hat{\mathbf{q}}) \mid \pi \geq 0, \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{B} - \pi\mathbf{C}) \geq \mathbf{0}\}$$

とすると、 $0 < \hat{\alpha} \in G_{\hat{\mathbf{q}}}$ であるから、 $G_{\hat{\mathbf{q}}} \neq \emptyset$ 。段階 4 に用いたのと全く同じ方法によって、

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

$G_{\bar{\mathbf{q}}}$ はコンパクト集合. 従って $G_{\bar{\mathbf{q}}}$ 内において最大値 $\pi^* \geq \hat{\alpha}$ をもつ. いま, 行列 $(B - \pi^* C)$ に Tucker の定理を適用すると, 段階 5 によって, $\mathbf{q} \in Q$, $\mathbf{p} \in P$ が存在して,

$$\bar{\mathbf{q}}(B - \pi^* C) \geq \mathbf{0} \quad \& \quad (B - \pi^* C)\bar{\mathbf{p}} \leq \mathbf{0}.$$

$\pi^* \in G_{\bar{\mathbf{q}}}$ であるから, $\hat{\mathbf{q}}(B - \pi^* C) \geq \mathbf{0}$ を考慮し, $\bar{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}$ とおくと, $\hat{\mathbf{q}}(B - \pi^* C)\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, 一方, 定理 3 によって, $\hat{\mathbf{q}}(B - \hat{\alpha}C)\mathbf{p} = \mathbf{0}$. ゆえに, $\hat{\alpha} = \pi^*$. 次に, $\hat{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ なら, $(*)'$ によって, C の各行は少くとも一つ正の成分をもっているから, $C\hat{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ となり, $\hat{\mathbf{q}}B\hat{\mathbf{p}} = \hat{\alpha}\hat{\mathbf{q}}C\hat{\mathbf{p}} > 0$.

さて, 有効均齊成長径路 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{d}})$ に対して, (3-5) を満す $\hat{\mathbf{p}} \in P$ を有効価格ベクトルと呼び, 今後, 組 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{d}})$ を, 改めて有効均齊成長径路と呼ぶことにしよう. $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{d}})$ は (3-6) を満すなら Neumann 径路となる.

上のように定義された有効均齊成長径路 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{d}})$ に対しては, 定理 5 の系として次の系を得る. 証明は定理 2 によって明らかであろう.

系. 任意の $T > 1$ に対して, 任意の有効均齊成長径路 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{d}})$ が $\hat{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ を満すならば, 径路 $(\hat{\alpha}, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{d}})$ は最大成長率 Neumann 径路である.

最後に, 定理 4 と定理 5 の二つの系から, 最終消費項を考慮しないケースについては, 興味ある結果を得ることになる. 既に得た帰結の焼き直しにすぎないが, われわれが求めている最終結果とも言えるものであるので, ここに改めて定理として挙げることにしよう. 証明は既に示されているので不要である.

定理 6 $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ (または $\mathbf{d} = \mathbf{0}$) のとき, 最大成長率 Neumann 径路 $(\alpha, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{d})$ が全期間有効均齊成長径路となるための必要十分条件は, $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ である.

VI. む す び

最初に述べたように, われわれが目的としたのは, Kemoth 型 Neumann モデルを基盤とし, ここに Malinvaud が定義した有効均齊成長概念を導入することによって, 最大成長率 Neumann 径路と有効均齊成長径路の関係を検討することであった. このような類似の研究は, Malinvaud [8] や Dosso [1] に見られるのであるが, われわれの分析の大きな特徴は, Kemoth [6] の仮定 $(*)$ $(**)$ を踏襲していることである. われわれは, 何らかの条件を設けない限り, 一般に, 二つの成長径路概念の間にはっきりとした関係を見出すことができないことを知った. 条件として最も決定的役割を演じているのは, 正の価格ベクトルの存在である. $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ ということは自由財が存在しないということを意味し,

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

特に Neumann 体系にあっては、すべての財種に関して需給が一致するということを意味する。

ところで、 $p > \mathbf{0}$ という経済体系のみを考察し、しかも、われわれが注目する径路では、常に、 $p > \mathbf{0}$ の条件が満されているものとすれば、全期間有効均齊成長概念は最大成長率 Neumann 径路概念よりも狭い概念であることも分った。なぜなら、全期間有効均齊成長径路は最大成長率 Neumann 径路となるのに、その逆は必ずしも成立しないからである。しかし、最終消費項が常に零であるケースについては、二つの成長径路概念は同等であった。その意味からすると、 $h = \mathbf{0}$ （または $d = \mathbf{0}$ ）という条件もまた明確な結論を与えるには有用なものと言えよう。

以上

参考文献

- [1] Dorfman, R., Samuelson, P. A. & Solow, R. M. (DOSSO) (1958), Chap. 12; 14, in *Linear Programming and Economic Analysis*, (McGraw-Hill, New York), 1958. [安井他訳『線型計画と経済分析』, 岩波書店, 1958-59.]
- [2] Furuya, H. & Inada, K. (1962), "Balanced Growth and Intertemporal Efficiency in Capital Accumulation", *International Economic Review*, Vol. 3, Jan. 1962, pp. 94—107.
- [3] Gale, D. (1956), "The Closed Linear Model of Production", in *Linear Inequalities and Related Systems* (*L, I, R, S*), ed. by Kuhn, H. W. & Tucker, A. W., (Princeton Univ. Press, Princeton), 1956, pp. 3—18.
- [4] Georgescu-Roegen, N. (1951), "The Aggregate Linear Production Function and Its Applications to von Neumann's Economic Model", in *Activity Analysis of Production and Allocation*, ed. by Koopmans, T. C., (John Wiley & Sons, New York), 1951, pp. 98—115.
- [5] Howe, C. W. (1960), "An Alternative Proof of the Existence of General Equilibrium in a von Neumann Model", *Econometrica*, Vol. 28, July 1960, pp. 635—639.
- [6] Kemeny, J. G., Morgenstern, O. & Thompson, G. L. (KEMOTH). (1956), "A Generalization of the von Neumann Model of an Expanding Economy",

ノイマン型均齊成長均衡モデルにおける最大成長率径路と有効成長径路

Econometrica, Vol. 24, April 1956, pp. 115—135.

- [7] Malinvaud, E. (1953), "Capital Accumulation and Efficient Allocation of Resources", *Econometrica*, Vol. 21, April 1953, pp. 233—268.
- [8] ———. (1959), "Programmes d'expansion et taux d'intérêt", *Econometrica*, Vol. 27, April 1959, pp. 215—227.
- [9] ———. (1962), "Efficient Capital Accumulation : A Corrigendum", *Econometrica*, Vol. 30, July, 1962, pp. 570—573.
- [10] 森嶋通夫(1960), "均衡成長の多部門理論—ノイマン理論の学説史的発展—", 内田他編, 『新しい経済分析』, 大阪大学社会経済研究室, 1960, pp. 3—60.
- [11] Morishima, M. (1964), Chap. V. in *Equilibrium, Stability and Growth*, (Clarendon Press, Oxford), 1964.
- [12] von Neumann, J. (1937), "A Model of General Equilibrium", translated by Morgenstern, G., *Review of Economic Studies*, Vol. 13, 1945—46, pp. 1—9. (This article was originally published in *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, No. 8, 1937.)
- [13] 二階堂副包 (1960), 『現代経済学の数学的方法』, 岩波書店, 1960.
- [14] ———. (1961), 『経済のための線型数学』培風館, 1961.
- [15] Thompson, G. L. (1956), "On the Solution of a Game-Theoretic Problem", in *L, I, R, S* (See [1]), pp. 275—284.
- [16] Tucker, A. W. (1956), "Dual Systems of Homogeneous Linear Relations", in *L, I, R, S* (See [1]), pp. 3—18.