

時間遅れを持つ Replicator 方程式*

Replicator Equation with Time-Lag

吉川 満

This paper examines Evolutionary Game Theory, symmetric two person games and asymmetric two person games with continuous time-lag. This paper uses the property of Hopf bifurcation, introduced continuous time-lag into the representative model, generalization of the Rock-Scissors-Paper Game, Matching Pennies Game. This paper applies this lag to the Microeconomics, cobweb theory which usually uses discrete time-lag. This paper finds conditions of equivalent to discrete and continuous time-lag in the cobweb theory. Moreover, it formulates the cobweb theory with asymmetric two person game, the seller and the buyer, with continuous time-lag.

Mitsuru Kikkawa

JEL : C02, C73, D46, E32

キーワード : 時間遅れ, レプリケーター方程式, クモの巣理論, ホップ分岐

Key words : Time-Lag, Replicator Equation, Cobweb Theory, Hopf Bifurcation

1. はじめに

モデルを作る際に今まで時間の概念であるステップは連続型か離散型の2つのタイプがあり, 時間遅れを導入する際は離散型で行ってきていた. しかし本稿では連続型の時間遅れを導入する. この連続型の時間遅れ, 数学的には微分差分方程式, を取扱った文献として, 内藤他 [4] がある. 例えば $\dot{x} = -ax(t-r)$, $a \in \mathbf{R}, r > 0$ という時間遅れを持つ微分方程式は, $a = 2, r = 0$ の場合, 時間が

* 本稿は 2007 年度日本経済学会秋季大会 (日本大学経済学部) で報告した内容を加筆・訂正したものである. 討論者としてコメントを頂いた浅田統一郎先生に感謝する. ただし本稿中にあるすべての誤りは筆者の責任である.

経済学研究 38 号

経つにつれて, x は 0 に近づく. しかし $r > 0$ の場合, 数学的に厳密には解けなくことができず, シミュレーションを行うと, $a = 2, r = 0.8$ 辺りで, x が周期解となることや $a = 2, r = 1.0$ のときは発散することが知られている (図 1).

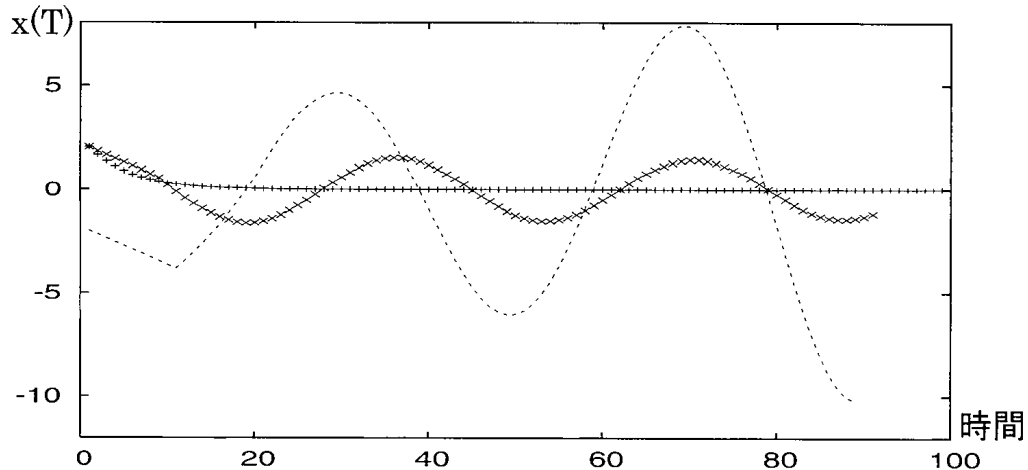


図 1: $\dot{x} = -ax(t - r)$, $a = 2$, $r = 0, 0.8, 1.0$.

この時間遅れの研究は数理生物学の分野でよく使われる Lotka-Volterra 型の方程式を用いた研究が盛んにされている. ここでは Lyapunov 関数を用いて, 共存平衡点が大域安定となる条件の導出を主に行っている. そこで本稿では Lotka-Volterra 型の方程式と関係あり, 進化ゲーム理論で使われる Replicator 方程式系に時間遅れを導入すると, 具体的にどのような効果となるのかを考えた. さらにはミクロ経済学でよく研究されているクモの巣の理論へ応用させ, 通常の離散時間系と同様の結論を得る条件を導出する. 以上のことを通じて時間遅れが Replicator 方程式にどのような影響を与えるのかを考える. さらにはそこからこの時間遅れは経済学的には何を示唆しているのかを考察する.

本稿は次のように構成されている. 第 2 節では, 時間遅れを持つ競争系 Lotka-Volterra 型から時間遅れを持つ Replicator 方程式を導出する. 第 3 節では, 時間遅れがある 1 本の Replicator 方程式で, ある戦略を採用したときの今期の自分の期待利得はある一定の以前の期の期待利得を得るということにし, 均衡が時間遅れによってどのような影響を受けるのかを考える. 第 4 節では, 2 つのタイプの時間遅れがある 2 本の Replicator 方程式を調べる. 具体的には

対称 2 人ゲームではジャンケンゲーム, 非対称 2 人ゲームではマッチング・ペニーゲームに時間遅れを導入する. 第 5 節では, まず離散時間の時間遅れが存在するクモの巢理論を復習し, 次に連続時間の時間遅れを導入したモデルを定式化する. そこからどのようなときに離散時間のモデルと連続時間のモデルが一致するのかを考察する. さらには非対称 2 人ゲームとしてのクモの巢理論を定式化を行う. 第 6 節では, 結論を述べる.

2. 時間遅れを持つ Lotka-Voltterra 型から導出

n 次の Replicator 方程式と $(n-1)$ 次の競争系 Lotka-Voltterra 型は位相同型であることが一般に知られている ([3], Theorem 7.5.1). この節では時間遅れを持つ競争系 Lotka-Voltterra 型 から時間遅れの Replicator 方程式を導出する.

そこで時間遅れが存在する $n-1$ 次の競争系 Lotka-Voltterra 型を次のように置く.

$$\dot{y}_i(t) = \left(r_i + \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} y_j(t-r) \right) y_i(t), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

ただし r_i は増殖率を表し, a_{ij} は i から j への効果を示している. ここで

$$x_i = \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{n-1} y_j} \text{ と置き, Replicator 方程式に変形すると, 次のように導出できる.}$$

$$\dot{x}_i(t) = ((Ax)_i(t-r) - x \cdot Ax(t-r)) x_i(t), \quad i = 1, \dots, n.$$

以上から時間遅れがある Replicator 方程式を導出した. 時間遅れがない場合は, t 時の利得が平均よりも高ければ, その戦略が増加するというものであったが, これは $(t-r)$ 時の利得が平均よりも $(t-r)$ 時の利得が高ければ, その戦略が増加するということを表している. よってこの場合は利得にすべて時間遅れの効果があるために, 全体としては時間の遅れの効果はない. そこで次節ではある一部分に時間遅れの効果を導入し, その効果を考える.

	ゲームの型	a と b の値	ESS の個数 (その戦略の組)
A	非ジレンマ	$a > 0, b < 0$	1(戦略 1, 戦略 1)
B	囚人のジレンマ	$a < 0, b > 0$	1(戦略 2, 戦略 2)
C	コーディネーション	$a > 0, b > 0$	2((戦略 1, 戦略 1),(戦略 2, 戦略 2))
D	タカ=ハト	$a < 0, b < 0$	1((混合戦略))

表 1: パラメーターの値によるゲームの分類分け

3. 1 本の Replicator 方程式

本節ではある戦略を採用したときの今期の自分の期待利得はある一定の以前の期の期待利得を得るとする。つまり期待利得に時間遅れが存在している。

ここでは戦略が 2 つ存在する対称 2 人ゲームの枠組みで次のような状況に置かれている一般的なゲームを考える。利得行列 $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ のとき Replicator 方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \{(ax - (ax^2 + by^2))\}xy, \quad \text{ただし } x + y = 1 \\ (3.1) \quad &= \{(a+b)x - b\}x(1-x). \end{aligned}$$

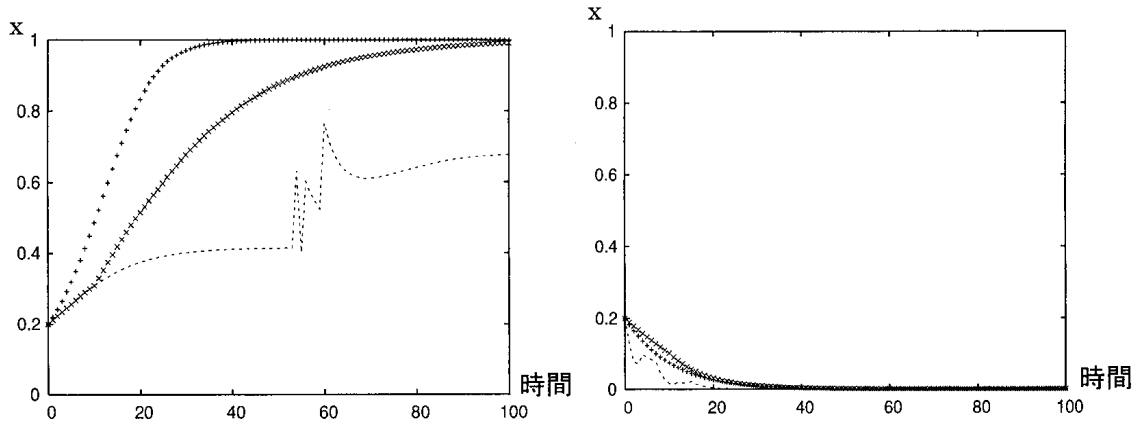
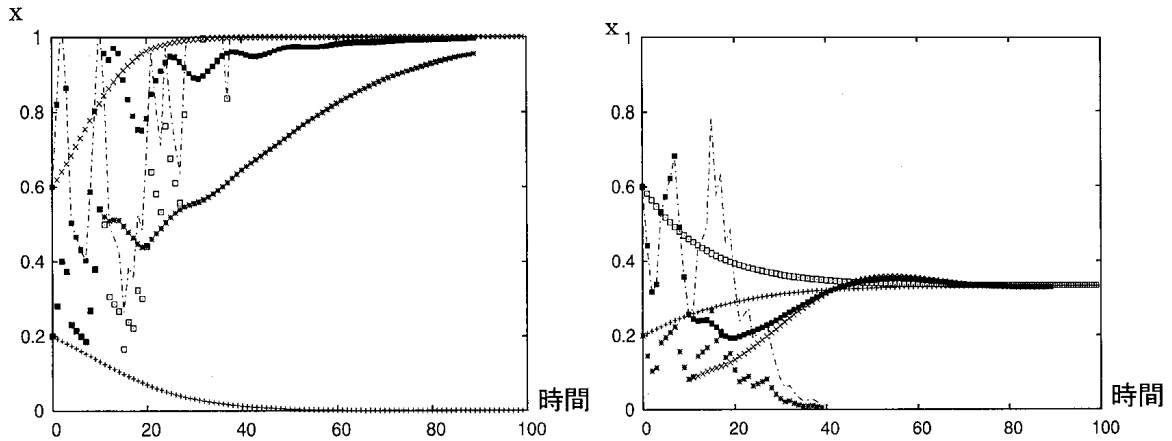
またこの利得表のときは a, b の値によって次のような表 1 に分類できる。

これに上述したような、期待利得にタイムラグを入れると、次のようになる。

$$\begin{aligned} (3.2) \quad \dot{x} &= \{(ax(t-r) - (ax^2(t) + by^2(t)))\}x(t)y(t), \\ &\text{ただし } x(t) + y(t) = 1, r > 0. \end{aligned}$$

(3.2) を a, b の符号によってシミュレーションすると、図 2 のようになり、この図から次のことが分かった。純粋戦略の均衡が 1 つである大域安定なゲーム (A, B) では時間遅れを導入しても均衡への収束のスピードは異なるが、均衡へ収束する。純粋戦略の均衡が 2 つあるゲーム (C) では初期値の値によって収束する均衡の選択が行われるが、時間遅れを導入すると、本来ならば $x = 0$ へ収束する初期値であっても、 $x = 0$ へ収束する場合が $x = 1$ へ収束する場合が存在する。最後に ESS が 1 つで混合戦略のゲーム (D) では、時間遅れがない場合、内点解へ収束するが、 $x = 0$ に収束する場合が存在する。以上のことをまと

吉川：時間遅れを持つ Replicator 方程式

図 2: 左: (A) 非ジレンマ型, 右: (B) 囚人のジレンマ型 ($r = 0, 1, 6$)図 2: 左: (C) コーディネーション型, 右: (D) タカ=ハト型 ($r = 0, 1, 6$)

めると、次の命題となる。

命題 1 時間遅れが存在する Replicator 方程式 (3.2) において、時間遅れが存在し、均衡に対して影響があるのは、大域不安定なゲーム (C) であるか、ESS が混合戦略のゲーム (D) の場合である。

この命題 1 から構造的に不安定 (structurally unstable) なゲームであるとき、時間遅れが影響があることが分かる。

4. 時間遅れを持つ 2 本の Replicator 方程式

この節では時間遅れを持つ 2 本の Replicator 方程式を定義する. 時間遅れはどこに導入するかで結果が異なる. 例えば前節のように期待利得に時間遅れが存在するものや, 発展・成長に時間遅れが存在するものが考えることができる. ここではこの 2 つのタイプの時間遅れを持つ 2 本の Replicator 方程式の興味深い例を 2 つ取り上げる.

4.1. 対称 2 人ゲーム

まず対称 2 人ゲームについて考える. 対称 2 人ゲームで Replicator 方程式が 2 本存在するのは, 戦略が 3 つのときであった. そこで戦略が 3 つのゲームで有名な一般化されたジャンケンゲーム (generalization of the Rock-Scissors-Paper Game)[6] を用い, 時間遅れを導入する. 一般化されたジャンケンゲームとは次のようなゲームであった. 戦略が 3 つ存在し, 例えば自分が戦略 1 を出す場合について考えると, 相手も戦略 1 を出す場合は「引き分け」となり, 相手が戦略 2 を出す場合「勝ち」, 相手が戦略 3 を出す場合「負ける」という 3 つの場合の利得が存在する. 他の戦略の場合も同じ規則で利得を決めると次のような利得行列となる. またこのゲームは一意的な混合戦略の Nash 均衡 $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ を持つ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+a & 0 \\ 0 & 1 & 2+a \\ 2+a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

このときの Replicator 方程式は次のようであった.

$$(4.1a) \quad \dot{x}_1 = [x_1 + (2+a)x_2 - x \cdot Ax]x_1,$$

$$(4.1b) \quad \dot{x}_2 = [x_2 + (2+a)x_3 - x \cdot Ax]x_2,$$

$$(4.1c) \quad \dot{x}_3 = [x_3 + (2+a)x_1 - x \cdot Ax]x_3.$$

ただし $x \cdot Ax = 1 + \frac{a}{2}(1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2))$ である. またこのとき内点均衡は $a = 0$ のときは, リミットサイクル, $a > 0$ のときは, x_1, x_2, x_3 のどれかが 1 となり, その他はゼロとなる. $a < 0$ のときは, 漸近安定となる (図 3).

次に時間遅れ $r(\geq 0)$ を導入する. ここでの時間遅れは期待利得に時間遅れ

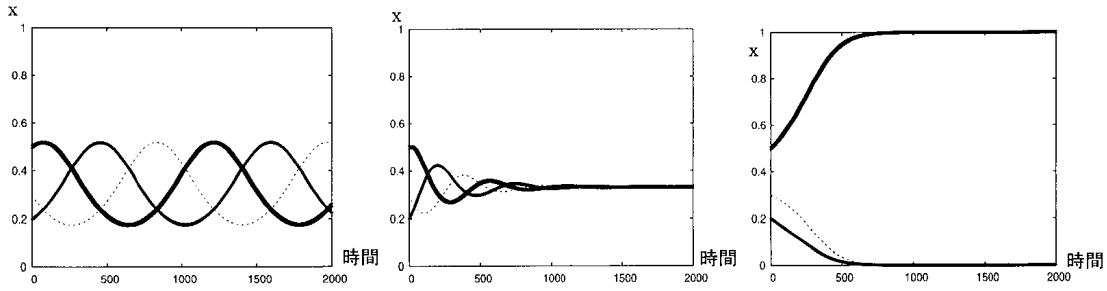


図 3: 一般化されたジャンケンゲーム, 左: $a = 0$, 中: $a = -2$, 右: $a = 2$

が存在するものである。具体的にはジャンケンを行い、勝った場合得られる期待利得に時間遅れが存在するものである。

$$(4.2a) \quad \dot{x}_1 = [x_1 + 2x_2(t-r) - x \cdot Ax]x_1,$$

$$(4.2b) \quad \dot{x}_2 = [x_2 + 2x_3(t-r) - x \cdot Ax]x_2,$$

$$(4.2c) \quad \dot{x}_3 = [x_3 + 2x_1(t-r) - x \cdot Ax]x_3.$$

ただし $x_1(t-r) + x_2(t-r) + x_3(t-r) = 1$ である。

このとき内点均衡は $r = 0$ のときは、リミットサイクル, $x_i(t-r) < x_i, i = 1, 2, 3$ のとき漸近安定となり, $x_i(t-r) > x_i, i = 1, 2, 3$ のときは発散していき、ある端点に行き着く。以上のことをまとめると、次の命題となる。

命題 2 一般化されたジャンケンゲーム (4.1) において、時間遅れを (4.2) のように導入した場合, $r = 0$ のときは、リミットサイクル, $x_i(t-r) < x_i, i = 1, 2, 3$ のとき漸近安定となり, $x_i(t-r) > x_i, i = 1, 2, 3$ のときは発散していき、ある端点に行き着く。

このジャンケン・ゲームを 2 企業が互いに 3 つの戦略を持ち、3 つの状況 (勝ち, 負け, 引き分け) がある競争を行っていると考える。時間遅れが存在しない場合は、勝利したときの利得が多い場合には勝敗がつく。勝利したときの利得が小さい場合にはお互い共存するというものがあった。これを時間遅れの場合で考えると、時間遅れ $r > 0$ がある場合の戦略の頻度と時間遅れがない $r = 0$ のときの戦略の頻度を比べ、時間遅れがある場合の値が大きいと発散していき

勝敗がつき、逆に小さいと共存となる。よって時間遅れの度合いである r を不確実性の度合いと解釈すると、不確実性が大きいときは勝敗がつき、小さいと共存となる。つまりよい戦略を取ったとしても、その利得がしばらくないと、その戦略を採用せず、以前よかった戦略のみが生き残り、それによって勝敗が決まる。このことから利得を時期によっても主体の行動が変化することが分かる。

4.2. 非対称 2 人ゲーム

次に非対称 2 人ゲームについて考える。非対称 2 人ゲームで Replicator 方程式が 2 本存在するのは、戦略が 2 つのときであった。そこでマッチング・ペニーゲーム (Matching Pennies Game)[6] を用い、発展・成長に時間遅れを導入する。マッチング・ペニーゲームとは 2 人の主体がそれぞれコインの表・裏面を選び、見せ合い、もし 2 人の面が同じならば主体 1 がそのコインをもらい、そうでなければ主体 2 がもらうというゲームである。よってこのゲームの利得行列はそれぞれ次のようになる。またこのゲームは一意的な混合戦略の Nash 均衡 $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を持つ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

このときの Replicator 方程式は次のようになる。

$$(4.3a) \quad \dot{x} = 2(2y - 1)(1 - x)x,$$

$$(4.3b) \quad \dot{y} = 2(1 - 2x)(1 - y)y.$$

このときの内点解は、リミットサイクルとなる。ここで先ほどの利得にそれぞれ $1 + c$ または $\frac{1}{1 + c}$ を加える。 $1 + c$ を足す場合は次のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} 2 + c & c \\ c & 2 + c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & 2 + c \\ 2 + c & c \end{pmatrix}.$$

このときの Replicator 方程式は次のようになり、内点均衡は $c > 0$ のとき、漸近安定である。

$$(4.4a) \quad \dot{x} = a(x, y)(2y - 1)(1 - x)x,$$

$$(4.4b) \quad \dot{y} = b(x, y)(1 - 2x)(1 - y)y.$$

このとき内点均衡は、 $a(x, y) = b(x, y) = 2$ のとき、リミットサイクルとなる。

$a(x, y) \equiv [u_1(x, y) + c]^{-1} = [c + 2[xy + (1-x)(1-y)]]^{-1}$, $b(x, y) \equiv [u_2(x, y) + c]^{-1} = [c + 2[x(1-y) + (1-x)y]]^{-1}$ のときは、漸近安定となり、 $a(x, y) \equiv u_1(x, y) + c = c + 2[xy + (1-x)(1-y)]$, $b(x, y) \equiv u_2(x, y) + c = c + 2[x(1-y) + (1-x)y]$ のときは x, y のどちらかが 1 となり、一方はゼロとなる (図 4). また c の値が大きいくほど、収束速度は速くなる.

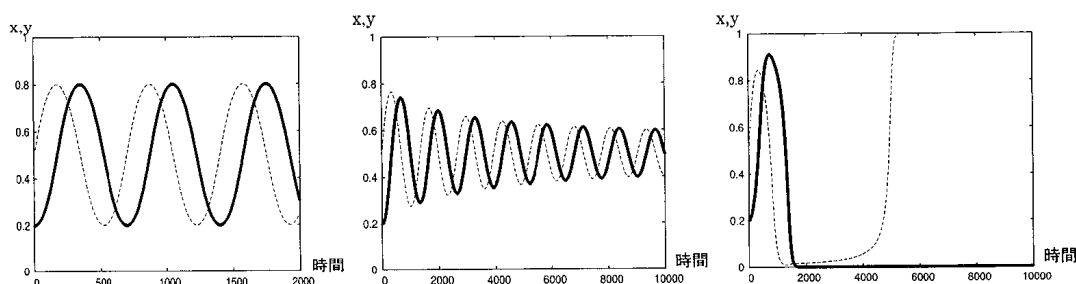


図 4: マッチング・ペニー, 左: $a = 2, b = 2$, 中: $a(x, y) \equiv [c + 2[xy + (1-x)(1-y)]]^{-1}$, $b(x, y) \equiv [c + 2[x(1-y) + (1-x)y]]^{-1}$, 右: $a(x, y) \equiv c + 2[xy + (1-x)(1-y)]$, $b(x, y) \equiv c + 2[x(1-y) + (1-x)y]$, $c = 0.0001$.

次に時間遅れ $r_i (\geq 0, i = 1, 2, r_1 \neq r_2)$ を導入する. ここでの時間遅れは発展・成長に時間遅れが存在するものである.

$$(4.5a) \quad \dot{x} = 2(2y - 1)(1 - x)x(t - r_1),$$

$$(4.5b) \quad \dot{y} = 2(1 - 2x)(1 - y)y(t - r_2).$$

このとき内点均衡は $r_i = 0 (i = 1, 2)$ のとき, リミットサイクル, $x(t - r_1) > x(t), y(t - r_1) > y(t)$ のときは, 漸近安定となる. $x(t - r_1) < x(t), y(t - r_2) < y(t)$ のときは, 発散していき, 端点に行き着く. 以上のことをまとめると, 次の命題となる.

命題 3 マッチング・ペニーゲーム (4.4) において, 時間遅れを (4.5) のように導入した場合, このとき内点均衡は $r_i = 0 (i = 1, 2)$ のときは, リミットサイクル, $x(t - r_1) > x(t), y(t - r_2) > y(t)$ のときは, 漸近安定となる. $x(t - r_1) < x(t), y(t - r_2) < y(t)$ のときは, 発散していき, 端点に行き着く.

5. 応用例

5.1. クモの巣の理論

ミクロ経済学で時間遅れが重要な役割を担っているクモの巣の理論に連続型の時間遅れをに導入する。そこでまず離散型の時間遅れがある場合のクモの巣の理論を復習する。クモの巣の理論は次に説明するように離散型の価格と数量がともに調整される市場であった [1]。このクモの巣の理論は農産物市場でよく用いられている。

ある財の需要曲線と供給曲線をそれぞれ DD' 曲線と SS' 曲線とする。それらに対応して需要関数と供給関数を

$$D_t = -aP_t + b, \quad S_t = cP_{t-1} + d,$$

とする。ただし、 $a, c > 0$ とする。

ここでは、 P_t は t 期における価格 P_{t-1} は $(t-1)$ 期における価格を示している。すなわち需要の反応には遅れはないが、供給の反応には 1 期間の遅れがあることが仮定されているのである。例えば米の生産では春に作付けし、秋に収穫するから、半年の生産期間が必要である。ところで每期供給された量がちょうど売り切れるように価格が決まるとすれば、

$$D_t = S_t,$$

という条件が每期満たされることになる。これより

$$(5.1) \quad P_t = \left(-\frac{c}{a}\right)P_{t-1} + \frac{b-d}{a},$$

となる。この漸化式を解くと、次のような価格変動の方程式を得る、

$$(5.2) \quad P_t = \frac{b-d}{a+c} + \left(-\frac{c}{a}\right)^t (P_0 - P^*).$$

よってこの価格が安定的であるかは、需要と供給曲線の傾きの比 $\frac{c}{a}$ の値に依存する。もし $0 < \frac{c}{a} < 1$ ならば振動は安定 (図 5, 左) になり、 $\frac{c}{a} > 1$ ならば振動は不安定 (図 5, 右) になり、 $\frac{c}{a} = 1$ ならばリミットサイクルとなることが分かる。

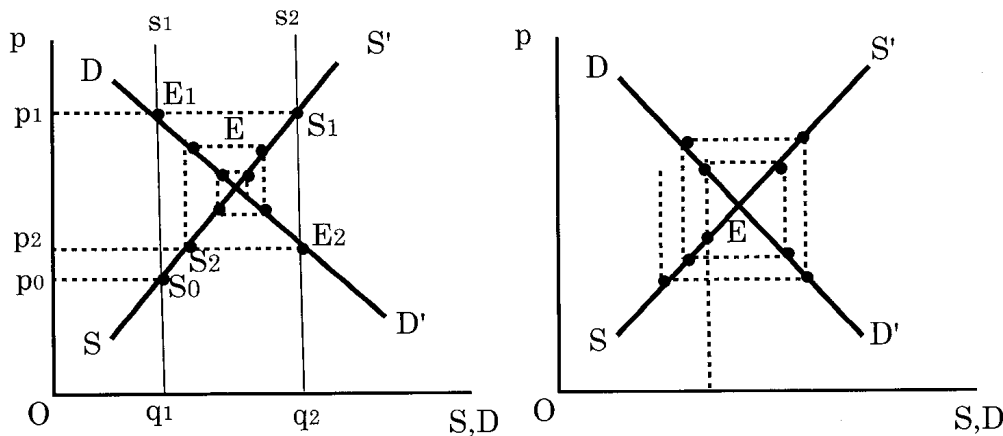


図 5: 左: 安定, 右: 不安定

5.2. 時間遅れの導入

このクモの巣の理論を連続時間体系にし、時間遅れを導入し、この時間遅れがどのように価格に影響を与えるのかを考える。ここでモデルは次のように変更する。生産者はある一定の期前の価格を期待価格を形成し、生産量を決定する。ただしその価格は需要量と供給量の差から需要量の方が多ければ、価格を上げ、供給量の方が多ければ、価格を下げるというように適応的に調整していくとする¹⁾。そこで消費者はその価格を見て、購入の選択を行うとする。

上記のことを数式で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 D(t) &= -aP(t)+b, & S(t) &= cP^e(t)+d, & \text{ただし } P^e(t) &= P(t-r) \\
 \dot{p} &= \{D(t) - S(t)\}\beta, & & \text{ただし } 0 < \beta \leq 1 \\
 (5.3) \quad &= \{b - d - aP(t) - cP(t-r)\}\beta
 \end{aligned}$$

となる。ただし、 P^e を期待価格、 β を適応係数とする。

この図から次のことが分かった。図 6 の左は、 $\frac{c}{a} = 1$ のとき、前節ではリミットサイクルであったが、時間遅れ $r = 0$ のときは収束し、 $r = 4$ のときは振動しながら、収束する。 $r = 20$ のときは周期的に変動することが分かる。図 6 の中は、 $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ のとき、前節では漸近的に収束したが、時間遅れ $r = 0$ のときは収束し、 $r = 4$ のときは振動しながら、収束する。 $r = 20$ のときも振動しながら、

1) Nerlove[5] では離散時間体系で、この調整過程を導入している。

経済学研究 38 号

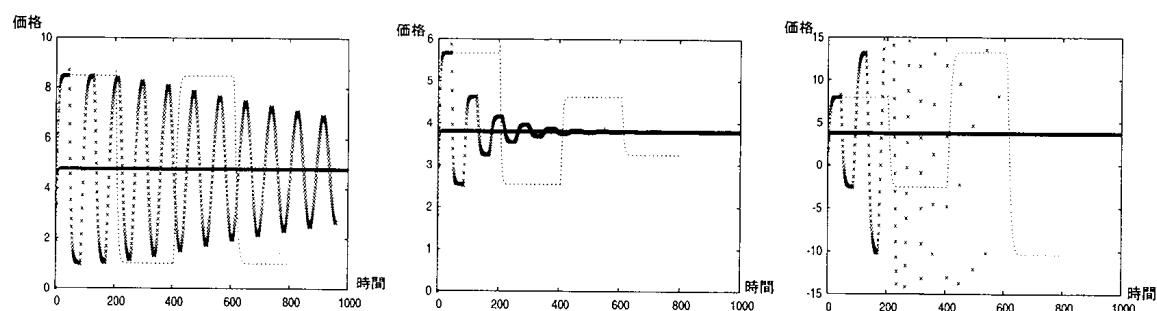


図 6: 時間遅れ $r = 0, r = 4, r = 20$ のときの価格の動態, $b = 20, d = 1, \beta = 1.5$,
左: $\frac{c}{a} = \frac{2}{2}$, 中: $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, 右: $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$

収束することが分かる. 図 6 の右は, $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ のとき, 前節では発散したが, 時間遅れ $r = 0$ のときは収束し, $r = 4$ のときは振動しながら, 発散する. $r = 20$ のときも振動しながら, 発散することが分かる. よってこの時間遅れが大きいときに前節の結果と同様となることが分かる. 以上のことをまとめると, 次のような命題となる.

命題 4 (5.3) 式 $\dot{p} = \{b - d - aP(t) - cP(t - r)\}\beta$ は, 時間遅れ r が十分大きく, $\frac{c}{a} = 1$ のとき周期解となり, $\frac{c}{a} < 1$ のとき, 漸近安定となり, $\frac{c}{a} > 1$ のとき, 発散する.

以上よりクモの巢理論は一般的には需要と供給の傾きの大きさの比によって, 周期的, 発散, 収束したりした. しかし本稿にあるように時間遅れ r が大きい場合, 結果が一致し, 時間遅れの大きさによって, 周期的, 発散, 収束したりすることが分かった. この結果は, Ezekiel[2] でも指摘されている.

5.3. 非対称 2 人ゲームとしてのクモの巢理論

クモの巢理論の議論を一般的な非対称 2 人ゲームとして取扱う. 売り手と買い手は別々の利得構造を持っているので, 一般的な非対称 2 人ゲームとして取扱うことができる. そこで各主体は次のような一般的な利得行列に置かれているとする.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

このときの Replicator 方程式は次のように導出できる.

$$(5.4a) \quad \dot{y} = y(1-y)\{a - (a+c)x\},$$

$$(5.4b) \quad \dot{x} = x(1-x)\{d - (b+d)y\}.$$

ただし y を売り手が戦略 1 をとる確率, x を買い手が戦略 2 をとる確率とする.

ここで時間遅れを導入することによって, 前節のクモの巢理論の結果と等しくなるといふ, 必要条件を導出する. つまり内点均衡がリミットサイクルで

あったものが時間遅れを導入することによって漸近安定になる条件を見出す. そのため内点均衡 $(y^*, x^*) = \left(\frac{a}{a+c}, \frac{d}{b+d}\right)$ の局所安定性を考える. このとき

の Jacobi 行列は,

$$J\left(\frac{a}{a+c}, \frac{d}{b+d}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd(a+c)}{(b+d)^2} \\ -\frac{ac(b+d)}{(a+c)^2} & 0 \end{pmatrix},$$

となる. この Jacobi 行列の固有値は, $\pm \sqrt{\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}}$ となる. よって

$\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負となるとき, 内点均衡はリミットサイクルとなる.

次に (5.4) に利得構造に時間遅れ r を導入する.

$$(5.5a) \quad \dot{y} = y(1-y(t-r))\{a - (a+c)x(t-r)\},$$

$$(5.5b) \quad \dot{x} = x(1-x(t-r))\{d - (b+d)y(t-r)\}.$$

このときの特徴方程式は,

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \det(\lambda I - Ae^{-\lambda r}) &= \begin{pmatrix} \lambda & -\frac{bd(a+c)}{(b+d)^2}e^{-\lambda r} \\ -\frac{ac(b+d)}{(a+c)^2}e^{-\lambda r} & \lambda \end{pmatrix}, \\ &= \lambda^2 - \frac{abcd}{(a+c)(b+d)}e^{-2\lambda r} = 0, \end{aligned}$$

となる. いま (5.6) の解は複素平面上のどこに分布するのか, つまり固有値の

分布を調べる. (5.6) の両辺を r で微分すると,

$$2\lambda \frac{d\lambda}{dr} + \frac{abcd}{(a+c)(b+d)}(-2r)e^{-2\lambda r} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{abcd}{(a+c)(b+d)}(-2\lambda)e^{-2\lambda r} = 0,$$

より

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{abcd\lambda e^{-2\lambda r}}{(a+c)(b+d)\lambda - abcdre^{-2\lambda r}}.$$

となる.

経済学研究 38 号

ここで $r = 0$ のとき $\lambda = \pm \sqrt{\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}}$ である. この解の動きを調べると,

$$\left. \frac{d\lambda}{dr} \right|_{\lambda = \pm \sqrt{\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}}} = \frac{abcd \left(\pm \sqrt{\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}} \right)}{\pm \sqrt{abcd(a+c)(b+d)}} = \frac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0.$$

よって r を 0 から微小に増加させると, 特性根 $\lambda = \pm \sqrt{\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}}$ の分布は左半平面に飛び出す. また r が十分小さな正の数であるとき, (5.5) の解軌道は (5.4) の解軌道から少し変化する. このとき上の議論より (5.6) の特性根の中に実部が負となるものがあるから, (5.5) の解軌道は徐々に軌道が小さくなり, やがてどこかの内点解へ収束する (図 7).

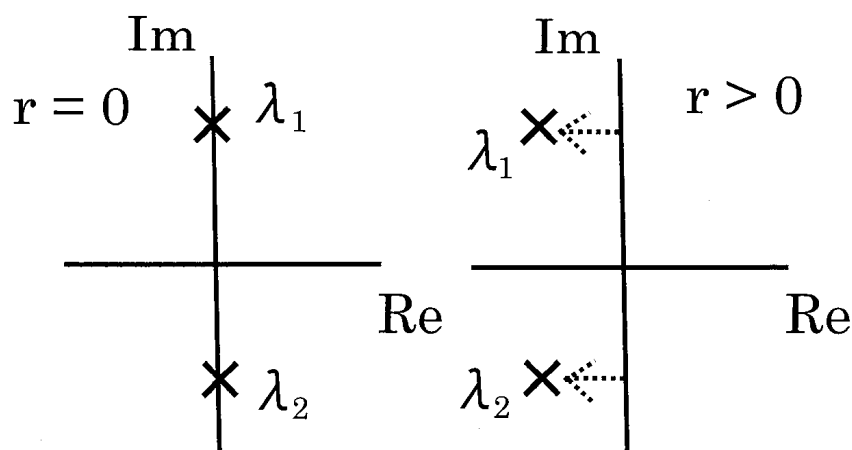


図 7: 複素平面上での (5.6) の固有値の分布, 左: $r = 0$, 右: $r > 0$

以上をまとめると次の命題となる.

命題 5 内点解がリミットサイクルとなる Replicator 系 (5.4) に時間遅れを導入する (5.5) と, $r > 0$ のとき, 内点解は漸近安定となる.

以上のようにクモの巢理論に時間遅れを導入し, 非対称 2 人ゲームとして定式化を行った. そこで当初はリミットサイクルであった解軌道が時間遅れの影響によって, 漸近安定となる ($r < 0$ の場合は端点解へ発散していく) という

Hopf 分岐²⁾の構造をしていることが分かった. なおこの結果は第 3 節のタカ=ハト型のゲームにおいても同様の結論が得られている.

6. 結論

以上のように時間遅れを入れると周期的な関係が漸近安定となったり, その逆となり, 均衡に与える影響があることが分かった. しかしこのようなことが起こるのは, 複数均衡が生じているゲーム (コーディネーション型) や内点解が均衡であるゲーム (タカ=ハト型) などの構造的に不安定なゲームであった (命題 1).

次に Replicator 方程式を 2 本用いる, 代表的な対称 2 人ゲームとして一般化されたジャンケンゲームを取り上げ, 期待利得に時間遅れが存在する場合を考えた. そこから利得を時期によっても主体の行動が変化することが分かった (命題 2). さらに非対称 2 人ゲームとしてマッチング・ペニーゲームを取り上げ, 発展・成長に時間遅れが存在する場合を考えた. そこからも内点解が漸近安定となる場合や発散する場合がある (命題 3).

最後にこの時間遅れが重要な経済学への応用例としてクモの巣理論を取り上げた. まず一般的なミクロ経済学の教科書で見られる離散の時間遅れを取り上げた. そこから安定・不安定の条件を導出した. 次に連続の時間遅れがあるクモの巣理論をモデル化し, 同様に安定の条件を求めた. そこから離散と連続から導出される結果は時間遅れの項 r が大きい場合に限り, 合致すると分かった (命題 4). そこから安定・不安定となる条件は需要と供給曲線の傾きの比だけでなく, 時間遅れの大きさも考慮に入れなければならないと分かった. このクモの巣理論を売り手と買い手の一般的な非対称 2 人ゲームとして考えると, 内点解がリミットサイクルとなる場合に時間遅れを導入すると ($r > 0$), 内点解が漸近安定となり (命題 5), Hopf 分岐の構造をしていることが分かった. つまり時間遅れの存在がクモの巣安定となることを示している.

2) 実固有値に起因して起こる分岐である. 詳しくは, 分岐論の教科書などを参照のこと.

参考文献

- [1] 浅田統一郎: 『ミクロ経済学の基礎』中央経済社, 2002 年.
- [2] Ezekiel, Mordecai: "The Cobweb Theorem," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.52, No. 2. (Feb., 1938), pp. 255-280.
- [3] Hofbauer, Josef and Sigmund, Karl: *Evolutionary Games and Population Dynamics*, Cambridge University Press, 1998. (邦訳): 竹内康博, 佐藤一憲, 宮崎倫子 (訳) 『進化ゲームと微分方程式』現代数学社, 2001 年.
- [4] 内藤敏機, 日野義之, 原惟行, 宮崎倫子: 『タイムラグをもつ微分方程式』牧野書店, 2002 年.
- [5] Nerlove, Marc: "Adaptive Expectations and Cobweb Phenomena," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 72, No. 2. (May., 1958), pp. 227-240.
- [6] Weibull, Jörgen W: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, 1995. (邦訳): 大和瀬達二 (監訳) 『進化ゲーム理論』オフィスカノウチ, 1998 年.