

住宅再建共済制度に関する 数理社会学的考察 II

加入率の分析

浜田 宏*
石田 淳**
塗坂 健次*

要 旨

兵庫県の住宅再建共済制度への加入は、行政が期待している水準ほどには高くない。加入率がこのまま低い水準でとどまるのか、それともこれから増加するのは分からない。そこで人々が共済に加入するか否かをどのような判断に基づき決定しているのかを単純なモデルによって表現し、今後の加入率がどのように変化するのかを予測する。モデルは大きくは二種類のタイプに分かれる。一つは、期待利得に基づくモデルであり、「共済制度に加入することが、金額的に得かどうか」という判断を想定している。もう一つは期待時間に基づくものであり、「大災害の起こる前に加入するのが得だ」という判断を想定している。いずれのモデルも合理性についての着眼点は異なるものの、「合理的選択理論」に基づいている。期待時間に基づくモデルは、時間をほとんどいたるところ連続な確率変数と見なすことで期待値をパラメータの明示的な関数として表すことが可能で、結果的に多くの一般的な命題を導出することができる。そのうちの 하나가、人々が地震発生周期に関してなんらかの信念を持っているとき、たとえその周期以前に地震が発生する確率が、主観的にゼロでないにしても、共済に加入しない場合がある、という命題である。

キーワード：災害、住宅再建共済制度、加入率、期待値

*関西学院大学

**日本学術振興会 特別研究員

1 はじめに

第1論文で述べたように、2006年4月末現在、兵庫県の住宅再建共済制度への加入は7万8千強戸、兵庫県の加入対象戸数の4.4%に上る（兵庫県調べ）。この加入率を多いと見るか少ないと見るかは、視点によって異なるだろう。兵庫県における地震保険の加入率が、同保険制度が創設された1966年以降40年が経過して、今尚15%弱であることを考えると、すでに8カ月で4.4%に達したことは決して低くないとも言えるし、新聞報道のように「低迷」していると言えないこともない。共済制度が発足する事前の「加入意思」がほぼ7割に達していたことを思えば、まだまだ今後加入率は伸びていくことが期待されるものの、その伸びの速度や軌跡については定かではない。加入率が現時点で低いとしても、将来に亘って低いままであるのと、やがては急速に伸びるのとでは全く意味が違う。単一時点での評価については慎重でなければならない。

いったい、伸びの速度や軌跡はどのようにして決まってくるだろうか。そのことを見るために、まずは個々人の加入行動にまで立ち返って考えてみよう。そもそも個人（ここでは県民）は、どのようなことを考えて共済制度に加入（ないしは、非加入）を決定しているのだろうか。以下、数理モデル大きくは二つの種類のモデルに基づいて考察する。一つは、人々が「共済制度に加入することが、そもそも得かどうか」の判断にもとづいて決定しているのではないかと、いう想定に立ったモデル群である。もう一つは、「できるだけ大災害の起こる直前に加入するのが得だ」との判断にもとづいて決定しているのではないかと、いう想定に立ったモデル群である。前者にとっては、利得（給付金）とコスト（負担金）の差し引きによる期待利得の計算が主な課題である。後者にとっては、期待時間（いつ、大災害が発生するか）の計算が主な課題である。それぞれの課題は、人々の思考のメカニズムにとっての経験的課題であると同時に、そのようなメカニズムを想定した数理モデルにとっての数学的・理論的課題でもある。

いずれのモデルも、社会学における「合理的選択理論」に基づいている。

合理性についての着眼点は異なるものの、それらが合理的選択を前提としているという点では共通の要素をもっている。むろん、合理的選択理論は人々が現実にも合理的であると見做しているわけではない。あくまで人々の行動（ここでは共済制度への加入行動）を説明するための方法である¹⁾。

2 期待利得に関する離散モデル

2.1 ワンショット・モデル

共済に加入した場合としなかった場合の期待値（直観的にいえば確率的な平均値）を比較して人々が共済に加入するかどうかを決定するモデルを考える。最初に示すのは、もっとも単純な期待利得による加入誘因モデルである。個人から見た加入の意思決定とそれに続く事態の客観的流れは図1のような単純な確率モデルで表現することができる。最も単純なこのモデルでは、災害が t 年以内に起こる発生確率が与えられているとみなす。モデルの想定している状況を、兵庫県の現行制度を念頭に公理群として表現すると以下のとおりである。

- 公理 1-1 各世帯は共済制度に「加入する」か「加入しない」かの選択をする。
- 公理 1-2 制度加入（ないし非加入）の選択後 t 年（ $t=0, 1, 2, 3, \dots$ ）以内にただ一度大規模災害が p の確率で生じる。逆に、 $1-p$ の確率で災害は生じない。大規模災害は一度生じた後は当分のあいだ（＝モデルが取り扱う時間の定義域においては、再びは）生じない。
- 公理 1-3 災害発生後、 q の確率で家屋の倒壊（全壊もしくは半壊）が生じ、 $1-q$ の確率で倒壊を免れる。
- 公理 1-4 共済制度に加入した場合、加入費として毎年0.5万円がかかる。加入後の脱退はないとする。
- 公理 1-5 家屋が倒壊した場合、再建コスト c がかかる。

公理 1-6 共済に加入して、かつ災害によって家屋が倒壊した場合、600（万円）の利得を得る。

公理 1-7 人は共済制度発足時に、加入の期待利得が非加入のそれを上回るならば、加入する。

そこで、共済制度に加入した場合としない場合のツリーを示す。

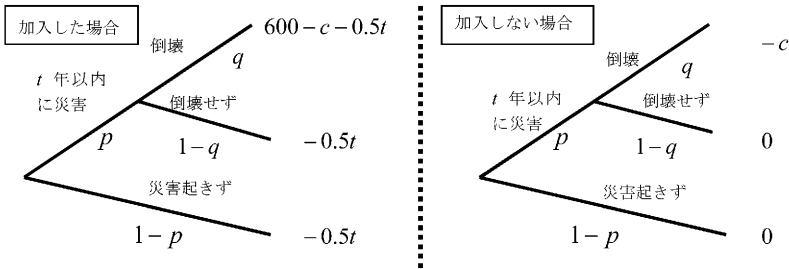


図1 加入した場合としない場合の樹形図

このとき、加入時の期待利得 $u(\text{加入})$ は、

$$\begin{aligned} u(\text{加入}) &= (600 - c) pq - 0.5 tp(1 - q) - 0.5 t(1 - p) \\ &= (600 - c) pq - 0.5 t(1 - pq) \end{aligned}$$

また、非加入時の期待利得 $u(\text{非加入})$ は、

$$u(\text{非加入}) = -cpq$$

である。結論として、加入誘因を T とすると、

$$T = u(\text{加入}) - u(\text{非加入}) = 600 pq - 0.5 t(1 - pq) > 0$$

のとき、加入することが常に「得」である。

この式は、 pq の確率で災害が発生しかつ家屋が倒壊した場合に得られる600と、 $1 - pq$ の確率で災害が発生しかつ家屋が倒壊しなかった場合に支払わなければならない $0.5t$ との比較のみが、加入の損得に関連することを意味する。つまり、各世帯がそれぞれの住宅価格や希望再建状態に応じて支払わなければならないコスト c は、加入の損得にはまったく関連しない。ただし、非加入時には再建しないと仮定すると、加入誘因は、

$$(600 - c)pq - 0.5t(1 - pq)$$

となり、 c が大きくなるにつれて加入誘因は小さくなる。つまり、人々が「再建を前提として加入するか、再建はあきらめて非加入で済みますか」という選択肢を前提に意志決定する場合は、再建コストは大きな意味をもつ。

ここで、 $P = pq$ とすると、 $T = 600P - 0.5t(1 - P)$ であり、 T を P 、 t について偏微分すると、

$$T/P = 600 + 0.5t > 0, \quad T/t = -0.5(1 - P) < 0$$

である。つまり、 T は P について単調増加、 t について単調減少である。 $T = 0$ のとき、加入と非加入の期待利得が等しくなる。そのような P は $P = 0.5t / (600 + 0.5t)$ である。 P は単調増加なので、0 から $0.5t / (600 + 0.5t)$ の区間が、非加入が得になる P である。

期待利得計算に支えられたこのワンショット・モデルが、共済制度への加入行動をうまく表現しているかどうかの検証は実に難しい問題を含んでいる。モデルは「加入が得」である条件を導出することに成功しているが、このモデルが加入率についての予測を導き出すことのできるモデルだと見なすならば、私たちは P や t のパラメータ（実際には、主観的に思われた値）について推定しなくてはならない。しかし残念ながらこれについてはデータが存在しないのである。大災害が発生して自分の家屋が倒壊する確率をどの程度のものだと踏んでいるか、また大災害は向後何年以内くらいには起きると踏んでいるか、人々の予想についてのデータが必要だ。今の段階では、そうしたモデルの検証手続きを逆転させて、現加入率が示唆する世帯（全世帯の4.4%）のみが、「加入が得」との判断を下している、と解釈するにとどめておかなければならない。モデルの検証に向けての、今後の調査の仕方としては、初年度における加入者と非加入者のパラメータ推定値の差を浮き彫りにするののも一つのやり方であろう。

2.2 独立試行の繰り返しモデル

次に、一年目には確率 p_1 で、二年目には確率 p_2 で災害が起きるという独立試行を繰り返すモデルを考える。モデルの公理は基本的にはワンショット

の場合と同様で、樹形図は図2に示したとおりである。なお、災害が生じた場合には確率 q で倒壊して、確率 $1 - q$ で倒壊しないので、災害が生じた場合の期待利得は、

$$E(x) = q(600 - c - 0.5t) + (1 - q)(-0.5t) = (600 - c)q - 0.5t$$

である。それゆえ図2の樹形図では「倒壊する / しない」を示すパスは省略した。

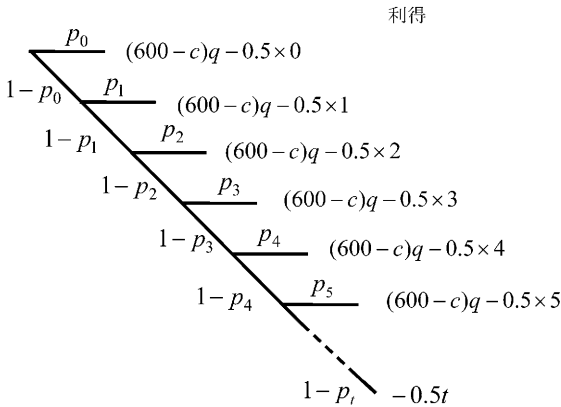


図2 繰り返しモデルの樹形図

共済制度の発足時 ($t = 0$) に加入した人の場合、起こりうる結果それぞれに対応する利得は次のとおりとなる。

t 年後に災害が起こって、家屋が倒壊したときの利得 = $600 - c - 0.5t$

t 年後に災害が起こったが家屋は倒壊しなかったときの利得 = $-0.5t$

t 年後につきに災害は起こらなかったときの利得 = $-0.5t$

これらにそれぞれ生起確率をかけて、加入した人の期待利得を求めると、次のように表すことができる。

$$E(X) = \sum_{i=0}^{t-1} B \left(A - \frac{i}{2} \right) - \mathbb{E} \left[\prod_{i=0}^{t-1} (1 - p_i) \right] 0.5t$$

ここで、

$$B_i = p_i \prod_{j=0}^{i-1} (1 - p_j), \quad B_0 = p_0, \quad A = (600 - c)q - \frac{1}{2}$$

これに対して、共済制度に加入しなかった人の期待値は、

$$E(Y) = -qc \sum_{i=0}^t B_i$$

いま、加入した方が「得」であることの条件を求めて整理すると、

$$E(X) - E(Y) = \sum_{i=0}^{t-1} B \left(600q - \frac{1+i}{2} \right) + B_t qc - \sum_{i=0}^t \prod_{j=0}^i (1-p_j) 230.5t > 0$$

$$\sum_{i=0}^{t-1} B \left(600q - \frac{1+i}{2} \right) + B_t \frac{1}{p_t} [p_t(qc + 0.5t) - 0.5t] > 0$$

この不等式の左辺の値を規定しているパラメータには p_i, q, t, c があり、不等式の値の正負は直ちに自明ではない。しかし左辺の値を規定している構造的性質についていくつかの性質を知ることができる。パラメータのうち、 c は第 2 項には含まれているが、第 1 項には含まれていない。つまり、再建コストの多寡は第 2 項にのみ関連する。第 2 項の [] のなかで正であれば第 2 項全体は正である。さらに、偏微分してみれば分かるように、左辺の値は q が大きければ大きいほど、大きくなる。左辺の値の正負は、それぞれのパラメータに具体的な数値をあてはめてみれば基本的に計算によって「知る」ことは可能だ。たとえば、倒壊率を単純化のために 100 パーセントとおいてみる²⁾。すなわち、 $q = 1$ である。「今すぐ起こってもおかしくない」と思われる確率のさまざまな値を p_0 に入れてみる。 c は再建コストであり、兵庫県の支援制度調査会では「標準的再建築費用」として 2,000 万を想定した (@ 16.6 万円 / 122.74 平方メートル)。試しに、 $p_0 = 0.001, t = 5$ をとってみると、上の不等式は成り立つ。きわめて大雑把に言えば、倒壊率が高くて、再建コストが高いならば、制度の発足時から加入するのが「得」だと言えるだろう。しかし倒壊率が低ければ、決して「得」とは言えない。むしろ、倒壊率といっても実際に人々の加入行動に影響をもたらすのは災害の発生確率同様、認知された主観的確率でしかない。倒壊率が実際に低いというよりは、「低い (= 自分のところは大丈夫だ)」という認知があれば、共済制度に加入することは「得」とは見えなくなる。現在の兵庫県における加入率の「低迷」問題は、こうしたことが影響していると考えられる。

このモデルの検証もワンショット・モデル同様、現在の段階では困難であ

る。今後に向けては、それぞれのパラメータを推定するさいのデータとなる情報を収集しなくてはならない。先のモデルでは P という合成パラメータの人々の推定値を知ればよかったが、本モデルでは発生確率と倒壊確率のそれぞれをどの程度に見積もっているかの情報も必要だ。再建コストについても平均的な値を代入することは可能でも妥当でもあるが、しかし、人々の間で相当の食い違いが生じていることも予想される。ある人は高く、ある人は低く、といった具合に。そこには見積もりの多寡というだけでなく、社会経済的な階層差という要因が見積もりの多寡に介在していることも考えられる。

3 期待時間に関するほとんどいたるところ連続な時間モデル

3.1 幾何分布モデル

以下では、共済制度が補償する災害として、地震を明示的に想定することにしよう。もちろん、共済制度は大雨や台風による被害にも適用されるが、その成立経緯からいって大地震による被害を第一に想定していることは明らかである。さて、地震のような大きなリスクは、交通事故のように大数の強法則を適用して確率を見積もることが困難である。地震はその性質上、発生メカニズムにも依存するが、一度生じるとしばらくは生じないという特殊なタイプの事象であると考えられる。そこで次には地震がいつ起こるかという期待時間に人々が注目するようなモデルを考える。以下に定式化するモデルの利点としては、時間を連続的に変化するものとして扱えること、確率変数の期待値が簡潔な形で求められること、結果を利用して全体の加入率の変化を分析することができること、があげられる。

期待時間とは、いつ大地震が起こるのか、その平均である。その結果、たとえば大地震が100年後にしか起こるまいという期待値があたえられれば、それ以前に共済制度に加入することはいかにも「無駄」のように映る。ここでいう「期待時間モデル」とは、期待時間を現実の時間が越えていると判断したときに、そしてその時のみ人は加入しようとするのではないかと仮

定することから構成される。以下、先ほどのモデルと同様に、公理群によってまずは表現してみよう。

- 公理 3-1 各世帯は共済制度に「加入する」か「加入しない」かの選択をする。
- 公理 3-2 制度加入（ないし非加入）の選択後 t 年以内に大地震が発生する確率は p_t である。大地震は一度生じた後は当分のあいだ（=モデルが取り扱う時間の定義域においては、再びは）生じない。
- 公理 3-3 期待発生時間が現在時刻 t よりわずかにでも手前にある者は、共済（保険）に加入する。人は共済制度発足時に、加入の期待時間が制度の発足から現在までの時間を下回るならば、加入する。逆に、上回っているかぎり、加入はしない。

2 節の離散的なモデルにおける p_t は「 t 年目（のみに）地震が生じる確率」を表していたが、本節のモデルでは p_t は「今から t 年までの間に地震が生じる確率」を表していることに注意する。つまり本節で扱うモデルは、時間をほとんどいたるところ連続³⁾な確率変数とみなしたモデルである。というのも、ある期間で選択枝が分岐するツリーを前提にした離散的確率モデルでは既に示したように期待利得の計算が煩雑になり、しかも地震が繰り返し発生するという暗黙の仮定をおかねばならないので、人々の直感的認識とはやや異なるモデルになってしまう可能性があるからである。人々が単に地震がいつ起こるかということだけに注目するようなモデルを考えれば、このようなテクニカルな問題をクリアできる。まず、人々の主観として例えば「現時点から 3 年以内に地震が来る確率」を考える。その確率と「現時点から 5 年以内に地震が来る確率」を比べると、リスクが生じる期間が延びた分、5 年以内に来る確率の方が主観的には大きくなるだろう。そしてさらにリスクが生じる期間が延びるとともに主観的な確率は大きくなるが、その増加の仕方はだんだんと小さくなると考えられるだろう。というのも直近の未来の単位時間内に起こるリスクと、遙か未来の単位時間内に起こるリスクと

を比較すると、遙か未来に起こるリスクの確率を少し軽視してしまうからである⁴⁾。つまりリスク生起確率に割引率を乗じていると考えればよい。

ここで p_t を「0 時点から t 時点以内に地震が生じる確率」と定義する。そしてこの p_t は t が増加するとともに増加すると仮定する。このような時間に関して単調に増加する確率の列には多様な定義が可能であるが、もっとも単純なタイプとして、

$$p_{t+1} = p_t + (1 - p_t)\alpha \quad \text{ただし } 0 < \alpha < 1, t = 0 \text{ のとき } p_0$$

を定義として採用する⁵⁾。 α は増加のパラメータであり、その数値が大きいと増加の仕方も大きくなる。

命題 1 時間に関して単調に増加する確率の列を、

$$p_{t+1} = p_t + (1 - p_t)\alpha \quad \text{ただし } 0 < \alpha < 1$$

と定義する。この漸化式を t の関数とみた場合の一般式は

$$p_t = (1 - \alpha)^t (p_0 - 1) + 1 \text{ である。}$$

証明 数学的帰納法を用いる。 $t = 1$ のとき定義より、

$$p_1 = p_0 + (1 - p_0)\alpha$$

一方、

$$p_1 = (1 - \alpha)(p_0 - 1) + 1 = p_0 + (1 - p_0)\alpha$$

なので $t = 1$ のとき成立する。 $t = n - 1$ で成立すると仮定して $t = n$ の場合を考える。定義より、

$$p_n = p_{n-1} + (1 - p_{n-1})\alpha$$

仮定より、

$$\begin{aligned} p_n &= (1 - \alpha)^{n-1} (p_0 - 1) + 1 + (1 - \alpha)^{n-2} (1 - \alpha)^{-1} (p_0 - 1) \alpha \\ &= (1 - \alpha)^n (p_0 - 1) + 1 \end{aligned}$$

よって一般式が示せた⁶⁾。

さて p_t について、

$$p_t = \begin{cases} (1 - \alpha)^t (p_0 - 1) + 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

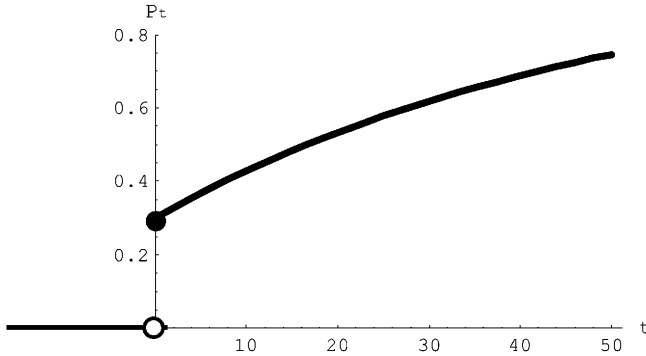


図3 時間 t の変化に対応した p_t のグラフ

であることに注目すれば、 p_t は、

1. $0 \leq p_t \leq 1$ を満たす増加関数である
2. 右連続で左極限を持つ
3. $\lim_{t \rightarrow -0} p_t = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} p_t = 1$

という三つの性質を満たす。ゆえに p_t は確率変数 T の分布関数になっている。いま、全事象は実数全体の集合なので、

$$\Omega = R = (-\infty, 0) \cup [0, \infty)$$

と分割することができ、それぞれの確率は、

$$P(-\infty < T < 0) = 0$$

$$P(T = 0) = p_0$$

$$P(0 < T < \infty) = \int_0^{\infty} P'(t) dt = 1 - p_0$$

と定めることができる。完全加法性により、

$$P(\Omega) = P(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = 1$$

だから確かに確率モデルの公理は満たされている。つまり T の分布は 0 のときのみ離散的で、それ以外は連続な分布である。いいかえれば T は、ほとんどいたるところ連続な確率変数である。それゆえ任意の $a > 0$ について $P(T = a) = 0$ である。

命題2 地震発生時間 T の期待値は、

$$E(T) = \frac{p_0 - 1}{\log(1 - \alpha)}$$

である。

証明 確率変数 T の分布関数は $t = 0$ の点で微分不可能なのでその点では密度関数を持たない。よって T の期待値は、

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty t \cdot (p_0 - 1)(1 - \alpha)^{\log(1 - \alpha)t} dt \\ &= (p_0 - 1) \log(1 - \alpha) \int_0^\infty t(1 - \alpha)^{\log(1 - \alpha)t} dt \\ &= (p_0 - 1) \log(1 - \alpha) \frac{(1 - \alpha)^{3t} \log(1 - \alpha) - 114}{13 \log(1 - \alpha)^4} \Big|_0^\infty \\ &= (p_0 - 1) \log(1 - \alpha) \left(0 - \frac{-1}{13 \log(1 - \alpha)^4} \right) = \frac{p_0 - 1}{\log(1 - \alpha)} \end{aligned}$$

である。なお計算の過程で部分積分定理、

$$a^x dx = xa^x + (\log a) a^x dx \quad a^x dx = \frac{a^x (3x \log(a) - 114)}{13 \log(a)^4}$$

と、付録で示した **補題11**、

$$\lim_t (1 - \alpha)^{3 \log(1 - \alpha)t} - 114 = 0$$

を用いた。

命題3 地震発生時間 T の期待値は初期確率 p_0 がおおきくなるほど小さくなる。また増加パラメータ α が大きくなるにつれても小さくなる。

証明 偏微分によって確かめれば、

$$\frac{E(T)}{p_0} = \frac{1}{\log(1 - \alpha)} < 0$$

なので p_0 に関しては減少である。一方、

$$\frac{E(T)}{p_0} = \frac{p_0 - 1}{(1 - \alpha)^3 \log(1 - \alpha)^4} < 0$$

なのでやはり α についても減少である。

系 4 (幾何分布の導出) $t > 0$ の場合に p_0 が、

$$p_0 = \frac{\log(1 - \alpha) + \alpha}{\log(1 - \alpha)}$$

をみたすとき $p(t)$ は幾何分布の確率関数と等しくなる。

証明 単純計算によって明らかである。

$$p(t) = (p_0 - 1)(1 - \alpha)^{t-1} = \alpha(1 - \alpha)^{t-1}$$

なる恒等式を解けば、

$$p_0 = \frac{\log(1 - \alpha) + \alpha}{\log(1 - \alpha)}$$

となる。

この系ゆえに、本節で導入したモデルを幾何分布モデルと呼ぶことができる。

命題 5 地震発生確率の増加パラメータ α が一様分布していると仮定する。このとき共済の加入率は、

$$\exp\left\{\frac{p_0 - 1}{t}\right\}$$

である。

証明 仮定より α の確率密度関数は、

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である。公理より、期待発生時間が現在時刻 t よりわずかにでも手前にある者は共済(保険)に加入すべきである、と考える。すなわち、

$$\text{現在時刻} \geq \text{期待発生時間} \quad t \geq \frac{p_0 - 1}{\log(1 - \alpha)}$$

となっている人々は共済に入るべきである。このような人々が社会全体で存在する割合が加入者率(の予測値)である。どのくらいの割合存在するのかを計算するには、 α が一様分布であるという仮定を利用すればよい。いま上の式を α について解けば、

$$\alpha \geq 1 - \exp\left\{-\frac{p_0 - 1}{t}\right\}$$

となる。 α の分布関数は、

$$P(\alpha < x) = F(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

なので $0 < x < 1$ の範囲で考えれば $P(\alpha > x) = 1 - F(x) = 1 - x$ である。

よって期待時間に関する上式が成立する確率（加入者率）は、

$$1 - \left(1 - \exp\left\{-\frac{p_0 - 1}{t}\right\}\right) = \exp\left\{-\frac{p_0 - 1}{t}\right\}$$

である。

この結果を利用して加入率を分析する。図4および図5に示したのは、時間の変化に対応した加入率の変化である。

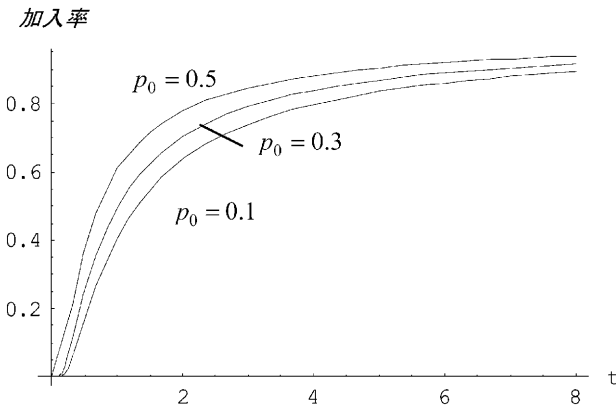


図4 初期確率 p_0 の変化に対応した加入者率の変化

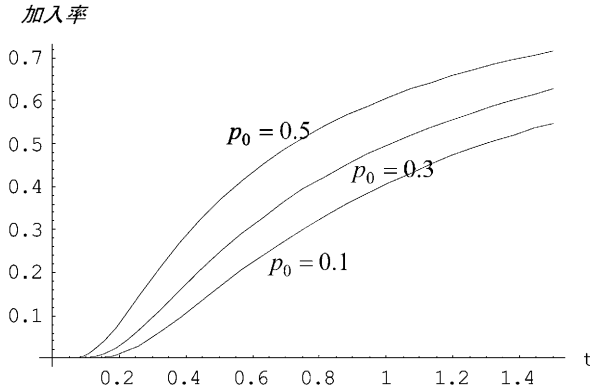


図5 初期確率 p_0 の変化に対応した加入者率の変化（時間 t が小さいとき）

命題6（加入率に関する含意） 加入率は p_0 に関して増加である。また時間の変化に対しても増加だが、増加の仕方は時間と共に小さくなる。

証明 加入率を p_0 について偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial p_0} \exp\left\{\frac{p_0 - 1}{t}\right\} = \frac{1}{t} \exp\left\{\frac{p_0 - 1}{t}\right\} > 0$$

なので、加入率は p_0 に関して増加である。また、 t について偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp\left\{\frac{p_0 - 1}{t}\right\} = \frac{-e^{\frac{p_0 - 1}{t}}(p_0 - 1)}{t^2} > 0$$

だから、時間が経つと共に加入率は増加する。さらに二階偏導関数は、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp\left\{\frac{p_0 - 1}{t}\right\} = \frac{e^{\frac{p_0 - 1}{t}}(p_0 - 1)(-1 + p_0 + 2t)}{t^4}$$

だから、

$$t < \frac{1 - p_0}{2} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp\left\{\frac{p_0 - 1}{t}\right\} > 0,$$

$$t > \frac{1 - p_0}{2} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \exp\left\{\frac{p_0 - 1}{t}\right\} < 0$$

である。つまり t が小さな最初の僅かな期間のみ、時間の経過と共に増加の仕方も大きくなるが、やがて加入率の伸びは鈍くなる。

3.2 ロジスティック・モデル

3.1節で導入した幾何分布モデルは確率分布として見た場合、その確率密度関数が時間に関して単調に減少する⁷⁾。しかしながらもし地震が一定周期で活動することが分かっている場合には、その周期の境目付近で確率密度関数が上昇し、やがて減少していくような主観的な確率を考慮する必要がある。例えば20年に一回くらい大型の地震がくると人々が信じている場合、直前の活動から20年経過したあたりが主観的にはもっとも地震の発生する確率が高くなっているはずだ。図6は、そのような周期を持つ主観的確率の典型的な確率密度関数の形を示している。

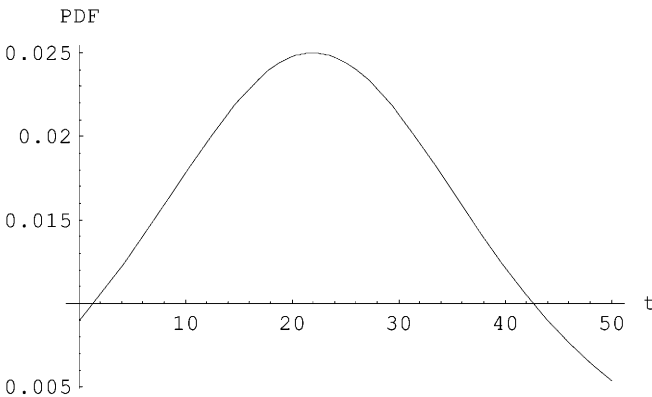


図6 周期を持つ主観的確率の確率密度関数の様子

図6に示したタイプの確率密度関数に対応する分布関数は、時間に関して単調に増加するが、増加の仕方がはじめは鋭く、後に緩慢になるような関数として表すことができる。そこで、0時点から t 時点までに地震が発生する確率を漸化式として、

$$p_{t+1} + (1 - p_t)p_t\alpha \quad \text{ただし} \quad 0 < \alpha < 1, \quad t=0 \text{ のとき } p_0$$

を定義する。この仮定の下で p_t の列のグラフを示す(図7)。

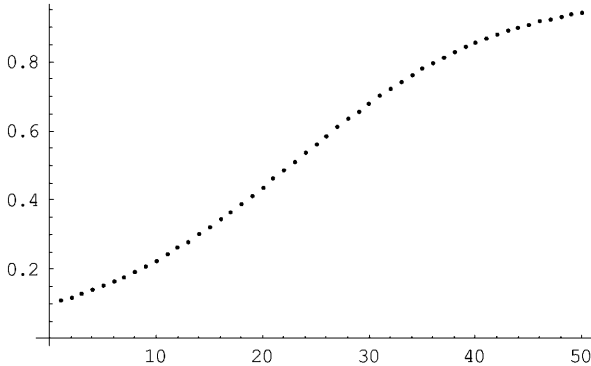


図7 $p_{t+1} = p_t + (1 - p_t) p_t \alpha$ のグラフ (ただし $p_0 = 0.1, \alpha = 0.1$)

$p_{t+1} - p_t = (1 - p_t) p_t \alpha$ であるから瞬間的な増分を、

$$\frac{dp}{dt} = (1 - p) p \alpha$$

と考え、この微分方程式を解き t の関数としてみた場合の一般型を近似する。このタイプの微分方程式の解はロジスティック曲線として知られている。変数分離形の定理を使って解けば初期値 $t = 0$ のとき $p = p_0$ の場合、

$$p(t) = \frac{e^{t\alpha} p_0}{1 - p_0 + e^{t\alpha} p_0} = \frac{p_0}{p_0 + (1 - p_0) e^{-t\alpha}}$$

である。この関数は $t = 0$ のときのみ離散的で $t > 0$ の場合は連続なのでその区間では微分可能である。ゆえに確率密度関数は、

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{e^{t\alpha} (1 - p_0) p_0 \alpha}{[p_0 + (1 - p_0) e^{-t\alpha}]^2}$$

より、

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{e^{t\alpha} (1 - p_0) p_0 \alpha}{[p_0 + (1 - p_0) e^{-t\alpha}]^2}, & t > 0 \end{cases}$$

である。以降、本節のモデルをロジスティック・モデルと呼ぶ。このとき次が成立する。

命題7 ロジスティック・モデルの場合、地震の期待発生時間は、

$$E(T) = -\frac{\log p_0}{\alpha}$$

である。

証明 期待値の定義より、

$$\begin{aligned} E(T) &= p_0 \cdot 0 + \int_0^t \frac{e^{t\alpha}(1-p_0)p_0\alpha}{131+p_0(e^{t\alpha}-1)} dt \\ &= \frac{p_0 e^{t\alpha} t \alpha - 131 + p_0(e^{t\alpha} - 1)}{131 + (e^{t\alpha} - 1)p_0} \\ &= -\frac{\log p_0}{\alpha} - \frac{0 - \log(1)}{131 + 0} = -\frac{\log p_0}{\alpha} \end{aligned}$$

である。なお、二段目から三段目の以降では付録で示した **補題 12** を用いた。

命題 8 ロジスティック・モデルの場合、地震の期待発生時間は p_0 と α について減少である。

証明 期待値を p_0 について偏微分すると、

$$\frac{E(T)}{p_0} = -\frac{1}{\alpha p_0} < 0$$

α について偏微分すると、

$$\frac{E(T)}{\alpha_0} = \frac{\log p_0}{\alpha^2} < 0$$

である。ゆえに命題がなりたつ。

命題 9 (加入率) ロジスティック・モデルにおける共済加入率は、

$$1 + \frac{\log p_0}{t}$$

である。

証明 現在時刻が期待値と同じかそれ以上になっている人は共済に加入する。

$$t \geq E(T) = -\frac{\log p_0}{\alpha}$$

この不等式が成立する割合は α の分布関数によって定まる。まず α について解けば、

$$\alpha \geq -\frac{\log p_0}{t}$$

である。ゆえに $P(\alpha > x) = 1 - F_\alpha(x)$ が不等式の成立する割合である。加入率は、

$$1 - F_\alpha(x) = 1 + \frac{\log p_0}{t}$$

である。

加入率

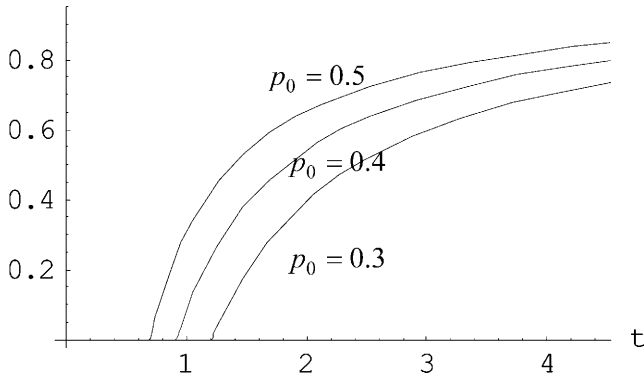


図8 ロジスティック・モデルの加入率のグラフ

ロジスティック・モデルにおける加入率のグラフを図8に示す。人々の主観的な地震発生確率は、連続確率変数によって与えられるので任意の時点 $t = a$ において確率はゼロである。 $P(T = a) = 0$ 。ここで任意の点 t の近傍 $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ を考え、微小区間(期間) 2ε の間で地震が生じる主観的確率を考える。

命題10 (主観的な地震発生周期) 微小期間における人々の主観的地震発生確率が最も高くなるのは、

$$t = \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{p_0} - 1\right)$$

の近傍である。言い換えれば $\varepsilon > 0$ として、

$$a \in \left[0, \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) + \varepsilon\right), P\left(\frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) - \varepsilon \leq T \leq \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) + \varepsilon\right) > P(a - \varepsilon \leq T \leq a + \varepsilon)$$

が成立する。

証明 ロジスティック型の確率密度関数は、

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{e^{t\alpha}(1-p_0)p_0\alpha}{(1+p_0(e^{t\alpha}-1))^2}, & t > 0 \end{cases}$$

である。 $f(t)$ のグラフの形状から、一階導関数が0に等しくなるとき、その

$t > 0$ なるとき、

$$f'(t) = \frac{e^{t\alpha}(p_0-1)p_0(p_0-1+e^{t\alpha}p_0)\alpha^2}{(1+p_0(e^{t\alpha}-1))^4} = 0$$

$$e^{t\alpha}(p_0-1+e^{t\alpha}p_0) = 0$$

よって、

$$e^{t\alpha} = 0 \text{ もしくは } p_0 - 1 + e^{t\alpha}p_0 = 0$$

のとき、一階導関数が0になる。数学的には $t = -\infty$ なるときにも密度関数の傾きが0になるが、われわれの社会学的関心はそこにはない。残る場合の、

$$p_0 - 1 + e^{t\alpha}p_0 = 0 \quad t = \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{p_0} - 1\right)$$

が求める数値である。

この近傍は「 t 年後に地震が来るぞ」という人々の信念における「 t 年」の理論的予測に対応している。この命題を利用すると、人々の地震周期に関する信念が決まっているときにパラメータの可能な組み合わせが数学的にかなり限定できる。いわば同じ効用を生み出す「無差別曲線」が決まるように、5年や10年といった周期にあわせて主観確率の確率密度関数を最大化するためのパラメータの組合せが自動的に決まるのである(図9)。

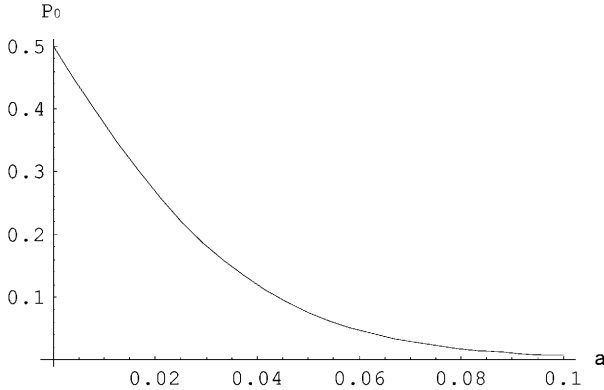


図9 $t=50$ の場合の p_0 と α の “無差別曲線”

例えば主観的周期が10年で初期確率が $p_0 = 0.1$ のとき、 α の値は必然的に、

$$10 = \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{0.1} - 1\right) \quad \alpha = 0.219722$$

でしかありえない。すると期待値も一意的に定まり、この場合は10.4795年である。一般に、

$$\text{期待値} > \text{主観的周期}$$

すなわち、

$$\text{期待値} - \text{主観的周期} = -\frac{1}{\alpha} \log p_0 - \frac{1}{\alpha} \log\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) > 0$$

が成立するので人々が主観的周期を持っている場合、周期以前に加入することはない。逆に言えば、人々が地震発生周期に関してなんらかの信念を持っているとき、たとえその周期以前に地震が発生する確率が、主観的にゼロでないにしても、共済に加入しない場合があることをモデルは教えてくれる。

なお、幾何分布型（逆指数型）F1とロジスティック型F2の分布関数を比較すると、F2はF1に対して第一次確率優位（first order stochastic dominant）である（図10）。ゆえに期待値はF2の方が大きい[Haim, 1998]。期待値が大きいということは、他の条件が等しければ、F2のもとでの加入率はF1のもとでの加入率よりも小さい。ロジスティック型はある時期まで単

位期間あたりの主観確率が上昇するにも関わらず、じつは加入率が高くないのである。これは非自明な発見といえる。

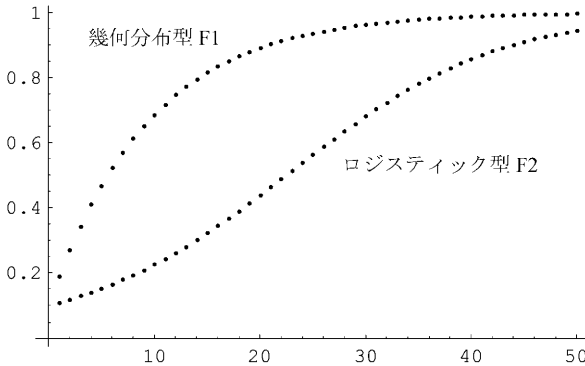


図10 幾何分布型とロジスティック型の比較

3.3 安心感の違い

最後に、期待発生時間以前の加入と以降の加入とで、どの程度心理的な安心感に差があるのかを確認しておこう。幾何分布モデルの場合、期待発生時間以前に地震が生じる主観的な確率は⁸⁾、

$$\begin{aligned}
 P(0 \leq T \leq E(T)) &= p_0 + \int_0^{E(T)} (p_0 - 1)(1 - \alpha)^t \log(1 - \alpha) dt \\
 &= p_0 + (p_0 - 1)(1 - \alpha) \int_0^{E(T)} \frac{p_0 - 1}{\log(1 - \alpha)} dt \\
 &= p_0 + (p_0 - 1)(1 - \alpha) [-\frac{1}{\log(1 - \alpha)} (1 - \alpha)^t]_0^{E(T)} \\
 &= p_0 + (p_0 - 1)(1 - \alpha) \left(\frac{1 - (1 - \alpha)^{E(T)}}{\log(1 - \alpha)} \right)
 \end{aligned}$$

である。また期待発生時間以降に地震が生じる主観的な確率は、

$$\begin{aligned}
 P(E(T) < T < \infty) &= \int_{E(T)}^{\infty} (p_0 - 1)(1 - \alpha)^t \log(1 - \alpha) dt \\
 &= (p_0 - 1)(1 - \alpha) \int_{E(T)}^{\infty} \frac{p_0 - 1}{\log(1 - \alpha)} dt \\
 &= (p_0 - 1)(1 - \alpha) \left[-\frac{1}{\log(1 - \alpha)} (1 - \alpha)^t \right]_{E(T)}^{\infty} \\
 &= (p_0 - 1)(1 - \alpha) \frac{(1 - \alpha)^{E(T)}}{\log(1 - \alpha)}
 \end{aligned}$$

である。両方の確率をグラフで表したものが図11である。

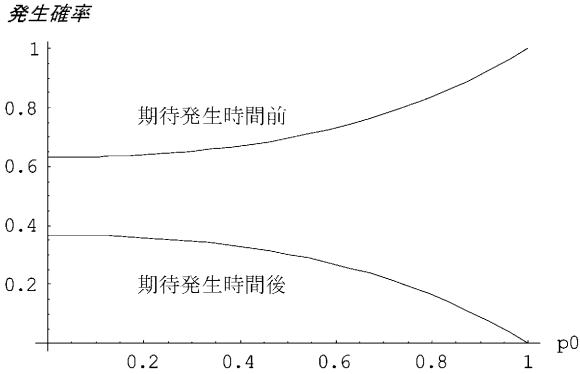


図 11 幾何分布モデルの期待時間前後に地震が発生する確率

幾何分布モデルの場合、期待発生時間以前に発生する主観的確率が初期確率の値に関わらず常に 0.6 を上回っているために、なるべく早めに加入しないと心理的な安心感は得られない。

一方ロジスティック・モデルの場合、期待発生時間以前に地震が生じる主観的な確率は、

$$P(0 \leq T \leq E(T)) = p_0 + \int_0^{E(T)} \frac{e^{t\alpha}(1-p_0)p_0\alpha}{13 + p_0(e^{t\alpha} - 1)} dt = \frac{1}{2 - p_0}$$

また期待発生時間以降に地震が生じる主観的な確率は、

$$P(E(T) \leq T \leq \infty) = \int_{E(T)}^{\infty} \frac{e^{t\alpha}(1-p_0)p_0\alpha}{13 + p_0(e^{t\alpha} - 1)} dt = \frac{1}{p_0 - 2}$$

である。両方の確率をグラフで表したものが図 12 である。

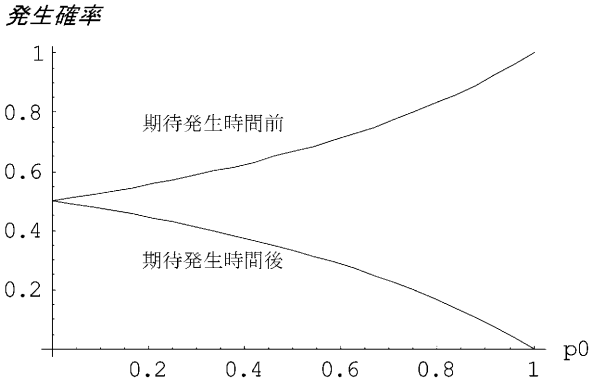


図 12 ロジスティック・モデルの期待時間前後に地震が発生する確率

ロジスティック・モデルの場合にも、期待発生時間以前に発生する主観的
確率が常に 0.5 を上回っているために、なるべく早めに加入しないと心理的
な安心感は得られないだろう。

もし安心であることの基準が地震発生の累積確率が 0.5 以下になることと
すれば、初期確率が 0 よりも大きい人は、期待時間よりもう少し早く共済に加入
しないといけない。どのくらい早めに加入すれば「安心」が得られるかは、
本稿で定式化したモデルを使えば簡単に分かる。こうした分析ができる
ことも数理モデルを用いて考えることの利点の一つである。

4 おわりに

以上、本論文では主に二つの観点から共済制度への加入をめぐる誘因モデル
を検討してきた。一つには、個人（県民）の目から見て、共済制度がどの
程度有利なものかを検討してきた。結論は、一定の確率過程を想定して期待
値をとるならば、よほど小さな災害発生確率と住宅倒壊確率でないかぎり、
加入しないと「損」だということが推測できた。もう一つは、期待時間（いつ
災害が起こるかの平均時間的予測）を計算し、人々の加入行動はこの期待
時間に関連していると考えてみた。その考え方を踏襲したうえで具体的に検
討したのは、累積地震発生確率の単調増加を想定した二つのモデル 幾何

分布モデルとロジスティック・モデルである。それぞれのモデルから導き出された発見を命題としてまとめた（命題 1-10）。モデルの違いにより加入率の伸びの軌跡が異なる。

現在の共済制度への加入の「低迷」が主観的期待利得計算の結果によるものか、あるいは期待時間に拠るいずれかのプロセスの結果によるものか、さらにはそれ以外のここでは扱えなかったプロセスないしそれらの複合プロセスを辿るかの判断は、今後の経験的伸びのパタンをみてみないと分らない。

では、数理モデルを構築することで加入への誘因の問題を考えることの意味はどこにあるだろうか。まず、私たちは上に見てきたような数理モデルを構築することで、人々の行動をめぐる経験的現象（ここでは共済制度への加入率）についての観察を「プロセス」、すなわち時間の流れのなかでの現象の展開を切り取ったものとしてとらえることを可能にしてくれる。すでに述べたように、一時点の加入率の高低は重要ではあるが、もっと重要なのは一時点の加入率を生み出しているプロセスのほうである。プロセスを知ることによって、加入率の今後の伸びぐあいや伸びの軌跡を知ることができる。逆に言えば、プロセスが分らなければ、伸びに関する今後の予測は得られない。

第二に、加入行動を説明する原理がいずれ明確になるだろう。そのためには、加入率の時系列的変化に関するデータが必要だ。加入行動については、いずれ調査をする予定があると聞いている。むろん、そのようなことはないだろうが、その際加入行動について漫然と尋ねてもあまり意味がない。そうではなくて、数理モデルに登場してきたパラメータに対応した質問がなされるべきである。数理モデルの構築によって、あらかじめどのような情報が求められるかが、明示的に分ってくる。

第三に、しばしば数理モデルの構築と導出命題から、規範の意味が得られる。人々は漠然とした「期待利得の計算」をする志向性をもっていても、日常生活においては数学的計算を厳密に行っているわけではない。多くは直観的に「計算」をしているに過ぎないであろう。数学モデルをもって明示的に検討するということは、その結論次第で「規範的」な意味をもってくる。とくに共済制度に加入することが「得」だとか「損」だとかという議論

になれば、当然人々の注視を浴びることになる。むしろ、地震のような事象は最先端の科学的知識をもってしても「予知は不可能」とさえ言われている。上のモデル群には、その不可能とさえ言われている発生確率がパラメータとして入ってきているわけで、したがって厳密な期待値計算ができるわけではない。それでも参考にはなる。「得」だと言われれば加入は促進されるだろうし、「損」だと言われればしぼりがかかってしまうだろう。その点で、数理モデルは規範的意味をもつことになる。しかし、無条件に「損得」が言えるわけではない。その意味では規範的意味に加えて、反省的意味をもつことになろう。ここでいう「反省的」とは、「熟慮的」という意味とほぼ同じである。本稿では、主として県民の側から共済制度を見てきた。一つの制度は個人の側の視点から見るだけでは十分な評価をくださったことにはならない。マクロの(ここでは県行政の)視点からも見ておかねばならない。第III論文ではその観点から議論をはじめよう。

付録

補題 11 $\lim_t (1 - \alpha)^t \log(1 - \alpha) = 0$

証明

$$\lim_t (1 - \alpha)^t \log(1 - \alpha) = \lim_t \frac{\log(1 - \alpha) - 1}{(1 - \alpha)^t}$$

とおけば、これは $\frac{0}{0}$ の不定形になるのでロピタルの定理が適用できる。

$$f(t) = \log(1 - \alpha) - 1, \quad g(t) = (1 - \alpha)^t$$

として、それぞれ一階導関数を計算すれば、

$$\begin{aligned} \lim_t \frac{f(t)}{g(t)} &= \lim_t \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim_t \frac{\log(1 - \alpha)}{-(1 - \alpha)^t \log(1 - \alpha)} \\ &= - \lim_t \frac{1}{(1 - \alpha)^t} = - \lim_t (1 - \alpha)^t = 0 \end{aligned}$$

である。

$$\boxed{\text{補題 12}} \quad \lim_t \frac{p_0 e^{\alpha t} \alpha - \log(1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0)}{1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0} = \frac{\log p_0}{\alpha}$$

$\boxed{\text{証明}}$ 不定形なのでロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned} & \lim_t \frac{p_0 e^{\alpha t} \alpha - \log(1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0)}{1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0} \\ &= \lim_t \frac{e^{\alpha t} p_0 \alpha - \frac{1}{1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0} \cdot \alpha e^{\alpha t} p_0}{\alpha^2 e^{\alpha t} p_0} \\ &= \lim_t \frac{\alpha t - \log(1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0)}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_t \{ \alpha t - \log(1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0) \} \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_t \{ \log e^{\alpha t} - \log(1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0) \} = \frac{1}{\alpha} \lim_t \left\{ \log \frac{e^{\alpha t}}{1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0} \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \lim_t \left\{ \log \frac{e^{\alpha t}}{1 + (e^{\alpha t} - 1)p_0} \cdot \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha t}} \right\} = \frac{1}{\alpha} \lim_t \left\{ \log \frac{1}{e^{-\alpha t} + p_0 - p_0 e^{-\alpha t}} \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \log(1/p_0) = -\frac{\log p_0}{\alpha} \end{aligned}$$

注

- 1) 本稿では第 I、第 III 論文と同様に「加入者 = 加入世帯 = 加入戸数」と考える。言い換えれば持ち家各世帯は 1 戸の住宅を所有しており、その 1 戸について共済に加入するかどうかを判断すると仮定する。
- 2) 兵庫県下の私有住宅総数がざっと 170 万戸で（平成 10 年住宅・土地統計調査）、先の阪神・淡路大震災で全半壊・全半焼した家屋は 247,486 戸、444,900 世帯に及んだ〔島本, 1998: 50〕。戸数で計算するか、世帯数で計算するかの食い違いはあるけれども、戸数で言えば倒壊率は 14.6% であり、世帯数で見ればじつに 26.2% に及んでいる。阪神・淡路大震災を経験したもののなかにも、あるいは経験したがゆえに、「もう大きな地震は、当分は起こらないだろう」との思いを抱いている向きもあるかもしれない。しかし南海地震の発生確率は 50% とも言われているし、山崎断層帯地震の発生率は最大で 5% だと言われている。だとすれば q の値はある程度大きく見積もる必要がある。また、住宅倒壊率については新耐震規準を満たした建物も増えつつあるし、堅牢な建築とそうでない建築とを分けて考える必要もあるかもしれない。しかし、新耐震規準にしても（姉齒問題のような問題が一切なかったとしても）「建物を崩壊させず、人命を保障する」水準の規準であり、一旦被災すれば補修や再建が必要となるケースのありうることを想定した上での話である。目を世界に広げれば、スマトラ沖地震やパキスタン地震のように、土地ごと流されたり、局所的には全家屋が倒壊したケー

- スもあり、倒壊率を低く見積もることにはリスクが伴う。
- 3) 零集合(測度零の集合)をのぞいてある性質が成立することを「ほとんどいたるところ」成立するという。以下で述べるモデルの場合、 $t=0$ の点、 13014 が零集合である。零集合は可算個の開区間で覆うことのできる集合をいう。
 - 4) このような二階導関数に関する仮定は、数学的な便宜上も必要である。というのも増加の仕方が一定ならばほんの僅かな量だけ増加するにしても、 t なるとき、確率が1を越えてしまうからである。したがってのちに導入するロジスティックタイプの確率の定義にみるように、 t が十分に大きな範囲において、二階導関数は(たとえ t が小なるときは非負であっても)負でなければならない。
 - 5) 例えば R. ブードンは社会全体の進学率が時間と共に大きくなることを仮定したモデルで、ここで定義したものと同じ確率の増加列を利用している(Boudon 1974)。
 - 6) 一般式 $p_t = (1 - \alpha)^t p_0 - 1 + 1$ そのものの予想については、等比数列の和を用いる。自明ではないが、 $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ について順次計算すれば、等比数列の和の部分とそれ以外の部分に分解できる。
 - 7) ただし確率密度関数が定義できるのは $t > 0$ の範囲に限る。
 - 8) この確率の計算では対数の性質 $\log_a x = (\log_b x) / (\log_b a)$ を使う。

文献

- Boudon, Raymond, 1974, *Education, Opportunity, and Social Inequality*, New York : John Wiley & Sons.
- Haim, Levy, 1998, *Stochastic Dominance : Investment Decision Making Under Uncertainty*, Dordrecht : Kluwer Academic Press.
- 島本慈子, 1998, 『倒壊』東京: 筑摩書房.

Mathematical Sociology of the Mutual Aid Fund for Housing Reconstruction 2: An Analysis of the Participation Rate

Hiroshi Hamada*
Atsushi Ishida**
Kenji Kosaka*

Abstract

The rate of participation in the mutual aid fund for housing reconstruction is not as high as the administration had expected it to be. It is not known whether the participation rate will increase or decrease over time. Therefore, we have attempted to predict the participation rate by developing a model which represents the decision-making process regarding participation. Models can be divided into two types. One is based on expected profit and assumes that people will decide to participate if they determine that “participating will be more financially advantageous than not participating.” The other is based on the assumption that people will decide that “it is better to participate right before a major disaster occurs.” Both models are based on rational choice theory, although they differ in their emphases. In the latter model, time can be regarded as a continuous random variable except when $t = 0$. It allows us to define the expected time by an explicit function of parameters and to derive many general propositions. One such proposition is that people who believe that earthquakes occur periodically do not participate in the mutual aid system, even though the subjective probability of an earthquake occurring is greater than zero.

Key words: disaster, mutual aid fund for housing reconstruction, participation rate, expectation

*Kwansei Gakuin University

**Japan Society for the Promotion of Science

