

不遇指数の公理的構成

浜田 宏*

■ 要 旨

本稿の目的は社会全体としての不幸の程度を測定する指数を公理的に構成することである。そのためにセンと高山が提唱する貧困測定、すなわち「ある値以上の所得を全て同じ額と見なした分布（打ち切り所得分布）のジニ係数」を応用して、人々の効用分布に対応した不遇指数を導入する。各社会成員の効用は、自分の生活の向上に貢献する、言い換えれば効用の増加に貢献する m 種類の資源を何らかの効用関数によって変換することで定まると仮定する。このとき効用がその値以下であれば不遇な環境に身を置いていると見なされる基準値——本稿ではそれを不遇境界値と呼ぶ——を指定することで、打ち切り効用分布が定義できる。効用の打ち切り分布に適用されたジニ係数が不遇指数である。

キーワード：貧困測定、ジニ係数、相対的剥奪

1 イン트로ダクション：人類の幸福とリベラルパラドクス

「人類の幸福」についての科学的探求が社会学によって可能だとすれば、それはどのような試みになるだろうか？ それがどのようなものであれ、はじめに「人類の幸福」という概念を明確に定義しなければなるまい。これは極めて当然の要請であるにもかかわらず、いざとりかかってみると簡単なことではない。関西学院大学大学院社会学研究科 COE プログラムのテーマである「人類の幸福に資する社会調査」に含まれる「人類の幸福 (human well-being)」という言葉には、よく吟味してみるとそれ自体

*関西学院大学

にある種の違和が含まれているからだ。それは単にその言葉が堅苦しく、われわれが日常的に感じる幸福とかけ離れているといったことではない。それは単に研究の場で幸福と呼ばれる状態をどのような言葉で表現すればいいのか、という問題でもない。幸福は確かに堅苦しい言葉だが、例えばそれを「ハッピー」とか「しあわせ」とか、もう少し日常言語よりの言葉で言い換えたところで実は「人類の幸福」に関する違和感は解消されない。というのも、その違和感とは「幸福」という語と「人類」という語の「組み合わせ」の内に存在しているからだ。「幸福」と「人類」には最初からどうしても相容れない部分が存在すると思われる。端的に言えば、「ささやかな個人的幸福」と「よりよい社会状態に関する首尾一貫した選択」が両立不可能である、ということだ。われわれが日常的に幸福——実際、「幸福」という硬い表現ではなく日常生活ではおそらく「幸せ」だろうが——を感じるとき、それは人類という包括的視点からすればとるに足らないこと、アカデミックな場ではほとんど語られることがないような出来事や精神状態であるはずだ。例えば仕事を終えて飲む一杯のビールだとか、休日に朝寝坊できることの安堵感、などがそうだろう。それは確かにわれわれの日常的な幸福の一部であるが、それが「人類の」幸福かどうかと問われると否と言わざるをえない。つまり「人類の幸福」についての（社会）科学的探求とは、個人個人がどうすれば幸福になれるのかというノウハウを研究することではない。確かに、多くの人は不幸であるよりは幸福であることを望むだろう。しかしながら、何をもって幸福とみなすかは人によって当然異なっており、万人に共通する「幸福のつくりかた」が存在するかどうかは疑わしい。

ここで少し方向を変えて、個人の幸福という概念から出発して人類の幸福、いかえれば社会的な幸福、にどのようにして到達できるのかという問題について考えてみよう。どのような状態が幸福かについては、当然個人によって違いがあるが、少なくとも幸福とは個人にとって望ましい状態である。ある人が状態 x と状態 y を比較して x が望ましいと感じているとき、 x が実現していれば状態 y が実現しているよりも幸福である¹⁾。したがって個人にとって望ましい社会状態にあることは、そうでない状態に

比較して必ず幸福である、といえる。「個人にとって幸福とはどのような状態か」を定義することは、社会に存在する各個人が様々な社会状態に対して持っている「望ましさ」を定義することに他ならず、厚生経済学の用語で言えば、個人的選好を定義することである²⁾。

個人的幸福から出発して人類の幸福に到達するというのを、ここではより限定的な意味で、個人の選好関係から出発して社会的な選好を決定すること、と考えよう。このことは個人的幸福の実現から人類の幸福の実現を目指すということを意味しているわけではない。さしあたり考えたい問題は、個々の社会状態に対する望ましさの順番を社会的に決定すること（ある特定の手続きによって決定すること）ができるかということである。ここでいう社会的決定とは、バラバラな個人的選好から全員に共通する選好だけを取り出して集計するというのを必ずしも意味しない。また多数決によって社会的選好を決定するという意味では必ずしもない。もし多数決のようなルールが規範的に満たすべき要件を備えていれば、そのルールを採用しても良いが、多数決によって「みんなの幸福」を決めようと提唱しているのではない。

今はただ何らかの決め方によって個人的幸福から社会的幸福を定めることがわれわれの目標である。フォーマルな手続きの観点から言えば、 n 個の個人的選好順序 R_1, R_2, \dots, R_n の任意の組に関して社会的選好関係 R を一つ割り当てる関数 f （集会的選択ルール）を特定の条件の下で指定することである。つまり無数に存在する $R = f(R_1, R_2, \dots, R_n)$ なる関数の中から特定の条件を満たすものを探すことである。

リベラルパラドクスとして知られているセンが示した定理によれば、個人的選好の組み合わせを定義域として社会的選択関数を定めることは、①定義域の非限定性、②パレート原理、③自由主義という特定の条件のもとで論理的に不可能である [Sen, 1970=2000: 14]。センが課した条件について簡単に解説しておこう。

「定義域の非限定性」とは、集会的選択ルール f の定義域は個人の順序の論理的に可能な全ての組み合わせを含むことを要請するものである。個人の選好としてはありとあらゆるものが認められるべきなので、この要請

は自然である。

次に、「パレート原理」は全員が社会状態 x と y を比較して y の方が望ましいと考えているならば、社会的選好においても y の方が望ましいと見なされるべきである、という原理を指す。これは全ての個人がよいと判断する事柄は社会でもよいと判断する原理であり、社会的取り決めに関する条件としては極めて自然な条件（しばしば弱すぎる条件）である³⁾。正確には、社会状態集合 X に属する任意の要素のペア x と y について $\forall i, (xP_i y) \Rightarrow xPy$ が成立することである。

次に各人のささやかな自由あるいはささやかな幸福を保証するのが「自由主義」の条件である。正確にかけば、各個人 i にとって少なくとも一つの異なる選択肢ペアが存在して、社会的選好においてどちらの順序にせよ彼が決定力を持つ。すなわち

$$\exists x, y \in X, [xP_i y \Rightarrow xPy] \wedge [yP_i x \Rightarrow yPx]$$

が成り立つ、という条件である。

この三つの条件を満たすような社会的決定関数（その値域は選択肢の全体集合 X に対して選択関数 $C(S, R)$ を生成するような選好関係 R に制限される、という条件を満たす集合的選択ルール f ）は存在しない⁴⁾。この定理は、冒頭で述べた『『ささやかな個人的幸福』と『よりよい社会状態に関する首尾一貫した選好』が両立不可能である』という直感が成立する条件を論理的に示したものである。

リベラルパラドクスほど厳密な形ではないが、哲学・思想史の文脈では市井三郎が、幸福感とはそもそも個々の人間にとって主観的なものであり、何らかの社会において個々人の幸福感の総量を集計できるとか、諸社会のあいだで幸福の総量が客観的に比較計量できるという考えに対して強い懐疑を示している [市井, 1971: 102]。センのリベラルパラドクスは幸福感の集計としては特殊な種類に限られるが、市井の直感に傍証を与えていると見なすことができる。

市井は幸福の増大という問題設定を 180 度転換し、幸福の経験が人によ

って違う分散度よりも、ある特定の時代に多くの人々が共通して経験する苦痛の集中度の方がより重要であると指摘する [市井, 1971: 139]。市井の主張に単なるレトリック以上の説得力があるとすれば、それは幸福と不幸の究極的状态の非対称性に関連しているといえよう。それは次のような意味である。不幸や苦が個人の選好によって定義できることは幸福のフォーマルな定義となんら変わるところがない。しかしながら不幸に関して自由主義的な選好を認めなければならない必然性は、幸福の場合に比すればずっと少ないはずである。というのも幸福や主観的な心地よさは、同一の人間がある欲求を充足し続けると同じような心地よさを感じなくなるという性質、すなわち相対性という性質を持っているからだ [市井, 1971: 139]。これは経済学者がしばしば限界効用逓減を仮定する経験的な根拠である。それゆえ、ある社会の成員の多数の幸福を間断なく増大させるといふ試みに最終的な到達点を指定することは極めて困難である。幸福の究極的状态を定義することが困難であると言い換えてもよい。

一方で不幸にも幸福と同様の相対性は当然存在する。同一の人間が客観的には同程度の不幸を続けて体験すれば、主観的にはその苦悩は軽減されるだろう。幸福と同様に不幸の究極的状态を定義することは困難かもしれない。しかしながら不幸の究極的状态へと続く道の途上（あるいはしばしば最終到達点）には、多くの人々が共通して死を見出すと考えることができる。他方、幸福の究極的状态の探求過程に、そのような共通項を認めることは、難しいと予想できる。したがって、自由主義の条件すなわち「各個人 i にとって少なくとも一つの異なる選択肢ペア (x, y) が存在して、社会的選択においてどちらの順序にせよ彼が決定力を持つ」という要請の必要性は、不幸の選好に関しては弱いと考えられる。つまり人類の幸福を定義することよりも人類の不幸を定義することの方がずっと容易なのだ。

本稿では不幸の減少という観点から人類の幸福をフォーマルに分析する方法を提唱する。いいかえれば社会的な不幸（同時にその減少としての社会的幸福）をどうやって測定するか、という問題について考える。以下、本稿を次のように構成する。第2節でセンと高山の貧困測度を概観する。第3節で貧困測度を利用して社会的な不幸の測度、不遇指数、を公理的に構

成する。第4節では数値計算をもとに不遇指数の挙動を考察する。最後に第5節にて結果を要約する。

2 センの貧困測度と高山による修正

社会全体としての不幸の程度を測定する指数を公理的に構成する研究は、筆者の知る限りほとんど存在しないが、不幸を構成する一つの次元としての貧困に関しては、すでに経済学において一定の蓄積がある。貧困測度を利用して社会的な不幸の測度を定義する可能性を吟味するために、まずその内容を概観しておこう。

貧困と不平等、この二つの概念は互いに関連を持つが異なるものであるが、両者を測定の見点から統合した試みにおいてセンは、貧困の測度としていくつかの望ましい公理を仮定し、そこから導出した測度がジニ係数を引数として含む関数になることを示した [Sen, 1976]。貧困測度の公理的構成の研究としては今なお標準と考えられる成果である。その後、高山憲之はセンの貧困測度が持ついくつかの問題点を指摘し、改良を加えている [Takayama, 1979]。センの貧困測度および高山による修正を簡潔に確認しておこう（以下、記号は [Takayama, 1979] に準ずる）。

定義 貧困線 (**poverty line**) その所得以下であれば貧困層に属していると見なされる基準値。貧困線を所与の社会においてどう定義するかは議論すべき重要な問題だが、本稿ではそれが条件として与えられるパラメータと見なす。以下、貧困線の値を z とおく。

定義 頭数比率 (**head count ratio**) 貧困層に所属する社会成員の（全体に対する）割合。貧困者数を m 、社会全体の人数を n とおくと頭数比率 H は $H = m/n$ 。

ある所得値 x 以下の所得を持つ人の集合を $S(x)$ で表す。貧困者集合 $S(z)$ に含まれる要素の数は m である。 $|S(z)| = m$ 。

定義 所得ギャップ (**income gap**) 個人 i の所得 y_i と貧困線 z の差を個人所得ギャップ g_i で表す。 $g_i = z - y_i$ 。

定義 所得ギャップ率 (**income gap ratio**) 貧困者の個人所得ギャップを

集計し、貧困者総所得との比を取った値を所得ギャップ率 Q で表す。

$$Q = \sum_{i \in S(z)} \frac{g_i}{mz}$$

貧困の頭数比率 H と所得ギャップ率 Q は実証研究において広く普及しているが、それらは貧者の所得分布に不感応であるという問題を持つ。貧困の頭数比率 H は文字通り貧者の頭数をカウントしているだけなので、貧困線をわずかに下回る貧者の中で相対的に裕福な者と、貧困線の遙か下方に位置する貧者の中の貧者との差つまり貧困の深刻度に鈍感である。一方所得ギャップ率 Q は頭数比率 H に鈍感 (insensitive) であり、貧者層内部での逆進的な所得移転に全く反応しない。

そこでセンは貧困測度が満たすべき複数の条件を公理として明示し、それらの条件を満たす測度を定式化した。公理から導出されるべき貧困測度を P_s とおく。貧困測度 P_s としては基準化された、重み付き所得ギャップの総和を仮定する⁵⁾。

$$P_s = A \sum_{i \in S(z)} v_i \cdot g_i \quad (1)$$

A は基準化のための定数項であり、 v_i は重み (weight) である。以下一般性をそこなうことなく個人所得は

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m = z \leq \dots \leq y_n$$

を満たすと仮定する。

公理 M 厚生単調性 (monotonic welfare) 任意の所得ベクトル y に対し、個人の厚生関数値の集合 $\{W_i(y)\}$ 上に完備で厳密な選好 \succ が定義されている。個人所得の集合上にも同様の関係が定義され、任意の i, j について

$$y_i \succ y_j \Rightarrow W_i(y) > W_j(y)$$

がなりたつ。

言い換えれば、単調性は貧困者の所得の減少は貧困測度を増加させねばならないことを要請する。重み (weight) に関しては次の公理を与える。

公理 R 序数的ランクによる重み (ordinal rank weights) 所得ギャップ g_i に対する重み v_i は貧者間でのランクに等しい。 $v_i = m + 1 - i$ 。

公理 N 貧困値の基準化 (normalized poverty value) 貧者が全て同じ所得の場合、

$$P_s = HQ$$

がなりたつ。

定数項 A と重み v_i は公理から特定することができる。

定理 センの貧困測度 貧者の数が十分に多いとき、公理 R, M, N を満たす貧困測度 P_s は

$$P_s = H(Q + (1-Q)G_w)$$

である。ここで G_w は貧困者層のジニ係数である。

証明 [Sen, 1976] を参照。

高山はセンの貧困測度 P_s が持つ二つの問題点を指摘し、その問題点を解決するための代替的測度を提案している [Takayama, 1979]。その指摘は社会学的観点からみて重要な論点を含んでおり、彼の提唱する貧困測度は部分集団への分解可能性を満たすという望ましい性質を備えている。高山が指摘するセンの貧困測度 P_s の問題とは第一に、公理 R が貧困線の上に位置する人の情報を全く無視しているという点にある。例えば貧困層の分布は全く同じだが、貧困線より上に位置する人の暮らしぶりが極端に違う二つの社会を想定してみると公理 R の問題点が明確になる。もし一方の社会における裕福層が他方のそれに比して圧倒的に豪華ならば、前者の貧困測度は後者のそれに比して相対的に高い値をとるべきであるがセンの貧困測度 P_s は、この違いに不感応である。高山の主張は貧困を相対的

剥奪経験としてとらえる社会学的視点を貧困測度に要求することに等しい。簡潔に言えば、センの貧困測度 P_S は貧困の「相対性」に鈍感である。

第二の問題点は、公理 N が所得分布全体の不平等指数としてのジニ係数の完全な公理化に失敗しているという意味で恣意的であることだ。これはややわかりにくい指摘だが、要するに公理を少し修正すれば、ジニ係数を唯一の全体所得分布の不平等指数として導出できるという意味である。

まず所得ギャップ q_i を全体平均 μ_0 からの差として定義する。

$$q_i = \mu_0 - y_i$$

任意の所得ベクトルに対し、所得不平等指数 I を

$$I = B \sum_{i \in S(y_n)} w_i \cdot q_i + C$$

とおく。 B と C は基準化のための定数項であり、 w_i は非負の重みである。ここで指数に相対性を導入するために重みを社会全体におけるランクとして定義する。すなわち公理 R を以下のように修正する。

公理 R* 所得ギャップにかかる重み w_i は全人口における個人 i のランクに等しい。

$$w_i = n + 1 - i$$

また公理 N は次のように修正される。

公理 N* もし社会の全員が同じ所得を持つならば $I=0$ であり、もっとも裕福な者が全所得を独占しているとき $I=1-1/n$ である。

定理 Takayama によるジニ係数の公理化 公理 M, R*, N* を満たす唯一の不平等指数はジニ係数である。

証明 センの貧困測度定理と同様の初等的な計算によって示せる。

[Takayama, 1979: 750-751] を参照。

以上の結果をふまえて貧困測度修正するために、「打ち切り所得分布」という新しい概念を高山は導入する。

定義 打ち切り所得分布 (**censored income distribution**) 貧困線 z に対応する、次の性質を満たす所得プロファイル

$$y(z) = (y_1, y_2, \dots, y_m = z, \dots, y_n)$$

where $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_m = \dots = y_n$

を、打ち切り所得分布という。

要するに、打ち切り所得分布は貧困線 z よりも上に位置する人の所得が全て同じ z になるような分布のことである。高山の貧困測度 P を打ち切り所得分布のプロファイル $y(z)$ に対して

$$P = D \sum_{i \in S(y_n)} w_i \cdot (\mu - y_i) + E$$

とおく。 D と E は基準化のための定数項、 w_i は非負の重み、 μ は打ち切り所得分布の平均である。貧困測度 P に関する基準化の公理は次の通りである。

公理 N2 もし誰も貧困線以下に位置しないならば $P = 0$ である。もし貧者の所得が全てゼロならば、貧困測度は頭数比率に等しい ($P = H$)。

定理 高山の貧困測度 公理 M, R*, N2 を満たす唯一の貧困測度は、打ち切り所得分布のジニ係数 G_p である。

証明 初等的な計算によって示せる。[Takayama, 1979: 753–754] を参照。

貧困測度 P (打ち切り所得分布のジニ係数 G_p) の便利な点は、貧困層とそれ以外の層のオーバーラップが存在しないために分解が容易なことにある。いま、社会は貧者集団 (貧困線以下に位置する者) と裕福集団 (貧困線より上に位置する者) の二つに分割できる。オーバーラップがない場合には

$$G = G_{\mu} + \left(p_1^2 \frac{\mu_1}{\mu} G_1 + p_2^2 \frac{\mu_2}{\mu} G_2 \right)$$

一般に m 個の部分集団に分割されている場合

$$G = G_{\mu} + \sum_{i=1}^m p_i^2 \frac{\mu_i}{\mu} G_i$$

と表すことができる⁶⁾。ここで G_{μ} は全ての部分集団内で所得が均等に（一人につき部分集団平均だけ）配分されている場合の全体ジニ係数である [Bhattacharya and Mahalanobis, 1967; 青木, 1979; 小西, 2002]。この分解公式をもとに打ち切り所得分布のジニ係数 G_p を分解すると

$$\begin{aligned} G_p &= G_{\mu} + \left(p_1^2 \frac{\mu_1}{\mu} G_1 + p_2^2 \frac{\mu_2}{\mu} G_2 \right) \\ &= \frac{1}{2n^2\mu} (z - \mu_i) m (n - m) + p_1^2 \frac{\mu_1}{\mu} G_1 \\ &= p_1 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu} \right) + p_1^2 \frac{\mu_1}{\mu} G_1 \end{aligned} \quad (2)$$

がなりたつ。

高山の貧困測度は計算手続きとしてはジニ係数と同じ（厳密に言えばそれをさらに簡略化したもの）であるにもかかわらず、計測しているものはあくまで貧困の程度であることに注意する。高山の貧困測度、すなわち打ち切り所得分布のジニ係数とは、直感的に言えば、貧困線より上の層の格差を無視した全体社会の不平等度である。

3 不遇指数の公理的構成

前節では、簡単に公理的な貧困測度の構成およびその利点を確認してきたが、社会の不幸を測定したいというわれわれの目的からすれば当然ながらもの足りない点がある（もっともそれは貧困測度そのものの欠点ではない）。それは、貧困は不幸を構成する一つの次元かもしれないが、貧困の程度のみによって不幸の程度の全てを代表させるわけにはいかない、とい

うことである。不幸の程度は当然もっと総合的に判断されるべきだろう。例えば所得以外には健康の程度、生活の安全度、雇用状況（就学状況）、住居の快適さなど、様々な次元を考慮して総合的に不幸の程度を測定しなければならない。

もし貧困測度を複数の次元に適応できるならば、われわれの目的はかなりの部分達せられるとあってよいだろう。そのためにはジニ係数を m 次元のデータに対して定義できるように拡張する必要がある。以下、貧困測度を拡張した概念——さしあたり *disadvantage* を測るという意味で不遇指数と呼ぶ——の定式化を試みる。

いま個人の生活をより望ましい状態にするために利用可能な資源が m 種類あるとしよう。例えば所得、学歴、健康、ネットワーク資本（友人関係）などがここで考えている資源である。

定義 資源ベクトル (**resource vector**) m 種類の各資源が正の実数により測定できると仮定する。 R^+ の m 次の直積集合

$$R^+ \times R^+ \times \cdots \times R^+$$

上の点により個人の資源ベクトルを表すことができる。

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

定義 資源ベクトルの価値 (**value of resource vector**) 各個人は自分の資源ベクトルを 1 次元の効用（実数値）に変換できる。そのような関数 $f: R^+ \times R^+ \times \cdots \times R^+ \rightarrow R^+$ は無数にあるが、関数による変換後の実数（値）を、その資源ベクトルの価値と呼ぶ。

以下では単純化のために、数学的に自然な関数としてコブ=ダグラス関数を用いる。資源ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ の価値は

$$f(x) = a \prod_{i=1}^m x_i^{\alpha_i} \quad \text{ただし} \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

である (a は定数項)。ここでコブ=ダグラス関数を用いる理由は、それが効用関数として望ましい性質を持っているからであり、扱いが容易だからである。一階および二階偏導関数の符号が

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = a \alpha_i x_i^{-1+\alpha_i} \prod_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^{\alpha_j} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = a(-1 + \alpha_i) x_i^{-2+\alpha_i} \prod_{j \in N \setminus \{i\}} x_j^{\alpha_j} < 0$$

であることから明らかなように限界効用逓減則を満たしている。ここでは $N = \{1, 2, \dots, n\}$ として、そこから i だけを取りのぞいた集合を $N \setminus \{i\} = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ で表している。指数の合計が1になるという仮定は規模に関して効用が一定である（全ての資源が b 倍になると効用も b 倍になる）ことを意味する。同時に指数の大小関係によって、どの資源が効用により貢献しているかの差異を表現できる。

なおセンが提唱する潜在能力アプローチはわれわれの議論の文脈では資源ベクトルを効用に変換する関数が個人間で異なっていると仮定することにほぼ等しい [Sen, 1985=1988]。コブ=ダグラス関数の定数項 a はそのような個人間の資源変換能力の差異を表現するために利用できる。個人間で効用関数が異なる場合は $a_j (j=1, 2, \dots, n)$ とする。もちろん各座標の指数を個人毎に個別に定義することによっても同様の効果（あるいはよりいっそう細かな差異を表現する効果）が得られるが、さしあたり、なにかしらの関数によって資源ベクトルを実数値に変換できるという仮定を認めることが肝要である。

定義により、二人の個人はそれぞれベクトル

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

で表すことができる（各座標には所得や健康程度、生活安全度などの得点が入っている）。個人間の距離はその効用関数の差の絶対値

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)| \quad (3)$$

によって定義する。 y_i, y_j をそれぞれ個人 i, j の資源ベクトルとする。

$$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}), \quad y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jm})$$

\bar{y} を効用の平均とすれば、効用のジニ係数は

$$G = \frac{1}{2\bar{y}^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |f(y_i) - f(y_j)|$$

と定義される。さらに不遇指数を定義するためには、打ち切り分布を定義しなければならない。そのためには所得の貧困線に相当する概念を効用に対して与えなければならない。われわれはこれを不遇境界 (disadvantage boundary) と呼ぶ。

定義 不遇境界 (disadvantage boundary) 資源ベクトルの価値がその値以下であれば不遇な環境に身を置いていると見なされる基準値を不遇境界値 (disadvantage boundary value) とよぶ。価値が不遇境界値以下であるような m 次直積集合上の点を不遇境界という。不遇境界値を z 、不遇境界 (集合) を Z で表せば

$$Z = \{x \in R^+ \times R^+ \times \dots \times R^+ \mid f(x) \leq z\}$$

で与えられる。

たとえ効用が同じでも資源ベクトルが異なる個人が存在することに注意する。次に「打ち切り所得分布」に対応する「打ち切り効用分布」を次のように定義する。

定義 打ち切り効用分布 (censored utility distribution) 不遇境界値 z に対応する、次の性質を満たす効用の分布

$$y(z) = (f(y_1), f(y_2), \dots, f(y_m) = z, \dots, f(y_n))$$

where $f(y_1) \leq f(y_2) \leq \dots \leq f(y_m) = \dots = f(y_n)$

を、打ち切り効用分布という。すなわち打ち切り効用分布は、 z よりも大きい値をとる資源ベクトルの効用が全て同じ z になるように調整した効用の分布のことである。

定義 頭数比率 (**head count ratio**) その資源ベクトルの効用が不遇境界値 z 以下であるような社会成員の (全体に対する) 割合を貧困測度の場合と同様に頭数比率とよぶ。不遇者数を m 、社会全体の人数を n とおくと頭数比率 H は $H = m/n$ である。

効用が z 以下の資源ベクトルを持つ人の集合を $S(z)$ で表す。不遇者集合 $S(z)$ に含まれる要素の数は m である。 $|S(z)| = m$.

定義 資源価値ギャップ (**resource value gap**) 個人 i の資源ベクトル y_i の効用 $f(y_i)$ と不遇境界値 z の差を個人資源ギャップ g_i で表す。 $g_i = z - f(y_i)$.

資源ベクトルの効用により定義される不遇指数 D を打ち切り効用分布のプロファイル $y(z)$ に対して

$$D = A \sum_{i \in C} w_i \cdot (\mu - f(y_i)) + E \quad (4)$$

とおく。ここで A と E は基準化のための定数項、 w_i は非負の重み、 μ は打ち切り効用分布の平均、 C は打ち切り効用分布に含まれる個人の集合、 $f(y_i)$ は個人 i の資源ベクトル $y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im})$ の効用であり、打ち切り効用分布に含まれるように変換済みであると仮定する。資源ベクトルを効用に変換するという考え方に対応して公理 **M** を次のように改める。

公理 M* 厚生単調性 (**monotonic welfare**) 任意の効用プロファイル y に対し、個人の厚生関数値の集合 $\{W_i(y)\}$ 上に完備で厳密な選好 \succ が定義されている。効用の集合上にも同様の関係が定義され、任意の i, j について

$$y_i > y_j \Rightarrow W_i(y) > W_j(y)$$

がなりたつ。

次に不遇指数 D に関する基準化の公理を次のように定める。

公理 N 2* もし誰も不遇者集合 $S(z)$ に含まれないならば $D=0$ である。また、もし不遇者の効用が全てゼロならば、不遇指数 D は頭数比率に等しい ($D=H$)。

公理 R 2* 資源価値ギャップにかかる重み w_i は全人口における個人 i のランクに等しい。 $w_i = n + 1 - i$ 。ただしここでいうランクとは資源価値(効用)のランクである。

定理 1 不遇指数 公理 M, R 2*, N 2* を満たす唯一の不遇指数は、打ち切り効用分布のジニ係数 G_n である。

証明 不遇者集合 $S(z)$ に誰も含まれない極端なケースを考える。このときは打ち切り効用分布の平均 μ は z に等しくなる。(4) より、

$$\begin{aligned} D &= A \sum_{i \in C} w_i \cdot (z - z) + E \\ &= E \end{aligned}$$

また公理 N 2* より $D=0$ 。ゆえに $E=0$ がまず示せる。公理 R 2* により重みを代入すれば (4) は $E=0$ より

$$D = A \sum_{i \in C} (n+1-i) (\mu - f(y_i)) \quad (5)$$

とかける。次に不遇者の効用が全てゼロの場合を考える。このとき打ち切り効用分布の平均 μ は $\mu = z(n-m)/n$ となる。また

$$\sum_{i \in C} i \cdot f(y_i) = \sum_{i=m+1}^n i \cdot f(y_i) = \sum_{i=m+1}^n i \cdot z = \frac{\mu n(n+m+1)}{2}$$

である。これと (5) から

$$\begin{aligned}
 D &= A \sum_{i \in C} (n+1-i) (\mu - f(y_i)) \\
 &= A \left(\frac{-\mu n(n+1)}{2} + \sum_{i \in C} i \cdot f(y_i) \right) = A \frac{\mu mn}{2}
 \end{aligned}$$

がわかる。公理 N2*より不遇者の効用が全てゼロならば $D=H$ だから

$$D = A \frac{\mu mn}{2}, \quad D = \frac{m}{n} \Rightarrow A = \frac{2}{\mu n^2}$$

である。定数項 A の値を (5) に代入すれば

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i \in C} (n+1-i) (\mu - f(y_i)) \\
 &= 2 \mu n^2 \left(n(n+1) \mu - \frac{(n+1)n\mu}{2} \right) - \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i \in C} (n+1-i) f(y_i) \\
 &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i \in C} (n+1-i) f(y_i)
 \end{aligned}$$

である。ところで打ち切り効用分布のジニ係数 G_n は

$$G_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{\mu n^2} \sum_{i=1}^n (n+1-i) f(y_i)$$

とかけるから、結局 $D=G_n$ が示せた。 m 次元資源ベクトルの効用に対して定義された不遇指数は、上述した公理 M, R2*, N2*を全て満足する。

4 数値計算による不遇指数の分析

3節で定義された不遇指数の挙動を数値計算によって確認する。われわれはすでに m 種類の資源が全て正の実数により測定できると仮定していた。そこで実現値が非負である対数正規分布を使う。よく知られているように、所得や資産は対数正規分布に従う。

仮定 1 各資源の分布に関する仮定 m 次元資源ベクトルの各構成要素（各座標の値）はそれぞれ対数正規分布に従うと仮定する。 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ なるとき各次元を確率変数 X_1, X_2, \dots, X_m で表せば、

$$X_1 \sim \Lambda(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \Lambda(\mu_2, \sigma_2^2), \dots, X_m \sim \Lambda(\mu_m, \sigma_m^2)$$

である。

定理 2 効用分布の対数正規性 各個人の効用をコブ=ダグラス関数により定義する。確率変数で表現すれば

$$U = a \prod_{i=1}^m X_i^{\alpha_i} \quad \text{ただし} \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

である。そのとき仮定 1 のもとで各個人の効用の分布は対数正規分布に従う。すなわち

$$U \sim \Lambda\left(\log a + \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu_j, \sum_{j=1}^m \alpha_j \sigma_j^2\right).$$

証明 対数正規分布の性質より明らかである。[Aitchison and Brown, 1957: 11] を参照。

社会の成員が仮定 1 を満たす資源ベクトルを所有しているとき、その社会の不遇指数値は定理 2 で示したように打ち切り効用分布のジニ係数である。仮定 1 を認めれば、定理 2 により、不遇指数の分析は結局、効用が対数正規分布に従う場合の分析に集約される。分析枠組みを明確化するために次の補題を導入しておく。

補題 1 打ち切り効用分布の平均 効用分布が平均を持つ確率分布にしたがうと仮定する。このとき不遇境界値 z に対応する打ち切り効用分布の平均は

$$\alpha = \mu_1 p_1 + z(1 - p_1)$$

である。ただしここで p_1 は不遇者（効用が不遇境界値以下である人々）の人口シェアであり、 μ_1 は不遇者層の平均効用である。

証明 平均は凸結合で表すことができる。効用分布の確率密度関数を $f(t)$ とおけば効用の全体平均は貧困者層の平均効用

$$\mu_1 = \int_0^z t \cdot \frac{f(t)}{p_1} dt$$

とそれ以外の層の平均効用の重み（人口シェア）付きの総和である。不遇者層以外のメンバーは打ち切り効用分布の定義により全員効用 z を持つから、密度関数が何であれ、その平均も z である。不遇者層の人口シェアを p_1 とおけば

$$\alpha = \mu_1 p_1 + z(1-p_1)$$

がなりたつ。

補題 2 対数正規分布における不遇指数の分解 効用分布が対数正規分布 $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ にしたかうとき、不遇境界値 z に対応する不遇指数 D は

$$D = p_1 \left(1 - \frac{\mu_1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2\alpha} \left(\int_0^z \int_0^z |x-y| f(x)f(y) dx dy\right)$$

と分解できる。ただし α は補題 1 で示した打ち切り効用分布の平均、 μ_1 は不遇者層の平均効用、 p_1 は不遇者層の人口シェアである。

証明 貧困測度の分解式 (2) および打ち切り効用分布の平均により

$$D = p_1 \left(1 - \frac{\mu_1}{\alpha}\right) + p_1^2 \left(\frac{\mu_1}{\alpha}\right) G_1.$$

不遇者層の効用のジニ係数 G_1 は

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2\mu_1} \int_0^z \int_0^z |x-y| \frac{f(x)}{p_1} \frac{f(y)}{p_1} dx dy \\ &= \frac{1}{2\mu_1 p_1^2} \int_0^z \int_0^z |x-y| f(x)f(y) dx dy \end{aligned}$$

である。これを代入すれば

$$D = p_1 \left(1 - \frac{\mu_1}{\alpha}\right) + \frac{1}{2\alpha} \left(\int_0^z \int_0^z |x-y| f(x)f(y) dx dy\right) \quad (6)$$

である。

式(6)第二項の積分は上端が有限値のために解くことはできない。そこで以下の手順に従い、数値計算によって不遇指数を分析する。

1. パラメータ μ_i, σ_i ($i=1, 2, \dots, m$) を持つ対数正規分布に従う乱数を n 個の m 次元ベクトルとして生成する(各次元は確率的に独立であると仮定する)。
2. コブ=ダグラス関数により効用を計算して効用ベクトルをつくる。効用ベクトルの長さ(構成要素の総数)は n である。
3. 2で作成した効用ベクトルをもとに不遇境界値 z に対応する打ち切り効用ベクトルを生成する。
4. 3で作成した打ち切り効用分布のジニ係数を計算する。
5. 手順1から4を繰り返して、その平均を計算する。なお繰り返し回数およびサンプルサイズ n は平均の誤差が $1/100$ におさまるような組み合わせを用いる。

以上の一連の手続きを *Mathematica* を用いて計算する。資源ベクトルを三次元とし、第一次元のパラメータの変化に伴う不遇指数の変化をまとめたものが表1と表2である。

計算結果から、仮定1のもとで他のパラメータの条件が等しければ、パラメータ σ の増加に伴い不遇指数は増加し、 μ の増加に伴い不遇指数は減少するのではないかと予想できる。

表1 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0.5, \sigma_2=\sigma_3=2, \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1/3$ として計算した不遇指数

	$\sigma_1=1.0$	$\sigma_1=1.2$	$\sigma_1=1.4$	$\sigma_1=1.6$	$\sigma_1=1.8$	$\sigma_1=2.0$
$z=1$	0.1137	0.1208	0.1238	0.1296	0.1376	0.1370
$z=2$	0.1141	0.1170	0.1237	0.1260	0.1330	0.1339
$z=3$	0.1134	0.1203	0.1225	0.1250	0.1331	0.1409
$z=4$	0.1133	0.1179	0.1236	0.1259	0.1331	0.1382
$z=5$	0.1148	0.1169	0.1233	0.1284	0.1347	0.1395

サンプルサイズ $n=100$ 、繰返し回数 100 とした。

表2 $\mu_2 = \mu_3 = 0.5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/3$ として計算した不遇指数

	$\mu_1=0$	$\mu_1=0.2$	$\mu_1=0.4$	$\mu_1=0.6$	$\mu_1=0.8$	$\mu_1=1.0$
z=1	0.1674	0.1544	0.1391	0.1327	0.1248	0.1162
z=2	0.1628	0.1533	0.1423	0.1322	0.1209	0.1114
z=3	0.1643	0.1523	0.1442	0.1329	0.1256	0.1127
z=4	0.1678	0.1525	0.1438	0.1358	0.1210	0.1167
z=5	0.1639	0.1532	0.1449	0.1303	0.1228	0.1154

サンプルサイズ $n=100$ 、繰返し回数 100 とした。

5 結 論

センが提唱し、高山によって修正された貧困測度を応用することで、社会的な不幸の度合いを測定する指数——不遇指数——を本稿では定式化した。データを実際に分析する際の注意点としては、 m 次元資源ベクトルの各構成要素は個人の優位あるいは厚生に貢献するものでなければならない、ということがあげられる。またそれぞれの次元は非負の実数であることが望ましい。

本稿では公理的な指数の構成に議論を限定したので言及してこなかったが、社会的幸福（不幸）度の測定方法のもう一つは、プラクティカルな推測統計の応用である。もっともオーソドックスな方法として、幸福（不幸）に貢献する（と考えられる）いくつかの変数を主成分分析によって包括的指数として合成することがあげられる。例えば各社会について、平均寿命、平均所得、GNP、国民一人当たりの GNP、平均健康度等を測定し、これらの変数から主成分分析によりもっとも固有値（寄与率）の高い主成分を抽出し、その主成分得点によって各社会のランクを決定するというものである。主成分分析による諸社会の比較では、各社会における幸福（不幸）の相対性に関する情報をとり入れることは難しいが、それは主成分分析の欠陥ではなくむしろ各変数として平均値や総計がしばしば用いられることの問題であらう。今後はこうした計量的アプローチとの整合性も考慮する必要がある。

本稿では、議論の焦点を拡散させないために意図的に以下の問題について

で論じてこなかった。最後にそれらを確認しておこう。第一に個人的効用に貢献する資源がそもそも何であるかという問題である。第二に、不遇指数を計算するために条件として先に与えられる不遇境界値をどのようにして決定するのかという問題である。第三に資源ベクトルをその価値に変換する関数としてコブ＝ダグラス関数を仮定したが、どのような関数（クラス）が適切なのかそれ自体を公理から導出する試みも必要だろう。

注

1) ここでは「状態」という概念を常に「社会状態」という意味で考える。例えば A 氏が酒好きだったとしよう。二日酔いでこれから大事な商談を控えて出社する直前にビールを飲むことが幸福かといえば、酒好きの A 氏といえども、そのような状況であれば飲まないことを望ましいと考えるだろう。このとき単に「二日酔いでこれから出社という時にビールを飲む状態 x 」と「二日酔いでこれから出社という時にビールを飲まない状態 y 」を比較したとき A 氏が状態 y の方を望ましい、状態 y の方が幸福であると考えているにすぎない。ここでいう社会状態とは個人の周りの状況や他者の行為など全て含めて一般的に定義されている。

2) 個人 i の選好関係を R_i とし、選好を持つ個人が n 人存在する ($i=1, 2, \dots, n$)。 $xR_i y$ は「個人 i にとって社会状態 x は社会状態 y と少なくとも同じくらいよい」を意味する。個人の選好関係は

1. 反射的 $\forall x \in X, xR_i x$ 社会状態 x は x 自身と少なくとも同じ程度によい
2. 推移的 $\forall x, y, z \in X, ((xR_i y) \wedge (yR_i z)) \Rightarrow xR_i z$ 選好は推移的である
3. 完備的 $\forall x, y \in X, (x \neq y) \Rightarrow ((xR_i y) \vee (yR_i x))$ x と y が異なっているならば、 $xR_i y$ か $yR_i x$ のどちらかが成り立つ。

という三つの性質を満たすと仮定する。上記三つの性質を満たす選好関係を単に順序と呼ぶ。また $xPy \Leftrightarrow [(xR_i y) \wedge \neg(yR_i x)]$ なる関係 P を厳密な選好という。なお順序に関しては分野によっていろいろな方言があって、ここでいう順序を半順序とか部分順序とか弱順序と呼ぶ分野もあるので注意されたい [Sen, 1970=2000: 14]。

3) パレート原理は厚生を判断する基準としては倫理性を欠くがゆえにふさわしくないという批判をしばしば受ける。

4) $x \in X$ が $\forall y, y \in X \Rightarrow xR_i y$ を満たすとき (任意の y と比較して x の方が同じくらい良いというとき)、 x は二項関係 R_i に関して X の最良要素であるという。 X の中の最良要素の集合を X の選択集合と呼び、 $C(X, R_i)$ で表す。 X 上で定義される選択関数 $C(S, R_i)$ とは、 X の任意の非空な部分集合 S に対してその選択集合 $C(S, R_i)$ が空でないような汎関数 (関数の関数) である。つ

まり社会的決定関数とは、それによって社会状態の最良要素が決定できるような社会的選好のことである。

- 5) ただし「所得ギャップの重み付きの和」という関数形そのものは公理から導出されているわけではない。ただし不平等測度に関しては、シヨロックスが仮定された一般の性質（ローレンツ整合性、連続性、加法的分解可能性）から特殊な関数形、すなわちタイルのエントロピー尺度、を導出することに成功している [Shorrocks, 1980]。
- 6) オーバーラップがある場合の分割については [Dagum, 1997] をみよ。パラメトリックな分解については [Hamada, 2004] をみよ。

文献

- Aitchison, J. and Brown, J. A. C, 1957, *The Lognormal Distribution with Special Reference to Its Uses in Economics*, London : Cambridge University Press.
- 青木昌彦, 1979, 『分配理論 第二版経済学全集 13』筑摩書房。
- Atkinson, A. B, 1970, “On the Measurement of Inequality,” *Journal of Economic Theory*, 2 : 244–63.
- Bhattacharya, N. and Mahalanobis, B, 1967, “Regional Disparity in Household Consumption in India,” *Journal of American Statistical Association*, 62 : 143–161.
- Dagum, C, 1997, “A New Approach to the Decomposition of the Gini Income Inequality Ratio,” *Empirical Economics*, 22 : 515–531.
- Hamada, H, 2004, “Parametric Decomposition of the Gini Coefficient,” mimeographed.
- 市井三郎, 1971, 『歴史の進歩とはなにか』東京：岩波新書。
- 小西秀樹, 2002, 「所得格差とジニ係数」宮島洋・連合総合生活開発研究所編『日本の所得分配と格差』東京：東洋経済新報社。
- Sen, A. K., 1970, *Collective Choice and Social Welfare*, San Fransisco : Hololen-Day. (=2000, 志田基与師監訳『集会的選択と社会的厚生』東京：勁草書房.)
- , 1976, “Poverty : An Ordinal Approach to Measurement,” *Econometrica*, 44 : 219–31.
- , 1985, *Commodities and Capabilities*, New York : Elsevier Science Publishers B. V. (=1988, 鈴木興太郎訳『福祉の経済学』東京：岩波書店.)
- , 1997, *On Economic Inequality, Expanded edition with a substantial annex by James E. Foster and Amartya Sen*, Oxford : Clarendon Press. (=2000, 鈴木興太郎・須賀晃一訳『不平等の経済学—ジェームズ・フォスター、アマルティア・センによる補論「四半世紀後の『不平等の経済学』」を含む拡大版』東京：東洋経済新報社.)
- Shorrocks, A. F, 1980, “The Class of Additively Decomposable Inequality Measures,” *Econometrica*, 48 : 613–625.
- Takayama N, 1979, “Poverty, Income Inequality and Their Measures : Professor

Sen's Axiomatic Approach Reconsidered," *Econometrica*, 47(3), 747-759.

Yitzhaki, S, 1979, "Relative Deprivation and the Gini Coefficient," *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 93(2), 321-24.

An Axiomatic Approach to the Disadvantage Index

Hiroshi Hamada*

■ Abstract

The purpose of this paper is to construct the disadvantage index of a society through an axiomatic approach. We shall use the poverty measure, that is, the Gini coefficient of a censored income distribution, proposed by Sen and Takayama. In order to apply the poverty index to more general situations, we use a censored utility distribution instead of a censored income distribution. For this we assume that every person in a society has a specific utility function and m types of resources which contribute to the increase of its utility. In this case a person whose utility falls below a certain level is considered to be in a disadvantage environment. This environment, which we call the disadvantage boundary, allows us to define a censored utility distribution. The Gini coefficient, which is applied to the censored utility distribution, is the disadvantage index.

Key words : poverty measure, Gini coefficient, relative deprivation