# 確率的DEAモデル
## －CCP型DEAモデル－

瀬　見　　　博

## I　序

Charnes, Cooper and Rhodes[1]は、観測された複数個のインプット値とアウトプット値に基づいて、生産フロンティアを推定し、各事業体(Decision Making Unit：以下、DMUと略す)の相対的な効率性を評価することができる、包絡分析法(Data Envelopment Analysis：以下、DEAと略す)と呼ばれるノンパラメトリックな手法を1978年に開発した。その後、DEAは、理論面での精緻化がはかられると同時に、さまざまな領域の現実問題にも数多く適用されることによって、次第にその有効性が認められるようになってきた[2]。そして今日、マネジメントサイエンス、オペレーションズリサーチ、統計学、計量経済学など、多様な学問分野において注目される分析手法の１つとなっている。

ところで、これまでに考案されてきた多くの代表的なDEAモデル、例えば、CCRモデル、BCCモデル、加法モデル、乗法モデルなどの基本モデルや、それらを修正・拡張した領域限定モデル(assurance region model)、コ

1)　Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E.(1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, *European Journal of Operational Research*, Vol.2, No.6, pp. 429-444.

2)　例えば、Seiford, L.M.(1996), Data Envelopment Analysis：The Evolution of the State of the Art(1978-1995), *The Journal of Productivity Analysis*, Vol.7, No.2/3, pp.99-137を参照されたい。

ンレシオモデル(cone ratio model)などをみてみると、インプットデータとアウトプットデータは決定論的(確定的)であるという仮定の下でもっぱら議論が展開されている。しかし、データには、測定誤差など、それに固有の偶発的ノイズが付き物であるので、観測されたデータに基づいて分析を行うDEAにおいても、データのもつ不確実性を明示的に組み込んだモデルを開発することが望まれる。そのために、近年、インプットデータやアウトプットデータを確率変数とみなす確率的DEAやそれらをファジィ数として扱うファジィDEAなどの研究が行われるようになってきた。しかし、これらの研究もまだ緒に就いたばかりである。

そこで本稿では、Cooper, Seiford and Tone[3]に基づいて、従来の確定的なDEAモデルに確率的計画法の一種である確率制約計画法(Chance Constrained Programming：以下、CCPと略す)を適用した、確率的DEAモデルをとりあげ、そこで展開されている基本的な考え方について考察してみることにする。

## II　比率型CCRモデルとCCP型DEAモデル

特定の事業体$DMU_o$の相対的効率性を評価するために、Charnes, Cooper and Rhodesが提示した比率型CCRモデルは、以下のように、分数計画問題として定式化される。

$$\text{Max}\quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 1 \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{2}$$

$$v_i,\ u_r \geq 0 \quad \forall i,\ r \tag{3}$$

ここに、$x_{ij}$, $y_{rj}$は、それぞれ、事業体$DMU_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$のインプット項目$i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$の投入量とアウトプット項目$r(r=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$

3)　Cooper, W. W., Seiford, L.M. and Tone, K.(2000), *Data Envelopment Analysis-A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software-*, Kluwer Academic Publishers, pp.266-271.

の産出量を表す。また、$v_i$, $u_r$ は、それぞれ、$DMU_j$ のインプット項目 $i$ の投入量 $x_{ij}$ とアウトプット項目 $r$ の産出量 $y_{rj}$ に付与される加重値である。

ところで、現実には、投入量は操作可能であるけれども、産出量は操作が困難である場合が多いので、いま、$x_{ij}$ を決定論的、$y_{rj}$ を既知の確率分布に従う確率変数、であると想定した上で、上記モデルに対して、CCP の P モデル(満足水準最適化モデル)を適用してみることにする[4]。その結果、CCP 型 DEA モデルの一般形は、次のように定式化できることがわかる。

$$\text{Max} \quad \Pr\left\{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{ro} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \geq \beta_o\right\} \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad \Pr\left\{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq \beta_j\right\} \geq 1-\alpha_j \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{5}$$

$$v_i,\ u_r \geq 0 \quad \forall i,\ r \tag{6}$$

ここに、Prは確率を、また、アウトプット変数に付与されている記号～は、それが確率変数であることを意味する。さらに、$\beta_o$ は意思決定者により達成することが望まれている $DMU_o$ の効率値(入出力比率)に対する希求水準を、また、$\beta_j$ は $DMU_j$ の効率値の上限を、それぞれ表す定数である。一方、定数 $\alpha_j(0 \leq \alpha_j \leq 1)$ は、$DMU_j$ の効率値が $\beta_j$ 以上になる確率を示しており、意思決定者が許容できるリスクであるとみなされる。

## III 決定論的同値モデル

さて、(4)～(6)の CCP 型 DEA モデルは、このままでは現実問題に適用できないため、それを操作可能な決定論的同値(deterministic equivalents)のモデルに変換する必要がある。そのための手順を以下に示すことにする。

まず、$DMU_j$ における $\tilde{y}_{rj}$ の期待値を $\bar{y}_{rj}$ で、また、$\tilde{y}_{rj}$ に関する分散―共分散行列を、

4) 確率制約計画問題は、目的関数の型に応じて、Eモデル(期待値モデル)、Vモデル(分散モデル)、Pモデル(満足水準最適化モデル)に大別される。詳細については、Charnes, A. and Cooper, W. W.(1963), Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisficing under Chance Constraints, *Operations Research*, Vol.11,pp.18-39を参照されたい。

$$\Sigma_j=\begin{bmatrix} v(\tilde{y}_{1j}) & Cov(\tilde{y}_{1j},\ \tilde{y}_{2j}) & \cdots & Cov(\tilde{y}_{1j},\ \tilde{y}_{sj}) \\ Cov(\tilde{y}_{2j},\ \tilde{y}_{1j}) & v(\tilde{y}_{2j}) & \cdots & Cov(\tilde{y}_{2j},\ \tilde{y}_{sj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\tilde{y}_{sj},\ \tilde{y}_{1j}) & Cov(\tilde{y}_{sj},\ \tilde{y}_{2j}) & \cdots & v(\tilde{y}_{sj}) \end{bmatrix} \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{7}$$

で表すことにする。ここに、$v$ は分散を、$Cov$ は共分散を示す演算子である。さらに、$V_j$ を、

$$V_j=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_s)\Sigma_j\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix} \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{8}$$

とおく。そして、(5)の左辺を以下のように書き直す。

$$\Pr\left\{\sum_{r=1}^{s}u_r\tilde{y}_{rj}\Big/\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}\leq\beta_j\right\}=\Pr\left\{\sum_{r=1}^{s}u_r\tilde{y}_{rj}\leq\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}\right\}$$
$$=\Pr\left\{\left(\sum_{r=1}^{s}u_r(\tilde{y}_{rj}-\bar{y}_{rj})\right)\Big/\sqrt{V_j}\leq\left(\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}\right)\Big/\sqrt{V_j}\right\} \tag{9}$$

次に、式の表記を単純化するために、(10)で定義される新しい確率変数 $\tilde{z}_j$ を導入する。

$$\tilde{z}_j=\sum_{r=1}^{s}u_r(\tilde{y}_{rj}-\bar{y}_{rj})\Big/\sqrt{V_j} \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{10}$$

これを、(9)に代入すると、(5)は(11)のように表すことができる。

$$\Pr\left\{\tilde{z}_j\leq\left(\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}\right)\Big/\sqrt{V_j}\right\}\geq1-\alpha_j \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{11}$$

ここで、$\tilde{z}_j$ は平均が0、分散が1の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うと仮定すると、(11)から、

$$\int_{-\infty}^{k_j(u_r,v_i)}f(\tilde{z}_j)d\tilde{z}_j=\Phi\left(\left(\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}\right)\Big/\sqrt{V_j}\right)\geq1-\alpha_j \tag{12}$$

が得られる。ここに、$\Phi$ は標準正規分布の累積分布関数を示す。また、$k_j(u_r,v_i)$ は、$k_j(u_r,v_i)=\left(\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}\right)\Big/\sqrt{V_j}$ である。それ故、$\alpha_j\leq0.5$ を想定すれば、$\tilde{z}_j$ は標準正規分布に従うので、(12)から、

$$\left(\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}\right)\Big/\sqrt{V_j}\geq\Phi^{-1}(1-\alpha_j)\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{13}$$

が求まる。ここに、$\Phi^{-1}$ は $\Phi$ の逆関数である。

さらに、Charnes and Cooper[5]と同様に、(13)に対して、(14)が成り立つような非負の変数 $\eta_j$ を新たに導入してみよう。

$$\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}\geq\eta_j\geq\Phi^{-1}(1-\alpha_j)\sqrt{V_j} \tag{14}$$

この時、変数 $\eta_j$ の非負性が維持されていれば、(14)を次の 2 つの式に分離することが可能となる。すなわち、

$$\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}\geq\eta_j\geq 0 \tag{15}$$

$$K^2_{(1-\alpha_j)}V_j\leq\eta_j^2 \tag{16}$$

ここに、$K_{(1-\alpha_j)}=\Phi^{-1}(1-\alpha_j)\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ である。

以上の結果から、(4)〜(6)のCCP型DEAモデルは、

$$\text{Max}\quad \Pr\left\{\sum_{r=1}^{s}u_r\tilde{y}_{ro}\Big/\sum_{i=1}^{m}v_ix_{io}\geq\beta_o\right\} \tag{17}$$

$$\text{s.t.}\quad \beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}-\eta_j\geq 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{18}$$

$$K^2_{(1-\alpha_j)}V_j-\eta_j^2\leq 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{19}$$

$$v_i,\ u_r\geq 0\quad \forall i,r,\quad \eta_j\geq 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{20}$$

で与えられるモデルと同値であることがわかる。しかし、(18)〜(20)の制約式はすべて決定論的であるが、目的関数(17)に確率変数 $\tilde{y}_{ro}$ が含まれているため、上記モデルはまだ決定論的なモデルであるとはいえない。

そこで、この問題を解決するために、(17)〜(20)のモデルを次のように変換してみることにする。

$$\text{Max}\quad \gamma \tag{21}$$

$$\text{s.t.}\quad \Pr\left\{\sum_{r=1}^{s}u_r\tilde{y}_{ro}\Big/\sum_{i=1}^{m}v_ix_{io}\geq\beta_o\right\}\geq\gamma \tag{22}$$

$$\beta_j\sum_{i=1}^{m}v_ix_{ij}-\sum_{r=1}^{s}u_r\bar{y}_{rj}-\eta_j\geq 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{23}$$

5) *ibid*., p.28.

$$K^2_{(1-\alpha_j)} V_j - \eta_j^2 \leq 0 \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{24}$$

$$v_i, \ u_r \geq 0 \quad \forall i, r, \quad \eta_j \geq 0 \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{25}$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \tag{26}$$

このモデルは、(17)〜(20)のモデルと同値であることが明らかであるため、後は、以下のように(22)に関する決定論的同値の式を求めれば、問題は解決することになる。

すなわち、(5)と同様にして、(22)の左辺を展開すれば、

$$\Pr\left\{\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{ro} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \geq \beta_o\right\} = \Pr\left\{-\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{ro} \leq -\beta_o \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\right\}$$

$$= \Pr\left\{-\left(\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{ro} - \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro}\right) \Big/ \sqrt{V_o} \leq -\left(\beta_o \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} - \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro}\right) \Big/ \sqrt{V_o}\right\}$$

$$= \Pr\left\{\tilde{z}_o \leq \left(\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \beta_o \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\right) \Big/ \sqrt{V_o}\right\} \tag{27}$$

となるので、これより、(22)は、

$$\Pr\left\{\tilde{z}_o \leq \left(\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \beta_o \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\right) \Big/ \sqrt{V_o}\right\} \geq \gamma \tag{28}$$

と表すことができる。従って、その逆関数を求めると、(28)と同値の決定論的な式、

$$\left(\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \beta_o \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\right) \Big/ \sqrt{V_o} \geq \Phi^{-1}(\gamma) \tag{29}$$

が得られることになる。

以上の結果を総合することによって、最終的に、(21)〜(26)のモデルと同値のモデル、換言すれば、(4)〜(6)で定式化された CCP 型 DEA モデルに対する完全に決定論的同値のモデル(30)〜(35)を導きだすことができる。

$$\text{Max} \quad \gamma \tag{30}$$

$$\text{s.t.} \quad \left(\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \beta_o \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}\right) \Big/ \sqrt{V_o} \geq \Phi^{-1}(\gamma) \tag{31}$$

$$\beta_j \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{rj} - \eta_j \geq 0 \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{32}$$

$$K^2_{(1-\alpha_j)} V_j - \eta_j^2 \leq 0 \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{33}$$

$$v_i, \ u_r \geq 0 \quad \forall i, r, \quad \eta_j \geq 0 \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{34}$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \tag{35}$$

## Ⅳ 確率的効率性

さて、上記モデル(30)〜(35)の最適解が求められた時、どのような条件が満たされていれば、分析対象となっている特定の事業体 $DMU_o$ が効率的であると判定できるのであろうか。その条件を探るために、確率的効率性(stochastic efficiency)の概念について考えてみることにする。

いま、(21)〜(26)のモデルから得られた $\gamma$，$v_i$，$u_r$ の最適値を、それぞれ、$\gamma^*$，$v_i^*$，$u_r^*$ で表す。そして、

$$\gamma^* = \Pr\left\{\sum_{r=1}^{s} u_r^* \tilde{y}_{ro} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{io} \geq \beta_o\right\} \tag{36}$$

を満たす解が与えられたものとしよう。また、CCP型DEAモデルの目的関数(4)における $\beta_o$ の値と制約式(5)の $DMU_o$ に関する $\beta_j$ の値、すなわち、$\beta_{jo}$ が等しいと仮定する。その時、

$$\Pr\left\{\sum_{r=1}^{s} u_r^* \tilde{y}_{ro} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{io} \leq \beta_o\right\} = 1 - \Pr\left\{\sum_{r=1}^{s} u_r^* \tilde{y}_{ro} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{io} \geq \beta_o\right\}$$
$$= 1 - \gamma^* \geq 1 - \alpha_{jo} \tag{37}$$

から、次のことがわかる。1）$\gamma^* > \alpha_{jo}$ となることはあり得ない。なぜなら、$\gamma^* > \alpha_{jo}$ ならば、$DMU_o$ に関する(5)の制約式が満たされないからである。2）$\gamma^* < \alpha_{jo}$ の時には、$DMU_o$ に関する(5)の制約式の左辺の条件が満たされないリスクは、事前に決められている許容可能なリスク以下になっている。

以上のことから、次の定理を導きだすことができる。

［定理］$\beta_{jo} = \beta_o = 1$ の時、1）$\gamma^* = \alpha_{jo}$ が成り立てば、$DMU_o$ は確率的に効率的である。2）$\gamma^* < \alpha_{jo}$ の場合には、$DMU_o$ は確率 $1-\gamma^*$ で確率的に非効率である。

## Ⅴ 結

Ⅲ節で、CCP型DEAモデルに対する決定論的同値モデル(30)〜(35)を得ることができたけれども、これは非線形でかつ非凸計画問題であるため、実際に

解くことは難しい。そこで、Cooper, Huang and Li[6]は、最適解を求めやすくするために、このモデルの凸計画問題への変換を試みている。また、アウトプットの確率変数 $\tilde{y}_{rj}$ が、 $\tilde{y}_{rj}=\bar{y}_{rj}+b_{rj}\xi$ により表されると仮定することによって、CCP型DEAモデルが線形計画問題に帰着できることを示している。その際、$\xi$ は正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数であるという仮定がおかれる。なお、$b_{rj}$ は $\tilde{y}_{rj}$ の標準偏差である。さらに、アウトプット変数だけでなくインプット変数 $\tilde{x}_{ij}$ も多変量正規分布に従う確率変数であり、$\tilde{x}_{ij}=\bar{x}_{ij}+a_{ij}\xi$ で表されるとみなすことによって、CCP型DEAモデルの一般化をはかっている。ここに、$a_{ij}$ は $\tilde{x}_{ij}$ の標準偏差である。

ところで、これらの研究では、確率変数を決定論的変数に変換し、CCP型DEAモデルを決定論的同値の線形計画モデルに帰着させるために、換言すれば、モデルを最終的に線形計画法で解くことができるようにするために、確率変数は正規分布に従うという仮定がおかれている。しかし、確率変数が常に正規分布をするかどうかはわからない。また、モデルを現実問題に適用する際には、例えば、$\bar{x}_{ij}$, $\bar{y}_{rj}$, $a_{ij}$, $b_{rj}$ の値を決定しなければならないが、そのための方法についても議論されていない[7]。さらに、従来の確定的DEAモデルに対して、CCPのPモデルやEモデルを適用した研究はみうけられるが、Vモデルを用いた分析は現状ではみいだせない。これらの問題の解決が今後に残された課題といえるだろう。

(筆者は関西学院大学商学部教授)

6) Cooper, W. W., Huang, Z. and Li, S.X.(1996), Satisficing DEA Models under Chance Constraints, *Annals of Operations Research*, Vol.66, pp.279-295.

7) 末吉は、$\bar{y}_{rj}$ と $b_{rj}$ の値を決定するために、PERTの分野で活動時間の推定に用いられる3点見積り法を利用している。詳細については、末吉俊幸(2001)『DEA—経営効率分析法—』朝倉書店、141-154頁を参照されたい。