観測誤差を伴う時系列-回帰モデルの統計的推定

著者	杉原 左右一
雑誌名	商学論究
巻	50
号	1/2
ページ	421-435
発行年	2002-12-11
URL	http://hdl.handle.net/10236/420

観測誤差を伴う時系列－回帰モデルの統計的推定

杉　原　左　右　一

I　はじめに

本稿では、独立変数が(i)定常 AR(1)過程、(ii)near I(1)過程、ないし(iii) I(d)過程（$d \geqq 1$）に従い、かつ方程式の誤差項がこれとは独立に定常 AR(1)過程に従う時系列―回帰モデルを取り上げ、特に上記した各種の独立変数が観測誤差を伴って観測される場合のパラメータ推定量の統計的性質について考察する。特に未知パラメータの最小2乗推定量の漸近的性質を明らかにし、合わせて拙稿〔5〕の結果との比較検討を行いたい。

以下先ずII節で観測誤差を伴う時系列―回帰モデルと諸仮定について述べる。次にIII節からV節に於て、順次(i)定常 AR(1)過程、(ii)nearI(1)過程、(iii)I(d)過程（$d \geqq 1$）に従う独立変数が観測誤差を伴って観測されるモデルを取り上げ、パラメータのOLSの漸近的性質を明らかにし、拙稿〔5〕の結果との比較検討を行う。最後にVI節で今後の研究課題について簡単に述べる。

II　観測誤差を伴う時系列―回帰モデルと諸仮定

従属変数、独立変数、方程式誤差、及び独立変数の観測誤差をそれぞれ y_t、x_t、u_t 及び w_t と表わし、独立変数が観測誤差を伴って観測される次式で表わされる時系列―回帰モデルを考えよう。

(1)　$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t^0 + u_t$

(2)　$x_t = x_t^0 + w_t$

本稿では独立変数 $x_t{}^0$ が(i)定常 AR(1)過程、(ii)near I(1)過程、ないし(iii) I (d) 過程（$d\geqq1$）に従う場合に対応してそれぞれ以下の仮定 1－(a)、1－(b)、1－(c) を設定し、他に共通に仮定２、３を設定する。

仮定 1－(*a*)（独立変数 x_t^0 が定常 AR(1)過程に従う場合）

(3)　$\alpha(\mathrm{L})x_t{}^0=v_t,\ \ \alpha(\mathrm{L})=1-\alpha\mathrm{L},\ \ |\alpha|<1$

仮定 1－(*b*)（独立変数 x_t^0 がnear I(1)過程に従う場合）

(4)　$x_t^0=\left(1-\dfrac{c}{T}\right)x_{t-1}^0+e_t,\ \ c\geqq0$

(5)　$e_t=\psi(\mathrm{L})v_t,\ \ \psi(\mathrm{L})=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\mathrm{L}^i,\ \ \psi_0=1,\ \ \sum_{j=0}^{\infty}j|\psi_j|<\infty$

仮定 1－(*c*)（独立変数 x_t^0 が I(d)過程（$d\geqq1$）に従う場合）

(6)　$(1-\mathrm{L})^d x_t^0=e_t,\ \ d\geqq1$

(7)　$e_t=\psi(\mathrm{L})v_t,\ \ \psi(\mathrm{L})=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\mathrm{L}^i$、$\psi_0=1,\ \ \sum_{j=0}^{\infty}j|\psi_j|<\infty$

仮定 2

(8)　$\phi(\mathrm{L})u_t=\varepsilon_t$、$\phi(\mathrm{L})=1-\phi\mathrm{L}$、$|\phi|<1$

仮定 3

(9)　$(v_t,\ \varepsilon_t,\ w_t)'\sim\mathrm{I.I.D.}\left((0,\ 0,\ 0)',\ \begin{pmatrix}\sigma_v{}^2 & & \\ & \sigma_\varepsilon{}^2 & \\ & & \sigma_w{}^2\end{pmatrix}\right)$

(10)　$\mathrm{E}(v_t{}^4)<\infty,\ \ \mathrm{E}(\varepsilon_t{}^4)<\infty,\ \ \mathrm{E}(w_t{}^4)<\infty$

仮定 1－(a)、仮定２で独立変数 x_t^0 及び方程式誤差項 u_t が共に定常 AR(1)過程に従うことを仮定しているが、これらをより一般の定常 ARMA 過程に従う場合に拡張しても以下の性質の基本的部分は同様に成立する。また、仮定 1－(b)で特に $c=0$ とした場合が仮定 1－(c) で $d=1$ とした場合に相当し、この場合、独立変数 x_t^0 はいずれも誤差項 e_t が定常線形過程に従う酔歩過程（ランダムウォーク過程）となる。仮定 1－(c)に関しては、本稿

では I(d)過程が非定常過程となる $d \geqq \frac{1}{2}$ の場合を考察の対象としたいが、特に観測誤差を伴う場合には以下の導出過程から明らかになる様に $\frac{1}{2} \leqq d < 1$ を除外した $d \geqq 1$ の場合を取り扱う必要がある。仮定3を$(v_t, \varepsilon_t, w_t)'$が相関を持つ場合に拡張することも可能であるが、分析はやや複雑となるため、ここでは最も簡単な無相関の場合を取り扱うことにする。

さて、以後の分析の便宜のために、以下では次のベクトル・行列表現を用いることにする。

(11)　$y=(y_1, y_2, \cdots, y_T)'$

(12)　$X^0=\begin{pmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ x_1^0, & x_2^0, & \cdots, & x_T^0 \end{pmatrix}'=(i, x^0)$

(13)　$i=(1, 1, \cdots, 1)'$

(14)　$x^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_T^0)'$

(15)　$X=\begin{pmatrix} 1, & 1, & \cdots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_T \end{pmatrix}'=(i, x)$

(16)　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_T)'$

(17)　$w=(w_1, w_2, \cdots, w_T)'$

(18)　$W=(0, w)$

(19)　$u=(u_1, u_2, \cdots, u_T)'$

(20)　$\theta=(\beta_0, \beta_1)'$

そうすれば、(1)、(2)式で表わされる観測誤差モデルを次式の様にベクトル・行列表示できる。

(21)　$y=X^0\theta+u$

(22)　$X=X^0+W$

さて、(1)、(2)式を別に次式の様に表わせることに注意しよう。

(23)　$y_t=\beta_0+\beta_1 x_t+\xi_t$

(24)　$\xi_t=u_t-\beta_1 w_t$

そうすれば、

(25) $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots\xi_T)'$

として、(23)、(24)式をベクトル・行列表示して次式を得る。

(26) $y=X\theta+\xi$

(27) $\xi=u-W\theta$

従って観測可能な独立変数行列 X をもとにして、(26)式より θ の OLS（最小 2 乗推定量）$\hat{\theta}=(\hat{\beta}_0,\ \hat{\beta}_1)'$ を求めれば

(28) $\hat{\theta}=(X'X)^{-1}X'y$

となる。また $\hat{\theta}-\theta$ の確率的誤差表現を求めれば、

(29) $\hat{\theta}-\theta=(X'X)^{-1}X'\xi$

となる。

(22)、(27)式をもとに、(29)式右辺の $X'X$，$X'\xi$ を具体的に求めれば次式となる。

(30)
$$\begin{aligned} X'X &=(X^0+W)'(X^0+W) \\ &=X^{0\prime}X^0+(X^{0\prime}W+W'X^0+W'W) \end{aligned}$$

(31)
$$\begin{aligned} X'\xi &=(X^0+W)'(u-W\theta) \\ &=X_0'u-(X^{0\prime}W\theta-W'u+W'W\theta) \end{aligned}$$

観測誤差のない場合には、(30)、(31)式は右辺第 1 項のみでよいが、観測誤差を伴う場合には(30)、(31)式右辺の括弧の中身の 3 項が新たに導入される点が異なっている。以後の便宜のために、(30)、(31)式右辺の各部分を要素表示しておくことにする。

(32)
$$X^{0\prime}X^0=\begin{pmatrix} T & i'x^0 \\ x^{0\prime}i & x^{0\prime}x \end{pmatrix}$$

(33)
$$\begin{aligned} X^{0\prime}W &=(W'X^0)' \\ &=\begin{pmatrix} 0 & i'w \\ 0 & x^{0\prime}w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(34)
$$W'W=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w'w \end{pmatrix}$$

(35)　$X^{0\prime}u=(i'u,\ x^{0\prime}u)'$

(36)　$X^{0\prime}W\theta=\beta_1(i'w,\ x^{0\prime}w)'$

(37)　$W'u=(0,\ v'u)'$

(38)　$W'W\theta=\beta_1(0,\ w'w)'$

以下順次独立変数 x_t^0 が(i)定常 AR(1)過程、(ii)near I(1)過程、(iii) I(d)過程$(d\geqq1)$ に従う場合を取り上げて、OLS$\hat{\theta}$ の漸近的性質について考察することにする。

III 定常 AR(1)過程に従う独立変数が観測誤差を伴う場合について

本稿の論点を把握するために先ず最初に独立変数 x_t^0 が定常 AR(1)過程に従う場合について OLS$\hat{\theta}$ の統計的性質について整理しておくことにしたい。

まず(29)式を

(39)　$\hat{\theta}-\theta=\left(\frac{1}{T}X'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{T}X'\xi\right)$

と変形し、$\frac{1}{T}X'X$、$\frac{1}{T}X'\xi$ を構成する各部分の $T\to\infty$ のときの確率極限を求めれば次式を得る。

(40)　$\frac{1}{T}X^{0\prime}X^0\xrightarrow{p}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}\end{pmatrix}$

(41)　$\frac{1}{T}W'W\xrightarrow{p}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma_w^2\end{pmatrix}$

(42)　$\frac{1}{T}W'W\theta\xrightarrow{p}(0,\ \beta_1\sigma_w{}^2)'$

その他の部分については、それらの $T\to\infty$ のときの確率極限はいずれもゼロベクトル、ないしゼロ行列となる。

(43)　$\frac{1}{T}X^{0\prime}W=\left(\frac{1}{T}W'X^0\right)'\xrightarrow{p}0$

(44)　$\frac{1}{T}X^{0\prime}u\xrightarrow{p}0$

(45)　$\frac{1}{T}X^{0\prime}W\theta \xrightarrow{p} 0$

(46)　$\frac{1}{T}W'u \xrightarrow{p} 0$

従って以上をもとにすれば、$T\to\infty$ のとき次式が成立することが分かる。

(47)　$$\hat{\theta}-\theta \xrightarrow{p} \left(0,\ -\beta_1\sigma_w{}^2\frac{1}{\frac{\sigma_v{}^2}{1-\alpha^2}+\sigma_w{}^2}\right)$$

すなわち、独立変数が定常 AR(1)過程に従う場合には、観測誤差が存在しても、$\hat{\beta}_0$ は β_0 の一致推定量となるが、$\hat{\beta}_1$ は β_1 の一致推定量ではなく、$\frac{-\beta_1\sigma_w{}^2}{\frac{\sigma_v{}^2}{1-\alpha^2}+\sigma_w{}^2}$ の漸近的バイアスが生ずることが分かる。β_1 の符号が正（負）であれば、$\hat{\beta}_1$ は β_1 を過少（過大）評価する傾向がある。

言うまでもなくこの様な漸近的バイアスは独立変数 x_t と方程式誤差項 ξ_t が相関を持つことに帰因するものであり、バイアスを消去するためには例えば操作変数法を用いればよい。なお、観測誤差がなければ $\sigma_w{}^2=0$ となるから、この場合には(47)式より漸近的バイアスは0となり拙稿〔5〕の結果と一致することが理解出来る。

Ⅳ　near I(1)過程に従う独立変数が観測誤差を伴う場合について

次に、独立変数 x_t^0 が near I(1)過程に従う場合について考察しよう。そのために次の補題1が有効である。

補題1 [1)]

$T\to\infty$ のとき以下の(i)〜(iv)が成立する。但し、記号⇒は対応する確率測度の $T\to\infty$ の場合の弱収束を示す。また、$W_v(r)$、$W_\varepsilon(r)$($r\in[0,\ 1]$) は独立な標準ブラウン運動であり、$X_c^0(r)$($r\in[0,\ 1]$) は次式を満たすO−U

1)　Phillips〔2〕参照。

過程 (Ornstein－Uhlenbeck 過程) である。

(48) $dX_c^0(r) = -cX_c^0(r) + dW_v(r)$

(i) $\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} x_{[Tr]}^0 \Rightarrow \sigma_v \psi(1) X_c^0(r)$

(ii) $\frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \sum_{t=1}^{T} x_t^0 \Rightarrow \sigma_v \psi(1) \int_0^1 X_c^0(r) dr$

(iii) $\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} x_t^{02} \Rightarrow \sigma_v^2 \psi^2(1) \int_0^1 X_c^0(r)^2 dr$

(iv) $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t^0 u_t \Rightarrow \sigma_v \sigma_\varepsilon \frac{\psi(1)}{\phi(1)} \int_0^1 X_c^0(r) dW_\varepsilon(r)$

規格化行列 D_2 を

(49) $D_2 = D\mathrm{iag}\left(T^{\frac{1}{2}}、T\right)$

として、

(50) $D_2(\hat{\theta} - \theta) = (D_2^{-1} X' X D_2^{-1})^{-1} D_2^{-1} X' \xi$

を考えよう。補題 1 を用いれば、$D_2{}^{-1} X' X D_2^{-1}$、$D_2^{-1} X' \xi$ を構成する部分について、$T \to \infty$ のとき次式が成立することが分かる。

(51)
$$D^{-1} X^{0\prime} X^0 D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \sum_{t=1}^{T} x_t^0 \\ \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \sum_{t=1}^{T} x_t^0 & \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} x_t^{02} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sigma_v \psi(1) \int_0^1 X_c^0(r) dr \\ \sigma_v \psi(1) \int_0^1 X_c{}^0(r) dr & \sigma_v^2 \psi^2(1) \int_0^1 X_c^0(r)^2 dr \end{pmatrix}$$
$$\equiv \mathrm{H}_2$$

(52) $D^{-1} X^0 u = \left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^{T} u_t、\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t^0 u_t \right)'$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\left(W_\varepsilon(1),\ \sigma_v\psi(1)\int_0^1 X_c^0(r)dW_\varepsilon(r) \right)'$$

$$\equiv \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\mathrm{K}_2$$

(53) $$D^{-1}X^{0\prime}W\theta=\beta_1\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} w_t,\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t^0 w_t \right)'$$

$$\Rightarrow \beta_1\sigma_w\left(W_w(1),\ \sigma_v\psi(1)\int X_c^0(r)dW_w(r) \right)'$$

$$\equiv \beta_1\sigma_w\mathrm{K}_2{}^*$$

(54) $$D^{-1}W'W\theta=\beta_1\left(0,\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} w_t^2 \right)'$$

$$\xrightarrow{p} \beta_1(0,\ \sigma_w^2)'$$

ここで、$W_w(r)$、$W_v(r)$、$W_\varepsilon(r)$ は互いに独立な標準ブラウン運動である。その他の部分については、それらの $T\rightarrow\infty$ のときの確率極限はいずれもゼロベクトル、ないしゼロ行列となる。

(55) $$D^{-1}X^{0\prime}WD^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}\sum_{t=1}^{T} w_t \\ 0 & \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} x_t^0 w_t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{p} 0$$

(56) $$D^{-1}W'WD^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} w_t^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{p} 0$$

(57) $$D^{-1}W'\mathrm{U}=\left(0,\ \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t u_t \right)'$$

$$\xrightarrow{p} 0$$

従って、以上をもとにすれば、次の定理1が成立することが分かる。

定理 1 （x_t^0 が near I(1)過程に従う場合）独立変数が観測誤差を伴う(21)、(22)式で表わされるモデルの θ の OLS$\hat{\theta}$ について、仮定 1－(b)、仮定 2 、仮定 3 の下で $T\to\infty$ のとき次式が成立する。

(58) $$D_2(\hat{\theta}-\theta)\Rightarrow \mathrm{H}_2^{-1}\left(\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\mathrm{K}_2-\beta_1\sigma_w\mathrm{K}_2^*-(0,\ \beta_1\sigma_w^2)'\right)$$

上記定理 1 より以下の諸性質が明らかになる。

(i) 独立変数が near I(1)過程に従い、観測誤差のある場合には、ない場合と比較して(58)式右辺の括弧の中身の第 2 、 3 項が新たに加わる点が異なる。観測誤差がなければ $\sigma_w=0(\sigma_w^2=0)$ となるから、これらの項は共に 0 となり、拙稿［ 5 ］の結果と一致する。また、特に $c=0$ とすれば、V 節で取り扱う独立変数が I (1)過程に従う場合の結果と一致する。

(ii) $\hat{\beta}_0-\beta_0$、及び $\hat{\beta}_1-\beta_1$ の確率オーダーは $\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$、$\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{T}\right)$ であり、独立変数が定常過程に従う場合と異なり、near I(1)過程に従う場合には、観測誤差があっても $\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$ は共に β_0、β_1 の一致推定量となる。

(iii) $D_2(\hat{\theta}-\theta)$ の 2 つの個別の要素について、 $T\to\infty$ のとき次の関係式が成立することが分かる。

(59) $$T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_0-\beta_0)\Rightarrow\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\frac{\int_0^1 \mathrm{P}_2(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 \mathrm{P}_2^2(r)dr}-\beta_1\sigma_w\frac{\int_0^1 \mathrm{P}_2(r)dW_w(r)}{\int_0^1 \mathrm{P}_2^2(r)dr}+\beta_1\sigma_w^2\frac{\dfrac{\int_0^1 X_c(r)dr}{\sigma_v\phi(1)\int_0^1 X_c^2(r)dr}}{\int_0^1 \mathrm{P}_2^2(r)dr}$$

(60) $$T(\hat{\beta}_1-\beta_1)\Rightarrow\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_v}\frac{1}{\phi(1)\psi(1)}\frac{\int_0^1 X_c^*(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 X_c^*(r)^2dr}$$

$$-\frac{\beta_1\sigma_w}{\sigma_v\psi(1)}\frac{\int_0^1 X_c^*(r)dW_w(r)}{\int_0^1 X_c^*(r)^2dr}-\frac{\beta_1\sigma_w^2}{\sigma_v{}^2\psi^2(1)\int_0^1 X_c^*(r)^2dr}$$

但し、$\mathrm{P}_2(r)$、$X_c^*(r)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$\text{(61)}\quad \mathrm{P}_2(r)=1-\frac{\int_0^1 X_c^0(r)dr}{\int_0^1 X_c^0(r)^2dr}X_c{}^0(r)$$

$$\text{(62)}\quad X_c^*(r)=X_c^0(r)-\int_0^1 X_c^0(r)dr$$

$X_c^*(r)$ は平均を差し引いたO−U過程である。上記した性質(i)がここでも同様に成立し、観測誤差がない場合には拙稿［5］の結果と一致することが分かる。

V I(d)過程($d\geqq 1$)に従う独立変数が観測誤差を伴う場合について

以下の分析に次の補題2が有効である。

補題2 [2)]

$d>\frac{1}{2}$ の場合、$\mathrm{T}\to\infty$ のとき以下の(i)〜(iv)が成立する。

但し、$F_{d-1}(r)$ は次式で定義される $(d-1)$ 重和分ブラウン運動である。

$$\text{(63)}\quad F_{d-1}(r)=\frac{\sigma_v\psi(1)}{\Gamma(d)}\int_0^r(r-s)^{d-1}dW_v(\mathrm{s})$$

(i) $\frac{1}{T^{d-\frac{1}{2}}}\sum x_{[tr]}^0\Rightarrow F_{d-1}(r)$

(ii) $\frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^T x_t^0\Rightarrow\int_0^1 F_{d-1}(r)dr$

(iii) $\frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^T x_t^{02}\Rightarrow\int_0^1 F_{d-1}^2(r)dr$

2) 杉原〔4〕参照。

(iv)　$\frac{1}{T^d}\sum_{t=1}^{T} x_t^0 u_t \Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\int_0^1 F_{d-1}(r)dW_\varepsilon(r)$

なお、補題2は $d>\frac{1}{2}$ の場合に成立するが（$d=\frac{1}{2}$ の場合は別の規格化が必要である。）、観測誤差を伴う場合には、以下の導出過程から明らかになる様に $d\geqq1$ であることが必要となるため、本稿では $d\geqq1$ の場合について考察することに注意しておきたい。

さて、この場合、規格化行列 D_3

(64)　$D_3=Diag(T^{\frac{1}{2}},\ T^d)$

を用いて，

(65)　$D_3(\hat{\theta}-\theta)=(D_3^{-1}X'XD_3^{-1})^{-1}D_3^{-1}X'\xi$

を考える。補題2を用いれば $D_3^{-1}X'XD_3^{-1}$, $D_3^{-1}X'\xi$ を構成する部分について $T\to\infty$ のとき次式が成立することがわかる。

(66)
$$D^{-1}X^{0\prime}X^0D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t{}^0 \\ \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t{}^0 & \frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^{T}x_t{}^{02} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 \mathrm{F}_{d-1}(r)dr \\ \int_0^1 F_{d-1}(r)dr & \int_0^1 \mathrm{F}_{d-1}(r)^2dr \end{pmatrix}$$
$$\equiv \mathrm{H}_3$$

(67)
$$D^{-1}X^0u=\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_t,\ \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t^0u_t\right)'$$
$$\Rightarrow\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\left(W_\varepsilon(1),\ \int_0^1\mathrm{F}_{d-1}(r)dW_\varepsilon(r)\right)'$$
$$\equiv\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\mathrm{K}_3$$

(68)　$$D^{-1}X^{0\prime}W\theta=\beta_1\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}w_t,\ \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_t^0w_t\right)'$$
$$\Rightarrow\beta_1\sigma_w\left(W_w(1),\ \int_0^1\mathrm{F}_{d-1}(r)dW_w(r)\right)'$$
$$\equiv\beta_1\sigma_w\mathrm{K}_3{}^*$$

また、$D^{-1}W'W\theta$ については次式が成立する。

(69)　$$D^{-1}W'W\theta=\beta_1\left(0,\ \frac{1}{T^d}\sum_{t=1}^{T}w_t^2\right)'$$
$$\xrightarrow{p}(0,\ \beta_1\sigma_w^2)'\delta_{1d}$$

ここで δ_{1d} はクロネッカーのデルタであり

(70)　$$\delta_{1d}=\begin{cases}1 & d=1\\ 0 & d\neq 1(d>1)\end{cases}$$

を意味する。

以下の部分については、それらの $T\to\infty$ のときの確率極限はいずれもゼロベクトルないしゼロ行列となる。

(71)　$$D^{-1}X^{0\prime}WD^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}w_t\\ 0 & \frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^{T}x_t^0w_t\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{p}0$$

(72)　$$D^{-1}W'WD^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^{T}w_t^2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{p}0$$

(73)　$$D^{-1}W'u=\left(0,\ \frac{1}{T^{d+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}v_tu_t\right)'$$
$$\xrightarrow{p}0$$

従って、以上をもとにすれば、次の定理2が成立することが明らかになる。

定理 2　(x_t^0 が I(d) 過程 ($d \geqq 1$) に従う場合) 独立変数が観測誤差を伴う(21)、(22)式で表わされるモデルの θ の OLS $\hat{\theta}$ について、仮定 1－(c)、仮定 2、仮定 3 の下で $T \to \infty$ のとき次式が成立する。

(74)　$$D_3(\hat{\theta}-\theta) \Rightarrow \mathrm{H}_3^{-1}\left(\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\mathrm{K}_3-\beta_1\sigma_w\mathrm{K}_3^*-(0,\ \beta_1\sigma_w{}^2)'\delta_{1d}\right)'$$

上記定理 2 より以下の諸性質が明らかになる。

(i)　独立変数 $x_t{}^0$ が I(d) 過程 $d \geqq 1$) に従い、観測誤差のある場合には、ない場合と比較して、$d=1$ の場合には(74)式右辺の括弧の中身の第 2 、3 項が加わる点が、また $d>1$ の場合には第 2 項が加わる点が異なる。観測誤差がなければ $\sigma_w=0$ ($\sigma_w^2=0$) となるから、これらの項は 0 となり、拙稿 [5] の結果と一致する。また特に $d=1$ の場合の結果は、V 節で $c=0$ とした結果と一致する。

(ii)　独立変数が I(d) 過程 ($d \geqq 1$) に従う場合、$\hat{\beta}_0-\beta_0$ 及び $\hat{\beta}_1-\beta_1$ の確率オーダは $\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\right)$、$\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{T^d}\right)$ であり、独立変数が定常過程に従う場合と異なり、near I(1)過程に従う場合と同様に観測誤差があっても $\hat{\beta}_0$、$\hat{\beta}_1$ は共に β_0、β_1 の一致推定量となる。

(iii)　$D_3(\hat{\theta}-\theta)$ の 2 つの個別の要素について、$T \to \infty$ のとき次の関係式が成立する。

(75)　$$T^{\frac{1}{2}}(\hat{\beta}_0-\beta_0) \Rightarrow \frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\frac{\int_0^1 \mathrm{P}_3(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 \mathrm{P}_3^2(r)dr} - \beta_1\sigma_w\frac{\int_0^1 \mathrm{P}_3(r)dW_w(r)}{\int_0^1 \mathrm{P}_3^2(r)dr}$$

$$+\beta_1\sigma_w^2\frac{\dfrac{\int_0^1 \mathrm{F}_{d-1}(r)dr}{\int_0^1 \mathrm{F}_{d-1}(r)^2dr}}{\int_0^1 \mathrm{P}_3(r)^2dr}\delta_{1d}$$

$$(76)\quad T^d(\hat{\beta}_1-\beta_1)\Rightarrow\frac{\sigma_\varepsilon}{\phi(1)}\frac{\int_0^1 \mathrm{F}^*_{d-1}(r)dW_\varepsilon(r)}{\int_0^1 \mathrm{F}^*_{d-1}(r)^2dr}$$

$$-\beta_1\sigma_w\frac{\int_0^1 \mathrm{F}^*_{d-1}(r)dW_w(r)}{\int_0^1 \mathrm{F}^*_{d-1}(r)^2dr}$$

$$-\beta_1\sigma_w^2\frac{1}{\int_0^1 \mathrm{F}^*_{d-1}(r)^2dr}\delta_{1d}$$

但し、$\mathrm{P}_3(r)$、$\mathrm{F}^*_{d-1}(r)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$(77)\quad \mathrm{P}_3(r)=1-\frac{\int_0^1 \mathrm{F}_{d-1}(r)dr}{\int_0^1 \mathrm{F}_{d-1}(r)^2dr}F_{d-1}(r)$$

$$(78)\quad F^*_{d-1}(r)=F_{d-1}(r)-\int_0^1 \mathrm{F}_{d-1}(r)dr$$

$F^*_{d-1}(r)$ は平均を差し引いた $(d-1)$ 重ブラウン運動である。

ここでも上記した性質(i)が同様に成立し、観測誤差がない場合には拙稿［5］の結果と一致することが分かる。

VI　おわりに

本稿では(i)定常 AR(1)過程、(ii)near I(1)過程、(iii) I(d)過程（$d\geqq 1$）に従う独立変数が観測誤差を伴い、かつ誤差項がこれとは独立に定常 AR(1)過程に従う時系列一回帰モデルを取り上げて、パラメータの OLS の漸近的性質を明らかにし、拙稿［5］の結果との比較検討を行った。

本稿では独立変数のみが観測誤差を伴って観測される場合について考察したのであるが、これとは別に、従属変数のみ、ないし独立変数と従属変数が

共に観測誤差を伴って観測される場合が考えられる。このうち特に前者の場合については、モデルを拙稿［5］で取り扱ったモデルに変換すれば、拙稿［5］と同一の結果を得ることが出来る。また後者の場合には本稿と同様の性質が成立することを示すことが出来る。

なお、本稿ではOLSを中心に考察したのであるが、これとは別に誤差項の系列的相関構造を考慮したパラメータの（実行可能）GLS（一般化最小2乗推定量）等についても考察する事が必要であろう。さらに、本稿で明らかにした性質はいずれも漸近的性質であり、標本の大きさが有限な場合の推定量の小標本特性についても別途考察する必要がある。これらの問題についてはいずれも今後の研究課題としたい。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

参考文献

[1] Billingsley, P. (1999), *Convergence of Probability Measures (2nd ed.)*, John Wiley, New York.

[2] Phillips, P.C.B.(1987), "Towards a Unified Asymptotic Theory for Autoregression," Biometrika, 74, 535-547.

[3] Sugihara, S. (1984), "Statistical Estimation of Linear Regression Model with Serially Correlated and Uncorrelated Error Term," Kwansei Gakuin University Annual Studies, Vol 33.

[4] 杉原左右一、(1998), "Least Squares Estimation of the Regression Model with I (d) Regressor," 日本統計学会講演報告集.

[5] 杉原左右一、(2001),『時系列－回帰モデルに於けるOLSとGLSの漸近的性質について』, 商学論究、第49巻第1号.