微分ゲームにおけるシュタッケルベルク均衡 I

著者	藤原 憲二
雑誌名	経済学論究
巻	66
号	3
ページ	163-172
発行年	2012-12-10
URL	http://hdl.handle.net/10236/10792

微分ゲームにおける シュタッケルベルク均衡 I

Stackelberg Equilibria in a Differential Game I

藤　原　憲　二

We offer a series of detailed accounts of the Stackelberg equilibrium solutions in differential games. The present paper focuses on the open-loop Stackelberg equilibrium that has been extensively employed in the application literature, e.g., optimal capital taxation. After formally computing the open-loop Stackelberg equilibrium for a simple leader-follower model in which the welfare-maximizing government leads and the monopolistic firm follows, we discuss the time inconsistency problem that inevitably arises in the open-loop model.

Kenji Fujiwara

JEL：C73

キーワード：微分ゲーム、オープンループ・シュタッケルベルク均衡、時間整合性

Keywords：dynamic game, open-loop Stackelberg equilibrium, time consistency

1　導入

筆者は藤原 (2009) において汚染的寡占の微分ゲーム・モデルを提示し、微分ゲームの解概念とその解き方を解説した。そこで考えた解は全てプレーヤーが同時に戦略を決めるナッシュ均衡であった。しかし扱う問題によっては先導者と追随者の戦略決定に時間差があるシュタッケルベルク均衡を考える方が適切な場合がある。その典型例は政府を先導者、民間を追随者とする政策ゲームである。財政学における最適（資本）課税論の文献では Chamley (1986)、Judd (1985)、Kemp, Long and Shimomura (1993)、Mino (2001) などがこ

の仮定を採っている。

だが微分ゲームの文脈におけるシュタッケルベルク均衡に関する統一的な邦語の解説論文は筆者の知る限りない。他方、英語文献では Basar and Olsder (1985) が詳細に解説しているが藤原 (2009) でも述べたように本書は数学書であり記述が極めて抽象的かつ難解である。Dockner et al. (2000)、Long (2010) には上述の最適課税論の例が載っているが、3 つの解の比較はしていない。以上の理由から本稿では微分ゲームにおける 3 つのシュタッケルベルク均衡を具体的に計算しながら求め、その比較を行うことでシュタッケルベルク均衡の理解を深めることを目指す。筆者は近時 Ngo Van Long マギル大学教授との共同研究において微分ゲームにおけるシュタッケルベルク均衡の経済学への応用可能性を探ってきた[1)]。本稿はその成果を反映したものである。

使うモデルは次の通りである。ある財の独占企業がいて、この企業は自らの利潤の割引現在価値を最大化するように生産量の時間流列を決める。市場が独占化されているため政府がこの企業に生産補助金を与え、独占（過少生産）から生じる歪み（ディストーション）を是正しようとする。ただしその補助金率は経済厚生の割引現在価値を最大化するように決める。ここで状態変数は財価格で、価格はその期の超過需要が正であれば上昇し、負であれば低下するという意味で瞬時的に調整されない硬直性を持っているとする。そのことも考慮に入れて政府と独占企業は補助金率と生産量を決める。なお手番は政府が先導者で、独占企業が追随者であるとする。

第 2 節では上述のモデルを数学的に定式化する。以後はそのモデルのシュタッケルベルク解を求めるが、第 3 節はオープンループ・シュタッケルベルク均衡を導出し、第 4 節で微分ゲームの文脈での時間不整合性問題について説明する。第 5 節で結論する。フィードバック・シュタッケルベルク均衡についてはさらに 2 つの解概念を定義でき、それだけでかなりの紙幅を要するので別稿に譲る。

1) その成果の中間結果は Fujiwara and Long (2011, 2012)、Fujiwara (2012) として発表された。

2 モデル

不要な抽象さを避けるために藤原 (2009) 同様、単純な経済モデルを用いて微分ゲームにおけるシュタッケルベルク均衡を考える。今、ある財の需要が $a-p$ で与えられるとする。ここで $a>0$ は時間を通じて変化しない定数、p は価格を表す[2)]。この財を生産する独占企業がいて、その生産量を x で表し生産費用は $cx+x^2/2$ で与えられる。他方、この経済には政府がいて独占によるディストーションを是正すべく 1 単位生産量当たり s の生産補助金を与える。よって独占企業の瞬時的利潤 π は次のように定義される。

$$\pi \equiv (p-c+s)x - \frac{x^2}{2}.$$

政府の瞬時的な目的関数は消費者余剰と独占企業の利潤の合計から生産補助金による支出を引いた経済厚生 W として定義する：

$$\begin{aligned} W &\equiv \frac{(a-p)^2}{2} + (p-c+s)x - \frac{x^2}{2} - sx \\ &= \frac{(a-p)^2}{2} + (p-c)x - \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

我々のモデルが静学モデルと大きく違うのは価格が硬直的であることである。具体的には価格はその時点における超過需要 $a-p-x$ が正ならば上昇し、負ならば低下するという価格調整を考える[3)]：

$$\dot{p} = k(a-p-x), \quad k>0. \tag{2}$$

以上から各プレーヤーの最大化問題は次のような動学最適化問題として定式化される。

$$\begin{aligned} \text{独占企業：} \quad & \max_x \int_0^\infty e^{-rt}\pi dt \\ \text{政府：} \quad & \max_s \int_0^\infty e^{-rt}W dt \\ & \text{s.t. } \dot{p} = k(a-p-x). \end{aligned}$$

2) 厳密には p は $p(t)$ を時間の関数であることを明示すべきだが、混乱が生じない限り t を省いた表記を使う。

3) この想定は元々は寡占モデルにおいて Simaan and Takayama (1978) に始まり、Fershtman and Kamien (1987)、Tsutsui and Mino (1990)、Fujiwara (2006, 2009) らが援用したものである。

ここで $r > 0$ は一定の割引率で企業・政府ともに共通であるとする。

ゲームの手番は政府が先導者として先に s を決め、企業が追随者として x を決める。このゲームは連続時間・無限視野の形をとっているために教科書的なシュタッケルベルク・ゲームとはかなり見た目に違いがあるが解く手順は後向き帰納法で解けばよい。つまりまず追随者の最大化問題を解き、その解（反応関数）が追随者の戦略であることを考慮した上で先導者の最大化問題を解く。以下ではまず導出が易しいオープンループ・シュタッケルベルク均衡を導出する。

3 オープンループ・シュタッケルベルク均衡

既存文献においてはナッシュ均衡であれシュタッケルベルク均衡であれオープンループ解が最初に用いられてきた。オープンループ解あるいはオープンループ戦略とは全てのプレーヤーが問題の期首（0 時点）に以後の変数を全て決めてしまい、以後は最初に決めた行動を忠実に実行するという戦略である。この定義から全てのプレーヤーは最大値原理を用いて問題を解く。以下でそれを具体的に例示する。

まず追随者である独占企業の最適化条件を導出しよう。政府の決める補助金率 s を所与とすると独占企業のハミルトン関数は

$$H^M = (p - c + s)x - \frac{x^2}{2} + \lambda k(a - x - p),$$

となり、ここで H^M は独占企業のハミルトン関数、λ は独占企業の共役変数を表す。最大値原理から最適化の 1 階条件は次のようになる。

$$0 = p - c + s - x - \lambda k \tag{3}$$

$$\dot{\lambda} = (r + k)\lambda - x \tag{4}$$

$$\dot{p} = k(a - x - p) \tag{5}$$

$$0 = \lim_{t \to \infty} e^{-rt}\lambda p.$$

(3) を (4), (5) に代入して x を消去すると次の 2 本の微分方程式が得られる。

$$\dot{\lambda} = (r+2k)\lambda - p - s + c \tag{6}$$

$$\dot{p} = k(k\lambda - 2p - s + a + c). \tag{7}$$

これで追随者である独占企業の行動を記述できたので、次に先導者である政府の行動を記述する。(3) を政府の瞬時的目的関数である (1) に代入すると次のようになる。

$$W = \frac{(a-p)^2}{2} + \frac{(p-c-s+k\lambda)(p-c+s-k\lambda)}{2}.$$

従って政府の問題は次のように定式化できる。

$$\max_s \int_0^\infty e^{-rt}\left[\frac{(a-p)^2}{2} + \frac{(p-c-s+k\lambda)(p-c+s-k\lambda)}{2}\right]dt$$
$$\text{s.t. } (6) \quad \text{and} \quad (7).$$

今、(6) にかかる共役変数を μ、(7) にかかる共役変数を ν とすると政府のハミルトン関数 H^G は次のようになる。

$$\begin{aligned} H^G = {} & \frac{(a-p)^2}{2} + \frac{(p-c-s+k\lambda)(p-c+s-k\lambda)}{2} \\ & + \mu[(r+2k)\lambda - p - s + c] + \nu k(k\lambda - 2p - s + a + c). \end{aligned}$$

この問題の最適化の 1 階条件は次のように得られる。

$$0 = -s + k\lambda - \mu - k\nu \tag{8}$$

$$\dot{\mu} = -k\mu \tag{9}$$

$$\dot{\nu} = \mu + (r+2k)\nu - 2p + a + c \tag{10}$$

$$\dot{\lambda} = \mu + k\nu + (r+k)\lambda - p + c \tag{11}$$

$$\dot{p} = k(\mu + k\nu - 2p + a + c) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} e^{-rt}\mu\lambda = \lim_{t\to\infty} e^{-rt}\nu p \\ 0 &= \mu(0). \end{aligned} \tag{13}$$

なおここで (9)-(12) は (8) を使って s を消去して整理した後の式を書いている。(9)-(12) は 2 つのジャンプ変数 μ, ν と 2 つの状態変数 λ, p からなる連立微分方程式であり、行列表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\lambda} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r+2k & 0 & -2 \\ 1 & k & r+k & -1 \\ k & k^2 & 0 & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \\ \lambda \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a+c \\ c \\ k(a+c) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

この連立微分方程式は定数係数の 1 階微分方程式から成りたっているから明示的に解を求めることができる。そこで解を求めるためにまず y を固有値として、右辺の係数行列から作られる固有方程式を立てると

$$\begin{vmatrix} -k-y & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r+2k-y & 0 & -2 \\ 1 & k & r+k-y & -1 \\ k & k^2 & 0 & -2k-y \end{vmatrix}$$
$$= (-k-y)(r+k-y)\left[y^2 - ry - 2k(r+k)\right] = 0,$$

となるから 4 個の異なる実数である固有値が次のように求められる。

$$y = -k, \frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}, r+k, \frac{r+\sqrt{\Phi}}{2}, \quad \text{ここで} \quad \Phi \equiv r^2 + 8k(r+k) > 0.$$

これらの固有値のうち最初の 2 つは負、あとの 2 つは正であり、ジャンプ変数が 2 つ、状態変数が 2 つであったことを考慮に入れると、定常状態は鞍点安定であることが分かる。

次にそれぞれの変数の定常状態値を求める。(14) の左辺をゼロベクトルとおくことでできる連立方程式を μ, ν, λ, p について解くと定常状態値（変数の上にバーをおく）が次のように得られる。

$$\overline{\mu} = 0, \quad \overline{\nu} = 0, \quad \overline{\lambda} = \frac{a+3c}{2(r+k)}, \quad \overline{p} = \frac{a+c}{2}.$$

よって 4 つの変数の明示的な解は次のように求められる。

$$\mu(t) = A_1 e^{-kt} + B_1 e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + C_1 e^{(r+k)t} + D_1 e^{\frac{r+\sqrt{\Phi}}{2}t} \tag{15}$$

$$\nu(t) = A_2 e^{-kt} + B_2 e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + C_2 e^{(r+k)t} + D_2 e^{\frac{r+\sqrt{\Phi}}{2}t} \tag{16}$$

$$\lambda(t) = A_3 e^{-kt} + B_3 e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + C_3 e^{(r+k)t} + D_3 e^{\frac{r+\sqrt{\Phi}}{2}t} + \frac{a+3c}{2(r+k)} \tag{17}$$

$$p(t) = A_4 e^{-kt} + B_4 e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + C_4 e^{(r+k)t} + D_4 e^{\frac{r+\sqrt{\Phi}}{2}t} + \frac{a+c}{2}. \tag{18}$$

ここで $A_i, B_i, C_i, D_i, i = 1, 2, 3, 4$ はこれから決める任意定数であり、初期条件から決められる。

モデルがより複雑な場合はこれらの A_i, B_i, C_i, D_i を明示的に求めるのは非常に難しいが、今のモデルでは非常に簡単に求めることができる。まず $\mu(t)$ については (15) のように与えられるわけだが、(9) をよく見ると直ちに

$$\mu(t) = \mu(0)e^{-kt},$$

となることが分かる。しかも横断条件 (13) を加味すると $\mu(t) = 0$ となる。この結果は非常に重要なので他の変数の解を求めた後に次節で検討する。

固有値が $-k$ であるときの固有ベクトルを求めることによって

$$A_1 : 任意, \quad A_2 = \frac{A_1}{r+k}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = \frac{(r+2k)A_1}{r+k},$$

となる。だがすでに $A_1 = \mu(0) = 0$ であることが分かっているから、結局 A_2 や A_4 もゼロになる。

次に t を ∞ に飛ばしたときの各変数は定常状態値に収束しなければならないが、3 つ目と 4 つ目の固有値 $r+k, \left(r+\sqrt{\Phi}\right)/2$ がともに正であることから、収束のためには $C_i, D_i, i = 1, 2, 3, 4$ は全てゼロにならなくてはならない。以上より (15)-(18) は次のように単純化される。

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= 0 \\
\nu(t) &= B_2 e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} \\
\lambda(t) &= B_3 e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + \frac{a+3c}{2(r+k)} \\
p(t) &= B_4 e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + \frac{a+c}{2}.
\end{aligned}$$

後は t をゼロとおいて B_2, B_3, B_4 を求めると最終的にこれらの解は次のようになる。

$$\mu(t) = 0 \tag{19}$$

$$\nu(t) = \mu(0)e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} \tag{20}$$

$$\lambda(t) = \left[\lambda(0) - \frac{a+3c}{2(r+k)}\right] e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + \frac{a+3c}{2(r+k)} \tag{21}$$

$$p(t) = \left[p(0) - \frac{a+c}{2}\right] e^{\frac{r-\sqrt{\Phi}}{2}t} + \frac{a+c}{2}. \tag{22}$$

これがこのモデルにおけるオープンループ・シュタッケルベルク均衡である。

4 時間整合性

前節では各プレーヤーの行動をできるだけ丁寧に記述しながら、オープンループ・シュタッケルベルク均衡を明示的に求めた。以上の導出方法から分かるようにオープンループ・シュタッケルベルク均衡を求めるのに必要な数学的知識は多くなく、ハミルトン関数を使った動学最適化理論だけである。また関数形が今のモデルのように特定化されていれば、定数係数の連立微分方程式の解法をそのまま適用することで明示的な解の経路まで求めることができる。この簡便さが文献でもよく使われてきた理由であるが、同時に時間不整合性という理論的な問題点があることもよく知られている。本節ではそれについて説明する。

時間整合性を論じる上で鍵となるのは先導者の問題の最適化条件にある横断条件 (13) である。この条件の直観的な意味は次の通りである。最適化理論においてよく知られているように共役変数 $\mu(t)$ は t 時点における状態変数 $p(t)$ を所与としたときの λ のシャドープライスを表す。すなわち t 時点から ∞ までの先導者の利得の割引現在価値を $V(p(t),\lambda(t))$ と表すと

$$\mu(t) = \frac{\partial V(p(t),\lambda(t))}{\partial \lambda(t)}.$$

という関係が成り立つ。この関係はゼロ時点でも成立しなければならないから横断条件 (13) は

$$\mu(0) = \left.\frac{\partial V(p(t),\lambda(t))}{\partial \lambda(t)}\right|_{t=0} = 0,$$

ということを要求する。既述のように $\lambda(0)$ は先導者が問題を解く際には状態変数として扱うが、その初期値は歴史的に与えられたものではなく先導者の利得のゼロ時点から ∞ までの割引現在価値を最大化するように選ばれるはずである[4)]。するとそのための 1 階条件は上式のようになっていなければならない。つまり $\mu(0) = 0$ とは $\lambda(0)$ を先導者の利得の割引現在価値を最大化する

4) 歴史的に与えられた初期値は $p(0)$ だけである。

ように選んだ結果の 1 階条件にほかならない。

しかし t 時点に立って再び先導者が問題を解き直したときにも同様の条件が成り立っていければならない。今のモデルでは均衡において (19) が示すようにたまたま $\mu(t)=0$ が任意の t について成立するのでこの要求を満たしている。これは μ の微分方程式が (9) のように他の変数に依存しない特別な形になったからであり、一般にこの結論は保証されない。そのようなときには横断条件から $\mu(t)=0$ でなければならないのに、ゼロ時点に解いた問題の解が $\mu(t)\neq 0$ となってしまい、これは期首に解いて得た解が後になると守られなくなることを表す。これが時間不整合性の問題と呼ばれるものである。

5 結論

本稿では微分ゲームにおけるシュタッケルベルク均衡解のうち、扱いが最も易しいオープンループ・シュタッケルベルク均衡について解説してきた。この解は経済政策の場面で非常によく応用されており、数学的な煩雑さを最小限にとどめながら静学ゲームとの違いを示すことができるという利点がある。しかし前節で詳説したようにこの解には常に時間不整合性の問題がつきまとう。この問題を解消する一般的な方法は現時点でも不明だが、ひとつの方法は各プレーヤーの瞬時的な利得が状態変数に関して線形（1 次）になっていることである。もうひとつの方法はフィードバック・シュタッケルベルク均衡を考えることであるが、それについては次稿に委ねる。

参考文献

[1] Basar, T. and G. J. Olsder (1995), *Dynamic Noncooperative Game Theory*, London: Academic Press.

[2] Chamley, C. (1986), ‘Optimal Taxation of Capital Income in General Equilibrium with Infinite Lives,’ *Econometrica*, 54(3), pp. 607-622.

[3] Dockner, E. J., S. Jorgensen, N. V. Long and G. Sorger (2000), *Differential Games in Economics and Management Science*, Cambridge: Cambridge University Press.

[4] Fershtman, C. and M. I. Kamien (1987), 'Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices,' *Econometrica*, 55(5), pp. 1151-1164.

[5] Fujiwara, K. (2006), 'A Stackelberg Game Model of Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices,' *Economics Bulletin*, 12, pp. 1-9.

[6] Fujiwara, K. (2009), 'Gains from Trade in a Differential Game Model of Asymmetric Oligopoly,' *Review of International Economics*, 17(5), pp. 1066-1073.

[7] Fujiwara, K. (2012), 'Voracity, Growth, and Welfare,' *Economics Letters*, 116(1), pp. 11-14.

[8] Fujiwara, K. and N. V. Long (2011), 'Welfare Implications of Leadership in a Resource Market under Bilateral Monopoly,' *Dynamic Games and Applications*, 1(4), pp. 479-497.

[9] Fujiwara, K. and N. V. Long (2012), 'Optimal Tariffs on Exhaustible Resources: The Case of Quantity-Setting,' *International Game Theory Review*, forthcoming.

[10] Judd, K. L. (1985), 'Redistributive Taxation in a Simple Perfect Foresight Model,' *Journal of Public Economics*, 28(1), pp. 59-83.

[11] Kemp, M. C., N. V. Long and K. Shimomura (1993), 'Cyclical and Noncyclical Redistributive Taxation,' *International Economic Review*, 34(2), pp. 415-429.

[12] Long, N. V. (2010), *A Survey of Dynamic Games in Economics*, Singapore: World Scientific Pub Co.

[13] Mino, K. (2001), 'Optimal Taxation in Dynamic Economies with Increasing Returns,' *Japan and the World Economy*, 13(3), pp. 235-253.

[14] Simaan, M. and T. Takayama (1978), 'Game Theory Applied to Dynamic Duopoly Problems with Production Constraints,' *Automatica*, 14, pp. 161-166.

[15] Tsutsui, S. and K. Mino (1990), 'Nonlinear Strategies in Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices,' *Journal of Economic Theory*, 52, pp. 136-161.

[16] 藤原　憲二 (2009),「汚染的寡占の微分ゲーム分析」, 経済学論究, 63(3), pp. 499-515.