SUR ファイナンシャル時系列モデルとその統計的推定
—独立変数が I(d) 過程 ($d > \frac{1}{2}$) に従う場合について—

杉　原　左右一

I　はじめに

Granger and Joyeux [1980]、Hosking [1981] 等を端緒として所謂長期記憶 (long memory) の特性を持つ定常時系列の統計的分析が盛んに行なわれる様になったが、これと共に最近特にファイナンシャル時系列分析の分野を中心として非定常時系列分析の重要性が随所で指摘されている。(例えば Baillie [1996] が参考になろう。)

この様な現状をふまえて、本稿ではファイナンシャル時系列の分析に有効なモデルとして特に独立変数が非定常な I(d) 過程 ($d > \frac{1}{2}$) に従う見かけ上無関係な時系列モデル (Seemingly Unrelated Time Series Model＝SUR 時系列モデル) を取り上げて未知母数の OLS と GLS の極限分布を導出し、それらの統計的諸性質について考察することにしたい。

以下先ずII節で特に2方程式から成る SUR モデルとその仮定について述べ、III節で未知母数の OLS と GLS の漸近的諸性質について考察する。IV節ではII、III節のモデルを n 方程式から成る一般的な SUR モデルに拡張して推定量の漸近的諸性質について考察する。最後のV節は本稿のまとめにあてられる。なお特に $d=1$ の場合については Maekawa and Hisamatsu [1996] によって考察されているが、本稿では d が $d > \frac{1}{2}$ の任意の実数の場合について考察するものである。

II．モデルと仮定

独立変数 x_{1t}、x_{2t} がそれぞれ $I(d_1)$、$I(d_2)$ 過程（d_1、$d_2 > \frac{1}{2}$）に従う次式で表わされる SUR モデル（Seemingley Unrelated Model＝見かけ上無関係なモデル）を考える。

$$(1)\quad y_{it} = \alpha_i + \beta_i x_{it} + u_{it}$$

$$(2)\quad (1-L)^{d_i} x_{it} = w_{it} \qquad w_{it} = \phi_i(L)\varepsilon_{it} \qquad \begin{array}{l} i=1,\ 2 \\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ T \end{array}$$

ここで L はラグ演算子を示す。

上記 SUR モデルに以下の仮定 1、2 を設定する。

仮定 1

$d_i > \frac{1}{2}$, $\phi_i(L) = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_{il} L^l$ $(\phi_{io}=1)$, $\sum_{l=0}^{\infty} l\,|\,\phi_{il}\,| < \infty$, $\phi_i(z)=0$ の根は単位円外にある。$x_{it}=0\,(t \leqq 0)$　$(i=1,\ 2)$

仮定 2

$$(\varepsilon_{1t},\ \varepsilon_{2t})' \sim \mathrm{IID}(0,\ \Sigma_\varepsilon),\ \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon 11} & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon 22} \end{pmatrix}$$

$$(u_{1t},\ u_{2t})' \sim \mathrm{IID}(0,\ \Sigma_u),\ \Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_{u11} & \sigma_{u12} \\ \sigma_{u21} & \sigma_{u22} \end{pmatrix}$$

ε_{1t} と u_{sj} は互いに独立である（i, j=1, 2,　t=1, 2…, T)。

ここで上記仮定 1、2 について若干の注意事項を述べておこう。先ず $d_1, d_2 > \frac{1}{2}$ とし、特に $d_1=d_2=\frac{1}{2}$ の場合（すなわち丁度非定常となる場合）を除外することに注意したい。この場合には下記とは異なった規格化が必要となる。w_{1t}、w_{2t} は通常の仮定を満たす線形過程である。また SUR モデルの特徴として、$(\varepsilon_{1t},\ \varepsilon_{2t})'$ は互いに無相関であるが、$(u_{1t},\ u_{2t})'$ は互いに相関を持ち分散共分散行列を Σ_u とすることに注意したい。なお本稿では単純化して $(u_{1t},\ u_{2t})'$ には系列的相関構造がなく、$(\varepsilon_{1t},\ \varepsilon_{2t})'$ とは独立であるものと仮定する。系列的相関のある場合への拡張は分析がやや複雑になるものの比較的容易に行うことが可能である。

さて以下の分析の便宜のために上記SURモデルを次の様にベクトル・行列表示しておこう。

(3) $y = X\theta + u$

ただし上式で y、X、θ、u はそれぞれ下記で与えられるものとする。

(4) $y = (y_1', y_2')'$, $y_1 = (y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1T})'$, $y_2 = (y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2T})'$

(5) $X = \begin{pmatrix} e & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & x_2 \end{pmatrix}$ $\quad e = (1, 1, \cdots, 1)'$

$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1T})'$

$x_2 = (x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2T})'$

(6) $\theta = (\theta_1', \theta_2')'$ $\quad \theta_1 = (\alpha_1, \beta_1)'$, $\theta_2 = (\alpha_2, \beta_2)'$

(7) $u = (u_1', u_2')'$ $\quad u_1 = (u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1T})'$, $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2T})'$

さて以下では θ の推定量として OLS（Ordinary Least Squares Estimator ＝通常最小 2 乗推定量）と GLS（Generalized Least Squares Estimator＝一般化最小 2 乗推定量）を取り上げ、それらの漸近的諸性質を明らかにすることにしたい。

Ⅲ. OLS と GLS の漸近的諸性質

先ず以下の議論に次の補題が有効である。

補題

$x_{Ti}(r)$ $(0 \leqq r \leqq 1)$ を次式で定義される部分和過程とする。

(8) $$x_{Ti}(r) \equiv \frac{1}{T^{d_i - \frac{1}{2}}} x_{it} + T\left(r - \frac{t}{T}\right) \frac{1}{T^{d_i - \frac{1}{2}}} (x_{it} - x_{i,t-1})$$

$$\left(i = 1, 2, \ \frac{t-1}{T} \leqq r \leqq \frac{t}{T}, \ t = 1, 2, \cdots, T\right)$$

そうすれば次式が成立する。但し記号⇨は関連する確率測度の $T \to \infty$ の場合の弱収束を意味し、$F_{d_i - 1}(r)$ は $(d_i - 1)$ 重和分ブラウン運動である。また $W_{\varepsilon i}(s)$、$W_{uj}(r)$ は確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上で定義された互いに独立な標準ブラウン運動である。(i, j＝1, 2)

(9) $$x_{Ti}(r) \Rightarrow F_{d_i - 1}(r) \equiv \frac{\phi_i(1)\sigma_{\varepsilon 11}^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(d_i)} \int_0^r (r - s)^{d_i - 1} dW_{\varepsilon i}(s)$$

$$\frac{1}{T^{d_i+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_{it}\Rightarrow\int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dr$$

$$\frac{1}{T^{2d_i}}\sum_{t=1}^{T}x_{it}^2\Rightarrow\int_0^1 F_{d_i-1}^2(r)\,dr$$

$$\frac{1}{T^{d_1+d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}\Rightarrow\int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,F_{d_2-1}(r)\,dr$$

$$\frac{1}{T^{d_i}}\sum_{t=1}^{T}x_{it}\,u_{jt}\Rightarrow\sigma_{uij}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dW_{uj}(r)$$

上記補題は例えば Tanaka [1996] の $d>\frac{1}{2}$ の場合への拡張を与えるものである。

さて先ず初めに θ の推定量として次式で与えられる θ の OLS を考えよう。

(10) $\tilde{\theta}=(X'X)^{-1}X'y$

また次式の行列 D を規格化行列とする。

(11) $D=\mathrm{Diag}(T^{\frac{1}{2}},\ T^{d_1},\ T^{\frac{1}{2}},\ T^{d_2})$

ただし Diag（*）は*を対角要素とする対角行列である。

そうすれば $D(\tilde{\theta}-\theta)$ が

(12) $D(\tilde{\theta}-\theta)=(D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}\ D^{-1}X'u$

と表わせることに注意しよう。上式の $D^{-1}X'XD^{-1}$、$D^{-1}X'u$ について上記補題を用いれば T→∞のとき次式が成立することがわかる。

$$(13)\quad D^{-1}X'XD^{-1}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}\\ \frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t} & \frac{1}{T^{2d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2\end{pmatrix} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}\\ \frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t} & \frac{1}{T^{2d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}^2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}H_{11} & 0\\ 0 & H_{22}\end{pmatrix}\equiv H_0$$

ただし H_{11}、H_{22} はそれぞれ次式で与えられる。

$$(14)\quad H_{11}=\begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dr \\ \int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dr & \int_0^1 F_{d_1-1}^2(r)\,dr \end{pmatrix}$$

$$(15)\quad H_{22}=\begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dr \\ \int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dr & \int_0^1 F_{d_2-1}^2(r)\,dr \end{pmatrix}$$

$$(16)\quad D^{-1}X'u=\begin{pmatrix} \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} u_{1t} \\ \frac{1}{T^{d_1}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t}u_{1t} \\ \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} u_{2t} \\ \frac{1}{T^{d_2}}\sum_{t=1}^{T} x_{2t}u_{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{u11}^{\frac{1}{2}} W_{u1}(1) \\ \sigma_{u11}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dW_{u1}(r) \\ \sigma_{u22}^{\frac{1}{2}} W_{u2}(1) \\ \sigma_{u22}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dW_{u2}(r) \end{pmatrix}$$

$$\equiv K_0$$

したがって $T\to\infty$ のとき次式が成立することがわかる。

$$(17)\quad D(\tilde{\theta}-\theta)\Rightarrow H_0^{-1}K_0$$

なお、$D(\tilde{\theta}-\theta)$ の各成分について次式が成立することに注意したい。

$$(18)\quad T^{\frac{1}{2}}(\tilde{\alpha}_i-\alpha_i)\Rightarrow \sigma_{uii}^{\frac{1}{2}}\frac{\int_0^1 P_i(r)\,dW_{ui}(r)}{\int_0^1 P_i^2(r)\,dr}$$

$$(19)\quad T^{d_i}(\tilde{\beta}_i-\beta_i)\Rightarrow \sigma_{uii}^{\frac{1}{2}}\frac{\int_0^1 F_{d_i-1}^{*}(r)\,dW_{ui}(r)}{\int_0^1 F_{d_i-1}^{*}(r)\,dr}$$

ただし上式で $P_i(r)$、$F_{d_i-1}^{*}(r)$ はそれぞれ以下で与えられる。

$$(20)\quad P_i(r) \equiv 1 - \left(\frac{\int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dr}{\int_0^1 F_{d_i-1}^2(r)\,dr} \right) F_{d_i-1}(r)$$

$$(21)\quad F_{d_i-1}^*(r) \equiv F_{d_i-1}(r) - \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dr$$

次にθの実行可能GLS (feasible GLS) を求めよう。そのためにΣ_uの一致推定量$\tilde{\Sigma}_u$を次の様にして求めよう。先ずθ_iのOLSを$\tilde{\theta}_i$とすれば、(10) 式より

$$(22)\quad \tilde{\theta}_i = (X_{ii}' X_{ii})^{-1} X_{ii}' y_i$$

となる。ただし

$$(23)\quad X_{ii} = (e, x_i)$$

である。したがって残差ベクトル$\tilde{u}_i$を求めれば、M_{ii}を

$$(24)\quad M_{ii} = I_T - X_{ii}(X_{ii}' X_{ii})^{-1} X_{ii}'$$

として

$$(25)\quad \tilde{u}_i = M_{ii} y_i = M_{ii} u_i$$

となる。そこで$\tilde{\sigma}_{uii}$、$\tilde{\sigma}_{uij}$を次式により推定しよう。

$$(26)\quad \tilde{\sigma}_{uii} = \frac{1}{T-2} \tilde{u}_i' \tilde{u}_i$$

$$(27)\quad \tilde{\sigma}_{uij} = \frac{1}{T-2} \tilde{u}_i' \tilde{u}_j$$

また$\tilde{\Sigma}_u$を

$$(28)\quad \tilde{\Sigma}_u = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{u11} & \tilde{\sigma}_{u12} \\ \tilde{\sigma}_{u12} & \tilde{\sigma}_{u22} \end{pmatrix}$$

と表わす。

ここで規格化行列D_iを

$$(29)\quad D_i = \mathrm{Diag}(T^{\frac{1}{2}}, T^{d_i})$$

と定義すれば、上記$\tilde{\sigma}_{uii}$、$\tilde{\sigma}_{uij}$をそれぞれ次式の様に表現できることがわかる。

$$(30)\quad \tilde{\sigma}_{uii} = \frac{1}{T-2} \tilde{u}_i' \tilde{u}_i$$

$$= \frac{1}{T-2} u_i' M_{ii} u_i$$

$$= \frac{1}{T-2} \left[u_i' u_i - (D_i^{-1} X_{ii}' u_i)' (D_i^{-1} X_{ii}' x_{ii} D_i^{-1})^{-1} (D_i^{-1} x_{ii}' u_i) \right]$$

$$(31) \quad \tilde{\sigma}_{uij} = \frac{1}{T-2} \tilde{u}_i' \tilde{u}_j$$

$$= \frac{1}{T-2} u_i{}' M_{ii}{}' M_{jj} u_j$$

$$= \frac{1}{T-2} \left[u_i' u_j - (D_j^{-1} X_{jj}' u_i)' (D_j^{-1} X_{jj}' X_{jj} D_j^{-1})^{-1} (D_j^{-1} X_{jj}' u_j) \right.$$
$$- (D_i^{-1} X_{ii}' u_i)' (D_i^{-1} X_{ii}' X_{ii} D_i^{-1})^{-1} (D_i^{-1} X_{ii}' u_j)$$
$$+ (D_i^{-1} X_{ii}' u_i)' (D_i^{-1} X_{ii}' X_{ii} D_i^{-1})^{-1} (D_i^{-1} X_{ii}' X_{jj} D_j^{-1})$$
$$\left. (D_j^{-1} X_{jj}' X_{jj} D_j^{-1})^{-1} (D_j^{-1} X_{jj}' u_j) \right]$$

上記 (30)、(31) 式で特に $D_i^{-1}X_{ii}'u_i$、$D_i^{-1}X_{ii}'u_j$、$D_i^{-1}X_{ii}'X_{ii}D_i^{-1}$、$D_i^{-1}X_{ii}'X_{jj}D_j^{-1}$ が次式を満たすことに注意しよう。

$$(32) \quad D_i^{-1} X_{ii}' u_i = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^{T} u_{it} \\ \dfrac{1}{T^{d_i}} \sum_{t=1}^{T} x_{it} u_{it} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{uii}^{\frac{1}{2}} W_{ui}(1) \\ \sigma_{uii}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\, dW_{ui}(r) \end{pmatrix}$$

$$(33) \quad D_i^{-1} X_{ii}' u_j = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \sum_{t=1}^{T} u_{jt} \\ \dfrac{1}{T^{d_i}} \sum_{t=1}^{T} x_{it} u_{jt} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{ujj}^{\frac{1}{2}} W_{uj}(1) \\ \sigma_{ujj}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\, dW_{uj}(r) \end{pmatrix}$$

$$(34)\quad D_i^{-1}X_{ii}'X_{ii}D_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{d_i+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{it} \\ \frac{1}{T^{d_i+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{it} & \frac{1}{T^{2d_i}}\sum_{t=1}^{T} x_{it}^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dr \\ \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dr & \int_0^1 F_{d_i-1}^2(r)\,dr \end{pmatrix}$$

$$(35)\quad D_i^{-1}X_{ii}'X_{jj}D_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{d_j+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{jt} \\ \frac{1}{T^{d_i+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{it} & \frac{1}{T^{d_i+d_j}}\sum_{t=1}^{T} x_{it}x_{jt} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d_j-1}(r)\,dr \\ \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dr & \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,F_{d_j-1}(r)\,dr \end{pmatrix}$$

したがって以上より

$$(36)\quad \operatorname*{plim}_{T\to\infty} \tilde{\Sigma}_u = \Sigma_u$$

が成立することがわかるのである。

さて、上式で求められるΣ_uの一致推定量$\tilde{\Sigma}_u$を用いてθの実行可能GLSを次式で求めることができる。ただし記号$\otimes$は行列のクロネッカー積を意味する。

$$(37)\quad \hat{\theta} = (X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} X)^{-1} X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} y$$

上式より$D(\hat{\theta}-\theta)$が

$$(38)\quad D(\hat{\theta}-\theta) = (D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} XD^{-1})^{-1} D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} u$$

となることに注意しよう。さらに補題を用いれば上式で$D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} XD^{-1}$及び$D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} u$がそれぞれ次式を満たすことがわかる。

$$(39)\quad D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} XD^{-1}$$

$$
=\begin{pmatrix}
\tilde{\sigma}_{u22}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t} \\ \frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t} & \frac{1}{T^{2d_1}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t}^2 \end{pmatrix} & -\tilde{\sigma}_{u12}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} \\ \frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t} & \frac{1}{T^{d_1+d_2}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t}x_{2t} \end{pmatrix} \\
-\tilde{\sigma}_{u12}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{d_1+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t} \\ \frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} & \frac{1}{T^{d_1+d_2}}\sum_{t=1}^{T} x_{1t}x_{2t} \end{pmatrix} & \tilde{\sigma}_{u11}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} \\ \frac{1}{T^{d_2+\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T} x_{2t} & \frac{1}{T^{2d_2}}\sum_{t=1}^{T} x_{2t}^2 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow\begin{pmatrix} \sigma_{u22}H_{11} & -\sigma_{u12}H_{12} \\ -\sigma_{u12}H_{21} & \sigma_{u11}H_{22} \end{pmatrix} \equiv H_G
$$

ただし H_{12}、H_{21} は次式で与えられる。

$$
(40)\quad H_{12}=\begin{pmatrix} 1 & \int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dr \\ \int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dr & \int_0^1 F_{d_1-1}(r)F_{d_2-1}(r)\,dr \end{pmatrix}
$$

$$
(41)\quad H_{21}=H_{12}'
$$

$$
(42)\quad D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}u
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\tilde{\sigma}_{u22}\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_{1t}-\tilde{\sigma}_{u12}\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_{2t} \\
\tilde{\sigma}_{u22}\frac{1}{T^{d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{1t}-\tilde{\sigma}_{u12}\frac{1}{T^{d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{2t} \\
-\tilde{\sigma}_{u12}\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_{1t}+\tilde{\sigma}_{u11}\frac{1}{T^{\frac{1}{2}}}\sum_{t=1}^{T}u_{2t} \\
-\tilde{\sigma}_{u12}\frac{1}{T^{d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{1t}+\tilde{\sigma}_{u11}\frac{1}{T^{d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{2t}
\end{pmatrix}
$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{u22}\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}} W_{u1}(1) - \sigma_{u12}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}} W_{u2}(1) \\ \sigma_{u22}\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dW_{u1}(r) - \sigma_{u12}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dW_{u2}(r) \\ -\sigma_{u12}\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}} W_{u1}(1) + \sigma_{u11}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}} W_{u2}(1) \\ -\sigma_{u12}\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dW_{u1}(r) + \sigma_{u11}\sigma_{u22}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dW_{u2}(r) \end{pmatrix}$$

$$\equiv K_G$$

したがって上記 (38)、(39)、(42) 式より

$$(43) \quad D(\tilde{\theta} - \theta) \Rightarrow H_G^{-1} K_G$$

が成立することがわかる。

以上をまとめれば次の定理を得る。

定理 θ の OLS 及び実行可能 GLS をそれぞれ $\tilde{\theta}$、$\hat{\theta}$ とすれば、$T \to \infty$ のとき $D(\tilde{\theta} - \theta)$、$D(\hat{\theta} - \theta)$ はそれぞれ (17)、(43) 式右辺に弱収束する。特に $\sigma_{uij} = 0\,(i \neq j)$ であれば $D(\tilde{\theta} - \theta) = D(\hat{\theta} - \theta)$ となる。

Ⅳ. モデルの一般化

これまで 2 方程式から成る SUR モデルについて考察したのであるが、最後にこれをより一般の n 方程式の場合に拡張することを考えよう。ただし簡単化のためにここでは定数項のない次式で表わされるモデルを考えることにする。

$$(44) \quad y_{it} = \beta_i x_{it} + u_{it}$$

$$(45) \quad (1-L)^{d_i} x_{it} = w_{it} \qquad w_{it} = \phi_i(L)\,\varepsilon_{it} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ t = 1, 2, \cdots, T \end{matrix}$$

上記 SUR モデルに仮定 1、2′ を設定する。

仮定 2′

$$\varepsilon_t \equiv (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \cdots, \varepsilon_{nt})' \sim \mathrm{IID}(0, \Sigma_\varepsilon),\ \Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon 11} & & & 0 \\ & \sigma_{\varepsilon 22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_{\varepsilon nn} \end{pmatrix}$$

$$u_t \equiv (u_{1t}, u_{2t}, \cdots, u_{nt})' \sim \mathrm{IID}(0, \Sigma_u),\ \Sigma_u = \begin{pmatrix} \sigma_{u11} & \sigma_{u12}, & \cdots, & \sigma_{u1n} \\ & \sigma_{u22}, & \cdots, & \sigma_{u2n} \\ * & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_{unn} \end{pmatrix}$$

ε_{it} と u_{js} は互いに独立である。(i、j=1、2、…、n、t、s=1、2、…、T)

上記モデルを (3) 式と同様に次の様にベクトル・行列表示できる。

(46)　$y = X\theta + u$

ただし y、X、θ、u はそれぞれ以下で与えられる。

(47)　$y = (y_1', y_2', \cdots, y_n')'$　　$y_i = (y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{iT})'$

(48)　$X = \begin{pmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_n \end{pmatrix}$　　$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iT})'$

(49)　$\theta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)'$

(50)　$u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)'$　　$u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \cdots u_{iT})'$

さて前節と同様に θ の OLS 及び GLS を $\tilde{\theta}$、$\hat{\theta}$ で表わそう。

(51)　$\tilde{\theta} = (X'X)^{-1} X'y$

(52)　$\hat{\theta} = (X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} X)^{-1} X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1} y$

ただし $\tilde{\Sigma}_u$は各方程式毎に求められる OLS 残差 $\tilde{u}_i$ をもとにして下記で与えられる Σ_u の推定量である。

(53)　$$\tilde{\Sigma}_u = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{u11}, & \tilde{\sigma}_{u12}, & \cdots \tilde{\sigma}_{u1n} \\ & \tilde{\sigma}_{u22}, & \cdots \tilde{\sigma}_{u2n} \\ * & \ddots & \vdots \\ & & \tilde{\sigma}_{unn} \end{pmatrix}$$

上式で

(54)　$\tilde{\sigma}_{uii} = \dfrac{1}{T-1} \tilde{u}_i' \tilde{u}_i$

(55)　$\tilde{\sigma}_{uij} = \dfrac{1}{T-1} \tilde{u}_i' \tilde{u}_j$

(56)　$\tilde{u}_i = M_{ii} y_i = M_{ii} u_i$,　$M_{ii} = I_T - \dfrac{x_i x_i'}{x_i' x_i}$

であり、$\tilde{\sigma}_{uii}$ 及び $\tilde{\sigma}_{uij}$ は次式で表現できる。

(57) $$\tilde{\sigma}_{uii}=\frac{1}{T-1}u_i'M_{ii}u_i=\frac{1}{T-1}\left(u_i'u_i-\frac{\left(\frac{1}{T^{d_i}}x_i'u_i\right)^2}{\frac{1}{T^{2d_i}}x_i'x_i}\right)$$

(58)

$$\tilde{\sigma}_{uij}=\frac{1}{T-1}u_i'M_{ii}M_{jj}u_j$$
$$=\frac{1}{T-1}\left(u_i'u_j-\frac{\left(\frac{1}{T^{d_j}}x_j'u_i\right)\left(\frac{1}{T^{d_i}}x_j'u_i\right)}{\frac{1}{T^{2d_j}}x_j'x_j}\right.$$
$$\left.\frac{-\left(\frac{1}{T^{d_i}}x_i'u_i\right)\left(\frac{1}{T^{d_i}}x_i'u_i\right)}{\frac{1}{T^{2d_i}}x_i'x_i}+\frac{\left(\frac{1}{T^{d_i}}x_i'u_i\right)\left(\frac{1}{T^{d_i+d_j}}x_i'x_j\right)\left(\frac{1}{T^{d_j}}x_j'u_j\right)}{\left(\frac{1}{T^{2d_i}}x_i'x_i\right)\left(\frac{1}{T^{2d_i}}x_j'x_j\right)}\right)$$

ここで T→∞のとき

(59) $$\frac{1}{T^{d_i}}x_i'u_j \Rightarrow \sigma_{ujj}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dW_{uj}(r)$$

(60) $$\frac{1}{T^{d_i+d_j}}x_i'x_j \Rightarrow \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,F_{d_j-1}(r)\,dr$$

(61) $$\frac{1}{T^{2d_i}}x_i'x_i \Rightarrow \int_0^1 F_{d_i-1}^2(r)\,dr$$

に注意すれば、

(62) $$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\tilde{\Sigma}_u=\Sigma_u$$

となることがわかる。

さて $(\tilde{\theta}-\theta)$ 及び $(\hat{\theta}-\theta)$ の規格化行列を D

(63) $$D=\mathrm{Diag}(T^{d_1},\ T^{d_2},\ \cdots,\ T^{d_n})$$

として

(64) $D(\tilde{\theta}-\theta)=(D^{-1}X'XD^{-1})^{-1}\ D^{-1}X'u$

(65) $D(\hat{\theta}-\theta)=(D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}\ XD^{-1})\ D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}\ u$

を考えよう。そうすれば $D^{-1}X'XD^{-1}$、$D^{-1}X'u$ 及び $D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}XD^{-1}$、$D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}u$ について仮定 1、2′ の下で $T\to\infty$ のときそれぞれ次式が成立することが明らかになる。

(66)

$$D^{-1}X'XD^{-1}=\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{T^{2d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2,\ \frac{1}{T^{2d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}^2,\ \cdots,\ \frac{1}{T^{2d_n}}\sum_{t=1}^{T}x_{nt}^2\right)$$
$$\Rightarrow \mathrm{Diag}\left(\int_0^1 F_{d_1-1}^2(r)\,dr,\ \int_0^1 F_{d_2-1}^2(r)\,dr,\ \cdots,\ \int_0^1 F_{d_n-1}^2(r)\,dr\right)$$
$$\equiv H_0$$

(67)

$$D^{-1}X'u=\left(\frac{1}{T^{d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}u_{1t},\ \frac{1}{T^{d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}u_{2t},\ \cdots,\ \frac{1}{T^{d_n}}\sum_{t=1}^{T}x_{nt}u_{nt}\right)'$$
$$\Rightarrow\left(\sigma_{u11}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dW_{u1}(r),\ \sigma_{u22}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dW_{u2}(r),\ \cdots,\right.$$
$$\left.\sigma_{unn}^{\frac{1}{2}}\int_0^1 F_{d_n-1}(r)\,dW_{un}(r)\right)'$$
$$\equiv K_0$$

(68) $D^{-1}X'\ (\tilde{\Sigma}_u\otimes I_T)^{-1}\ XD^{-1}$

$$=\tilde{\Sigma}_u^{-1}\circledast\begin{pmatrix}\frac{1}{T^{2d_1}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2, & \frac{1}{T^{d_1+d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{2t}, & \cdots, & \frac{1}{T^{d_1+d_n}}\sum_{t=1}^{T}x_{1t}x_{nt}\\ & \frac{1}{T^{2d_2}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}^2, & \cdots, & \frac{1}{T^{d_2+d_n}}\sum_{t=1}^{T}x_{2t}x_{nt}\\ * & & \ddots & \vdots\\ & & & \frac{1}{T^{2d_n}}\sum_{t=1}^{T}x_{nt}^2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Sigma}_u^{-1} \circledast \begin{pmatrix} \int_0^1 F_{d_1-1}^2(r)\,dr, & \int_0^1 F_{d_1-1}(r)F_{d_2-1}(r)\,dr, & \cdots, & \int_0^1 F_{d_1-1}(r)F_{d_n-1}(r)\,dr \\ & \int_0^1 F_{d_2-1}^2(r)\,dr, & \cdots, & \int_0^1 F_{d_2-1}(r)F_{d_n-1}(r)\,dr \\ * & & \ddots & \vdots \\ & & & \int_0^1 F_{d_2-1}^2(r)\,dr \end{pmatrix}$$

$$\equiv H_G$$

(69) $D^{-1}X'(\tilde{\Sigma}_u \otimes I_T)^{-1}\ u$

$$= \left(\frac{1}{T^{d_1}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_u^{1i} \sum_{t=1}^{T} x_{1t} u_{it},\ \frac{1}{T^{d_2}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_u^{2i} \sum_{t=1}^{T} x_{2t} u_{it},\ \cdots,\ \frac{1}{T^{d_n}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\sigma}_u^{ni} \sum_{t=1}^{T} x_{nt} u_{it} \right)'$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_u^{1i} \sigma_{uii}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_1-1}(r)\,dW_{ui}(r),\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_u^{2i} \sigma_{uii}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_2-1}(r)\,dW_{ui}(r),\ \cdots,\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_u^{ni} \sigma_{uii}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 F_{d_n-1}(r)\,dW_{un}(r) \right)'$$

$$\equiv K_G$$

ただし、(68) 式で記号⊛は行列のハダマード積を示す。

したがって $T \to \infty$ のとき

(70) $D(\tilde{\theta} - \theta) \Rightarrow H_0^{-1} K_0$

(71) $D(\hat{\theta} - \theta) \Rightarrow H_G^{-1} K_G$

が成立することがわかる。なお (70) 式を成分表示すれば

$$(72)\quad T^{d_i}(\tilde{\beta}_i - \beta_i) \Rightarrow \frac{\sigma_{uii} \int_0^1 F_{d_i-1}(r)\,dW_{ui}(r)}{\int_0^1 F_{d_i-1}^2(r)\,dr}$$

となる。また特に $\sigma_{uij}=0$ $(i \neq j)$ ならば OLS と GLS が一致することに注意しよう。

V. おわりに

本稿では独立変数が非定常な I (d) 過程 $(d > \frac{1}{2})$ に従う SUR モデルをとり

上げて未知母数の OLS と GLS の極限分布を導出しその諸性質について考察した。

特にファイナンシャル時系列の実証分析に際しては本稿で考察した未知母数の推定問題と並んで次数 d の決定問題が重要な研究課題となる。この問題を含め今後さらに同種のモデルに関する統計理論的な考察を進める所存である。

（筆者は関西学院大学商学部教授）

参考文献

[1] Baillie, R. T. (1996), Long Memory Process and Fractional Integration in Econometrics, Journal of Econometrics, 73, 5–59.

[2] Billingsley, P. (1968), Convergence of Probability Measure, New York, Wiley.

[3] Granger, C. W. J. and R. Joyeux (1980), An Introduction to Long Memory Time Series and Fractional Differencing, Journal of Time Series Analysis 1, 14–29.

[4] Hosking, J. R. M. (1981), Fractional Differencing, Biometrika 68, 165–176.

[5] Maekawa, K. and H. Hisamatsu (1996), SUR Models with I (1) Regressors, 『ネットワーク型パネルデータベースの構築と統計分析の研究』(伴金美編).

[6] Tanaka, K. (1996), Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory, New York, John Wiley.