価格安定下の最適経済成長の可能性

福　尾　洋　一

§0　序

さきに，われわれは，〔3〕において社会的厚生最大化のための貨幣的政策を論じた際に，そこで考察されたモデルにおいては，利子を生まない政府負債としての貨幣と利子を生む政府または民間発行の債券との間の資産選択の問題が明示的には取り上げられていなかったことを付記しておいた．そこで本稿では，政府の貨幣的政策を新たにもう1つ追加することによって，貨幣と債券と実質資本という3つの資産のポートフォリオにおける選択の問題を考慮に入れたモデルを検討する．

ここで考察されるモデル経済系は，民間と政府という選好の全く独立する意思決定主体から成立している．政府は，消費活動も生産活動も行わず，財政金融政策を行使することによって，社会的厚生指標の最大化と価格の安定化という2つの社会的目標を実現しようとする，いわば政策主体である．

以下においてわれわれが論じようとするのは，この2つの政策目標を実現するという意味において最適な財政金融政策（＝最適政策），あるいはその政策に対応する経済諸変数の時間経路（＝最適経路），の存在と一意性などの問題に就いてである．§1では貨幣経済の最適成長モデルを提示する．§2では社会的厚生指標最大化のための条件に言及し，§3では価格安定下の最適経路の存在と一意性に就いて論ずる．§4は結びである．

§1　貨幣経済の最適成長モデル

周知の技術進歩のない場合の新古典派型社会的・単一財生産関数とその特質

次のように書く.

（1）　$y=y(k)$

（2）　$(\forall k>0): y>0,\ y'>0,\ y''<0.$[1]

ここにおいて，y は1人当り実質産出高または1人当り実質所得，k は1人当り実質資本ストックを示している.

このモデル経済系においては，労働力は外生的に与えられる正一定率 ν で成長し，また資本減耗はない．更に，現存労働力と現存資本ストックはすべて雇用される.

技術進歩はないのであるから，現存旧資本財と新規生産の新資本財（＝投資財）の単位価格は等しい．単一財経済においては，特別の事情がないかぎり，投資財価格と消費財価格は均等であろうから，結局ストックである資本財の価格とフローである単一財の価格は等しい.[2]

政府の民間に対する金融上の負債には2種類の形態すなわち貨幣と債券がある．貨幣とは政府のみが発行することのできる利子を生まない負債であり，債券とは政府と民間のいずれもが発行することのできる利子を生む負債のことである．そうすると，実質政府金融負債残高は実質貨幣残高と実質純債券残高の和によって与えられる．ここにおいて，実質純債券残高とは実質政府債券残高マイナス実質民間債券残高のことである.

実質可処分所得は，実質所得と実質純移転支出と価格変化に伴う実質政府金融負債残高の評価損益の和として定義される．実質純移転支出とは実質移転支出マイナス実質税収のことであり，それは同時に実質政府赤字を意味している．以下においては単純化のために，債券の貨幣価格は変化しないと仮定する．そ

1）〝(∀〜)：——.〟は〝すべての〜に対して——が成立する.〟と読む.

2）産出された単一財が資本財または消費財のどちらか一方のみに使用されるというような特別な状況においては，資本財価格と消費財価格は必ずしも均等である必要はない．この点については，例えば，**Shell-Sidrauski-Stiglitz**〔4〕を参照すると良い.

うすると，１人当り実質可処分所得を y^d，１人当り実質政府赤字を g，１人当り実質政府金融負債残高を l，単一財価格上昇率を π，１人当り実質貨幣残高を m，１人当り実質純債券残高を b で表すと，債券の単位を債券の貨幣価格が１になるように適当に選ぶことによって，

（３）　$y^d=y+g-\pi l,$

（４）　$l=m+b,\quad m\geq 0$

と書くことができる．貨幣は政府のみが発行することができるので，m は非負値をとる必要がある．一方，債券は民間も発行することができるから，b に関しては符号の制約はない．

政府は消費活動を営まない．そうすると，社会の実質消費は民間実質消費そのものになる．民間の実質消費需要は，実質可処分所得の一定割合 $\gamma\,(0<\gamma<1)$ であり，いつも実現されると仮定する．かくて，１人当り実質消費を c で表わすと，

（５）　$c=\gamma y^d=\gamma(y+g-\pi l)$

となる．このとき，経済的観点によって，

（６）　$0\leq c\leq y$

が成立しなければならないことから，次の関係が得られることに注目しておこう．

$$(7)\quad \begin{cases} c=0 & \Leftrightarrow\ g=-y+\pi l, \\ 0<c<y & \Leftrightarrow\ -y+\pi l<g<(\frac{1}{\gamma}-1)y+\pi l, \\ c=y & \Leftrightarrow\ g=(\frac{1}{\gamma}-1)y+\pi l. \end{cases}$$

事後的貯畜は，実質所得マイナス実質消費であって，資本形成にほかならない．従って，関係

（８）　$y-c=\dot{k}+\nu k$

が恒等的に成立する．(5) を (8) に代入すれば，

（９）　$\dot{k}=(1-\gamma)y-\nu k-\gamma(g-\pi l)$

が得られる．

3つの型の資産，すなわち貨幣と債券と実質資本，の保有の在り方に重要な役割を演ずるものとして，ここでは特に他の資産に対する貨幣保有の機会費用と実質所得を重視したい． 債券に対する貨幣保有の機会費用 η は債券の実質収益率と貨幣の実質収益率（$-\pi$）の差によって与えられる． 債券の実質収益率は債券の自己利子率 ι と債券価格上昇率と貨幣の実質収益率を加えたものであるが，仮定によって債券（の貨幣）価格は変化しないから，結局

(10)　$\eta=\iota$

を意味することになる．従って今後は，η と ι を区別しないことにする．

実質資本に対する貨幣保有の機会費用 ρ は資本の自己利子率 y' と貨幣の実質収益率の差，つまり，

(11)　$\rho=y'+\pi$

によって与えられる．

η と ρ の大小関係や符号については，幾つかの解釈が可能であるが，ここでは実質貨幣残高の最優位性と実質純債券残高の資本財に対する優位性，つまり，

(12)　$\rho>\eta>0$

が了解されているものとする．例えば，貨幣は，その他の資産に比して流動性に富んでおり，その意味では最も危険性の少ない資産といえるかもしれない．債券と資本財の関係に就いては，債券の具体的内容を考慮しないかぎりあまり確定的なことを語ることはできないが，われわれは一応（12）を暗に想定しておく． しかし，η と ρ の大小関係がかりに逆になったとしても，また大小関係が不確定であるとしても，議論の本質には大きな影響はない．いずれにせよここでは，高い収益率を持つ資産を必ずしも保有するわけではない，というケースが考察される．

一般に，η と ρ のいずれの機会費用が増加しても貨幣残高需要は縮小し，また，η の増加は純債券残高需要を刺激し，ρ の増加は純債券残高需要を減退

させるだろう．この点を踏まえて，1人当り実質貨幣残高需要関数 $\hat{m}$ と1人当り実質純債券残高需要関数 $\hat{b}$ を次のように書くことにする．

$$(13)\quad \begin{cases} \hat{m}=\hat{m}(y,\ \rho,\ \eta) \\ \hat{m}_y\geq 0,\ \hat{m}_\rho<0,\ \hat{m}_\eta<0, \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \hat{b}=\hat{b}(y,\ \rho,\ \eta), \\ \hat{b}_y\geq 0,\ \hat{b}_\rho<0,\ \hat{b}_\eta>0.^{1)} \end{cases}$$

通常，貨幣は取引の媒介手段として利用されるから，実質所得の変化に関する反応は債券需要に対してよりも貨幣需要に対しての方がはるかに敏感であろう．しかし，債券の自己利子率 ι の変化に関する反応に就いては，それと直接的に関係を持っている債券にに対する需要の方が間接的（交差的）に関係を持っている貨幣に対する需要よりも敏感であろうと思われる．この点を考えて，われわれは，

$$(15)\quad \hat{b}_\eta+\hat{m}_\eta>0$$

が成立することを仮定する．

また，(12) が成立する状況においては，需要関数 (13) (14) に関して，

$$(16)\quad \begin{cases} (\forall\, k>0,\ \rho>\eta>0):\hat{m}>0, \\ (\forall\, k>0,\ \rho=0):\hat{m}=\infty, \\ (\forall\, k>0,\ \eta=0):\hat{b}\doteqdot-\infty \end{cases}$$

が成立する，と解釈しても差し支えないだろう．

以上のごとくにして需要関数が定義されると，一時的一般市場均衡は実質貨幣残高と実質債券残高が一致するときに成立することが分かる．なぜなら，ここでは労働力と資本財の完全雇用と消費計画の実現が仮定されているので，新資本財（＝投資財）市場，貨幣市場及び債券市場の一時均衡が実現すると，一時的一般市場均衡が成立するわけであるが，Walras 法則によって，これら3つの市場のうちで2つの市場が均衡すれば，残る市場は必ず均衡するからであ

1) $\hat{m}_y\equiv\partial m/\partial y$, $\hat{m}_\rho\equiv\partial m/\partial\rho$ など，以下同様の表記法を用いる．

る．かくて，(4) を考慮すると，一時的市場均衡の条件は，

$$(17)\quad \begin{cases} m=\hat{m}(y,\ \rho,\ \eta), \\ l-m=\hat{b}(y,\ \rho,\ \eta),\ m\geq 0 \end{cases}$$

と書かれる．

ところで，この社会では，各時刻において1人当り実資資本ストック k と1人当り実質政府金融負債残高 l は歴史的に与えられている．従って，所与の時刻に対しては l は確定値であって，たとえ政府でもその値を変更することはできない．しかし，このモデル経済系には債券の公開売買市場が存在しており，政府は，所与の l に対して公開市場での売買を通じて1人当り実質貨幣残高 m と1人当り実質純債券残高 b の構成比率を変更することができる．かくて，m（または b）は政府の政策（＝操作）変数となる．[1)]

補助定理1　公開市場での買（売）操作は，単一財の均衡価格上昇率を下落させ，債券の均衡自己利子率を下落（上昇）させる．

証明　各時刻において，所与の k と l と政策的に決定された m に対して，方程式 (17) は単一財の均衡価格上昇率 π と債券の均衡自己利子率 $\iota=\eta$ を同時決定する．かくて，(10) (13) (14) (15) により，一時的一般市場均衡解

$$(18)\quad \begin{cases} \pi=\pi(k,\ l,\ m), \\ \pi_m=-(\hat{m}_\eta+\hat{b}_\eta)/(\hat{m}_\eta\hat{b}_\rho-\hat{m}_\rho\hat{b}_\eta)<0, \\ \eta=\eta(k,\ l,\ m), \\ \eta_m=(\hat{m}_\rho+\hat{b}_\rho)/(\hat{m}_\eta\hat{b}_\rho-\hat{m}_\rho\hat{b}_\eta)<0 \end{cases}$$

が得られる．（証了）

次に，平均的消費者の効用指標関数 u

$$(19)\quad \begin{cases} (\forall\, c>0): u'>0,\ u''<0, \\ u'(0)=\infty,\ u'(\infty)=0 \end{cases}$$

1) このような仮定は Foley-Shell-Sidrauski〔2〕によって採用されたものと類似している．

に基づいて，社会的厚生指標汎関数 w を

(20) $$w(c)=\int_0^\infty u(c)e^{-\lambda t}dt,\quad \lambda=\delta-\nu=\text{const.}>0$$

によって定義する．ここにおいて，δ は社会的効用の時間割引率であり，それは人口成長率 ν よりも大きい定数であることを仮定しておく．この仮定は汎関数（20）が収束するためにはぜひとも必要とされる．

更に，生産関数 y と諸パラメーターとの間に次の関係

(21) $$\begin{cases} y'(0)>\max\,[\delta,\ \nu/(1-\gamma)], \\ y'(\infty)<\delta \end{cases}$$

が成立することを仮定する．この仮定は，たぶん容認されると思われるが，後程重要な役割を演ずるであろう．

なお，1人当り実質政府金融負債残高 l の記号の約束によって，

(22) $$\dot{l}=g-(\nu+\pi)l$$

という関係が常に成立している．

§2　目標達成のための必要条件

政府は，正の1人当り初期実質資本ストック $k(0)$ と1人当り初期実質政府金融負債残高 $l(0)$ を所与として，各時刻において単一財価格の安定（$\pi=0$）を維持すると同時に（5）（6）（9）（17）（22）を満たし，かつ資本ストックに関する終端非負条件

(23) $$k(\infty)\geq 0$$

を満たす経路のうち，汎関数（20）を最大にするという意味で最適な成長経路を特定化することを目標として，1人当り実質貨幣残高 m と1人当り実質政府赤字 g を操作するであろう．

さて，上記問題には，各時刻において単一財価格の安定化という社会的目標が課せられている．しかしこの目標が実現されるには，単一財の均衡価格を与える（18）の式が任意の所与の k と l に対して

(24) $$\pi(k,\ l,\ m)=0$$

となる非負値 m の存在を保証しなくてはならない．ところが，このモデル経済系のわく組みの中では，このような m の存在を明らかにすることは不可能である．そこで以下においては，すべての l と正の k に対してある非負の m が存在して，(24) が成立すると仮定する．補助定理1によれば，所与の k と l に対して m は π の単調減少関数であるから，(15) が容認されれば，この仮定は納得できるかもしれない．

(24) で与えられた仮定によれば，各時刻において，単一財の均衡価格上昇率 π をゼロならしめる m が決まるはずであるから，政府はそのような m が実現するように公開市場操作を運営することができる．政策技術的には，この価格安定化政策は厚生最大化政策に優先する．というのは，単一財価格安定下の社会的厚生最大化という目標に対しては，何よりもまず単一財価格の安定化を図らねばならないからである．ところで，政策手段 m が価格安定化のために使用されてしまうと，厚生最大化の手段として残る政策は g の操作のみである．かくてこのモデル経済系においては，実質貨幣残高の操作は価格安定化のための政策であり，実質政府赤字の操作は厚生最大化のための政策である．従って，これら2つの政策決定に際しては両者の相互関係についての考慮を払う必要はないから，今後は，公開市場操作を通じて単一財価格の安定が保証されることを前提にして，汎関数 (20) の最大化のための条件を検討していくことにする．

時刻 t の補助未知関数 ϕ と ψ を導入して，Hamilton 関数 H を

$$(25)\qquad H=[u(c)+\phi\dot{k}+\psi\dot{l}]e^{-\lambda t}$$

とおく．ところで，(19) を考慮すると，ある時刻において

$$c=0,\quad \text{or}\quad g=-y$$

となると，いかなる最適経路を特定化することはできない．このことを念頭に置くと (25) は，

$$(26)\qquad \begin{cases} 0<c<y,\quad \text{or}\quad -y<g<(1-\gamma)y/\gamma \Rightarrow \\ He^{\lambda t}=u[(y+g)\gamma]+[(1-\gamma)y-\nu k-\gamma g]\phi+(g-\nu l)\psi, \end{cases}$$

$$(27)\quad \begin{cases} c=y, \quad \text{or} \quad g=(1-\gamma)y/\gamma \Rightarrow \\ He^{\lambda t}=u(y)-\nu k\phi+[(\frac{1}{\gamma}-1)y-\nu l]\psi \end{cases}$$

と書かれる．このとき，最大値原理によると，最適経路上では，任意の時刻に対して次の諸関係が成立する．

$$(28)\quad \begin{cases} \psi=(\phi-u')\gamma \Rightarrow 0<c\leq y, \\ \psi>(\phi-u')\gamma \Rightarrow c=y, \end{cases}$$

特に，

$$(28')\quad \begin{cases} 0<c<y, \quad \text{or} \quad -y<g<(1-\gamma)y/\gamma \\ \Rightarrow \psi=(\phi-u')\gamma, \end{cases}$$

$$(29)\quad \dot{\phi}=-y'u'+\delta\phi+(\phi-u')\gamma y',$$

$$(30)\quad \dot{\psi}=\delta\psi,$$

$$(31)\quad \lim_{t\to\infty} k(t)\phi(t)e^{-\lambda t}=0,$$

$$(32)\quad \lim_{t\to\infty} l(t)\psi(t)e^{-\lambda t}=0.$$

補助定理 2　最適経路上では，全期間〔0, ∞）にわたって，

$$\psi=0$$

となる．

証明　ψ の初期条件を $\psi(0)$ とおくと，(30) により，

$$\psi=\psi(0)e^{\delta t}$$

が得られる．これを (32) に代入すると，最適経路上では

$$\psi(0)\lim_{t\to\infty} l(t)e^{\nu t}=0$$

の成立が要求される．従って，もし $\psi(0)\neq 0$ ならば

$$l(\infty)=0$$

が必要となる．(22) によればこのときには

$$g(\infty)=0$$

となるから，(21) を考慮して，

$$(1-\gamma)y(\bar{k})=\nu\bar{k}$$

によって $\bar{k}$ を定義すると，(9) により

$$k(\infty)=\bar{k}>0$$

となる．ところで，もし

$$c=y, \quad \text{or} \quad g=(1-\gamma)y/\gamma, \ (t\to\infty)$$

ならば，$l(\infty)\fallingdotseq 0$ であるから，

$$l(\infty)=0 \Rightarrow c<y$$

となる．そうすると（28′）により，

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} k\,\phi\, e^{-\lambda t}\\&\quad=\lim_{t\to\infty} k\, e^{-\lambda t}\left[\frac{1}{\gamma}\phi+u'\right]\\&\quad=\frac{1}{\gamma}\bar{k}\,\phi(0)\lim_{t\to\infty} e^{\nu t}+\bar{k}\,u'[\gamma y(\bar{k})]\lim_{t\to\infty} e^{-\delta t}\\&\quad=\infty, \quad \text{or} \quad -\infty\end{aligned}$$

となるが，これは（31）を満たさない．よって，最適経路上では，1人当り終端実質政府金融負債残高の数値いかんにかかわらず，

$$\phi(0)=\phi(t)=0$$

が成立しておらねばならない．(証了)

(28)～(32) 及び補助定理2によって，次の事実が明らかになった．

定理1　最適経路上では，全期間〔0, ∞）にわたって次の諸関係が成立する．

$$(28'')\quad\begin{cases}0<c<y, \quad \text{or} \quad -y<g<(1-\gamma)y/\gamma\\ \quad\Rightarrow \phi=u'(c)=u'[(y+g)\gamma],\\ c=y, \quad \text{or} \quad g=(1-\gamma)y/\gamma\\ \quad\Rightarrow \phi\leq u'(c)=u'(y),\end{cases}$$

$$(29')\quad \dot{\phi}=-y'u'+\delta\phi,$$

$$(30')\quad \phi=0,$$

$$(31)\quad \lim_{t\to\infty} k\,\phi\, e^{-\lambda t}=0.$$ [1]

1） 初期条件 $k(0)$ と $l(0)$ に対して，(5) (6) (9) (17) (22) (23) (24) を満たす経路は最適条件 (28)′′ (29)′ (30)′ 及び (31) を充足するとき実際に最適経路となる．本稿では，この証明は省略する．

§3　価格安定下の最適成長経路の存在と一意性

変数 k と l と ϕ の時間変化率が全期間にわたってゼロ，すなわち

$$\dot{k}=\dot{l}=\dot{\phi}=0$$

となるような特異最適経路を

$$\boldsymbol{P}^*=(y^*,\ c^*,\ k^*,\ l^*,\ m^*,\ b^*,\ \phi^*,\ g^*)$$

で表すと，

補助定理 3　特異最適経路 $\boldsymbol{P}^*$ が一意的に存在する．

証明　(6) (7) (8) 及び $c\fallingdotseq 0$ により，

$$\dot{k}=0 \Rightarrow c<y, \quad \text{or} \quad g<(1-\gamma)y/\gamma$$

であるから，(28″) (29′) (2) (21) 及び

$$\dot{\phi}=0$$

により，

(33)　$y'(k^*)=\delta$

によって，k^* が一意的に決まる．また，(9) に $k=k^*$ と (24) を代入すると，

(34)　$g^*=[(1-\gamma)y(k^*)-\nu k^*]/\gamma$

が一意的に得られる．今度は，(22) (24) (34) 及び

$$\dot{l}=0$$

により，

(35)　$l^*=g^*/\nu$

が定まる．そうすると，(24) を見て，

(36)　$\pi(k^*,\ l^*,\ m^*)=0$

によって，m^* も一意的に決まり，

(37)　$b^*=l^*-m^*$

により，b^* も一意的に確定する．一方，(8) と (28″) を利用すると

(38)　$c^*=y(k^*)-\nu k^*,$

(39)　$\phi^*=u'(c^*)=u'[(y^*+g^*)\gamma]$

が一意的に与えられる.（証了）

定理 2　任意の初期条件 $k(0)(>0)$ と $l(0)$ に対して，単一財価格を一定に維持しながら汎関数（20）を最大にするという意味で最適な経済諸変数の経路（＝最適成長経路）

$$\boldsymbol{P}=(y,\ c,\ k,\ l,\ m,\ b,\ \phi,\ g)$$

が一意的に存在し，しかもこの経路 $\boldsymbol{P}$ は時間経過に伴って $\boldsymbol{P}^*$ に漸近する.

証明　段階 1　（28″）の最初の式によれば，最適経路上で

$$0<c<y,\quad \text{or}\quad -y<g<(1-\gamma)y/\gamma$$

が成立しているときには，最適政策 g は変数 k と ϕ の関数であって，その特性は

$$g=g(k,\ \phi),\ g_k=-y',\ g_\phi=1/\gamma u'' \tag{40}$$

によって与えられる．この点を考えると，(7)(9)(18)(22)(24)(28″)(29′)により

$$\begin{cases} 0<c<y,\quad \text{or}\quad -y<g<(1-\gamma)y/\gamma \Rightarrow \\ \dot{k}=(1-\gamma)y-\nu k-\gamma g(k,\ \phi), \\ \dot{l}=g(k,\ \phi)-\nu l, \\ \dot{\phi}=-(y'-\delta)\phi, \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} c=y,\quad \text{or}\quad g=(1-\gamma)y/\gamma \Rightarrow \\ \dot{k}=-\nu k, \\ \dot{l}=(\frac{1}{\gamma}-1)y-\nu l, \\ \dot{\phi}=-y'u'+\delta\phi \end{cases} \tag{42}$$

が得られる.

段階 2　k^* の近傍では $0<c<y$ であることを考えて，体系（41）を（k^*, l^*, ϕ^*）の回りで展開し，2次以後の項を無視すると，(k^*, ϕ^*) の近傍における線型微分方程式系が得られる[1)]．このとき，3つの固有根は

1）（k^*, l^*, ϕ^*）の回りで展開すると，l に関する2次以後の項はすべてゼロになる．従って，l は l^* の近傍にある必要はない.

$$
(43)\quad \begin{cases} x_1=-\nu, \\ x_2=\dfrac{1}{2}\left[\lambda-\sqrt{\lambda^2+4y''(k^*)u'(c^*)/u''(c^*)}\right], \\ x_3=\dfrac{1}{2}\left[\lambda+\sqrt{\lambda^2+4y''(k^*)u'(c^*)/u''(c^*)}\right] \end{cases}
$$

によって与えられ，更に，これら固有根に対応する固有ベクトルは，h_1 と h_2 と h_3 を任意実数として，

$$
(44)\quad \begin{cases} (0,\ 1,\ 0)h_1, \\ \left(1,\ \dfrac{\lambda+\sqrt{\cdot}-2\gamma\delta}{\gamma(\lambda-\sqrt{\cdot}+2\nu)},\ \dfrac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\cdot})u''(c^*)\right)h_2, \\ \left(1,\ \dfrac{\lambda-\sqrt{\cdot}-2\gamma\delta}{\gamma(\lambda+\sqrt{\cdot}+2\nu)},\ \dfrac{1}{2}(\lambda-\sqrt{\cdot})u''(c^*)\right)h_3 \end{cases}
$$

によって与えられる．従って，$(k^*,\ \phi^*)$ の近傍内の任意の所与の k_0 と l_0 に対して，

$$
(45)\quad \begin{cases} h_2=k_0-k^*, \\ h_1=l_0-l^*-\dfrac{\lambda+\sqrt{\cdot}-2\gamma\delta}{\gamma(\lambda-\sqrt{\cdot}+2\nu)}h_2, \\ h_3=0, \\ \phi_0=\phi^*+\dfrac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\cdot})u''(c^*)h_2 \end{cases}
$$

と選ぶと，$(k_0,\ l_0,\ \phi_0)$ を初期条件とする体系（41）の解は時と共に $\boldsymbol{P}^*$ に漸近する．

段階 3　ところで，(44) を見れば，$(k^*,\ \phi^*)$ の近傍内の k 及び ϕ の一般解は，h_2 と h_3 を任意実数として，

$$
(46)\quad \begin{cases} k(t)=k^*+h_2e^{x_2t}+h_3e^{x_3t}, \\ \phi(t)=\phi^*+\dfrac{1}{2}(\lambda+\sqrt{\cdot})u''(c^*)h_2e^{x_2t}+\dfrac{1}{2}(\lambda-\sqrt{\cdot})u''(c^*)h_3e^{x_3t} \end{cases}
$$

によって表され，また体系（41）においては，任意の k と l と ϕ に対して

$$\dot{k}_m=0$$

であるから，k 及び ϕ は l に無関係な関数であり，特異点 $(k^*,\ \phi^*)$ は (k,ϕ) 平面上でとうげ点であることが分かる．従って，任意の正値初期条件 $k(0)$ に

対して正値初期補助変数 $\phi(0)$ が一意的に定まり，$(k(0), \phi(0))$ を初期条件とする体系（41）の解は時と共に (k^*, ϕ^*) に漸近する．また，この経路は (k^*, ϕ^*) の近傍内では当然（45）を満たさねばならないことを考慮すれば，結局これを次のようにいうことができる．すなわち，任意の初期条件 $k(0)(>0)$ と $l(0)$ に対して $\phi(0)$ が一意的に定まり，$(k(0), l(0), \phi(0))$ を初期条件とする体系（41）の解は時と共に $\boldsymbol{P}^*$ に漸近する．更に，とうげ点に漸近する経路の性質により，

$$(47) \quad \begin{cases} k(0) \lesseqgtr k^* \Leftrightarrow (\forall t \geq 0) : \dot{k} \gtreqless 0, \\ \phi(0) \lesseqgtr \phi^* \Leftrightarrow (\forall t \geq 0) : \dot{\phi} \gtreqless 0 \end{cases}$$

となるのであるが，（41）を見れば，

$$(48) \quad k(0) \lesseqgtr k^* \Rightarrow \phi(0) \gtreqless \phi^*$$

ということも分かる．また，$k(0)<k^*$ ならば，（47）（8）により $c<y$ であるから，体系（41）の仮定は満たされている．

段階 4　（47）によれば，$k(0)>k^*$ ならば，体系（41）の仮定は満たされなくなって体系は（42）に移るという可能性がある[1]．そこで今度は，$\boldsymbol{P}^*$ に漸近する（41）の最適経路の後進解を考えることにする．この後進解が体系（42）に切り替わる時の k を k^s とすれば，この時には当然

$$\phi = u'[y(k^s)]$$

であるから，それ以後の（42）の後進解は k と ϕ に関して確定する．かくて，任意の初期条件 $k(0)$ と $m(0)$ に対して，$\boldsymbol{P}^*$ に漸近する最適経路が存在することが示された．

段階 5　次に，今その存在が証明された最適経路は一意であることを明らかにする．そのためにまず，最適消費経路の一意性を示しておく．同一の初期条件 $k(0)$ と $l(0)$ に対して異なる最適消費経路が存在すると仮定して，その2つを c と $\tilde{c}$ で表す．このとき，$c=\tilde{c}$ をいえばいい．c も $\tilde{c}$ も最適消費経路

1）この問題に関しては，Arrow-Kurz〔1〕を参照すると良い．

であるから，(19) を考慮に入れると，$\theta \in (0, 1)$ として，

$$\int_0^{\infty} u(c)\, e^{-\lambda t}\, dt$$
$$= \int_0^{\infty} u(\tilde{c})\, e^{-\lambda t}\, dt$$
$$= \int_0^{\infty} [\theta u(c) + (1-\theta) u(\tilde{c})]\, e^{-\lambda t}\, dt$$
$$< \int_0^{\infty} u[\theta c + (1-\theta)\tilde{c}]\, e^{-\lambda t}\, dt$$

が得られる．c と $\tilde{c}$ が共に実現可能ならば，当然

$$\theta c + (1-\theta)\tilde{c}$$

も実現可能となるが，これは c 及び $\tilde{c}$ が共に最適消費経路であるという仮定に反する．それ故に $c=\tilde{c}$ である．

段階 6　最適消費経路の一意性が示されたことにより，最適消費経路は，先程その存在が証明された，$\boldsymbol{P}^*$ に漸近する最適経路に対応する消費経路であることが判明した．一方，とうげ点 (k^*, ϕ^*) に漸近する体系 (41) (42) の解 (=最適経路) である k 及び ϕ は初期条件 $k(0)$ と $l(0)$ に対して一意であったから，対応する解 l もまた初期条件 $k(0)$ と $l(0)$ に対して一意的に定まる．かくて，最適経路 $\boldsymbol{P}$ は任意の初期条件 $k(0)\,(>0)$ と $l(0)$ に対して一意であって，それは特異最適経路 $\boldsymbol{P}^*$ に漸近する．(証了)

§4　結　　語

本稿で考察されたモデルは，1人当り実質貨幣残高 m と実質政府赤字 g を政府政策 (=操作) 変数とすることによって，単一財価格安定下で社会的厚生指標汎関数 (20) を最大化することを社会的目標とするような経済系であった．2つの政策手段のうち，m は専ら価格安定化手段として利用され，g は専ら厚生最大化手段として利用されるというように，両手段がそれぞれ異なった機能を担当する結果，m と g の間の直接的関係をなんら考慮する必要を生じず，

このことがかえって一意的な最適成長経路 $\boldsymbol{P}$ の存在を主張することを容易ならしめている.

m の操作は恐らくいわゆる公開市場操作の形態を採るであろうが，この操作を少し別の角度から見ると，それは公定歩合操作の様相を帯びることにもなるであろう．というのは，一時的市場均衡の条件（17）に対して，われわれは，1人当り実質ストック k と政府金融負債残高 l と m を外生的に与えることによって，債券の均衡自己利子率 ι と単一財の均衡価格上昇率 π を求めようとしたのであるが，逆に k と l と ι を外生変数とすれば，（17）は m と π の均衡値を与えることになるからである．かくて，m の操作は公開市場操作とも公定歩合操作とも称することのできる金融（＝貨幣）政策であることが分かる．一方，g の操作は実質純転支出（＝移転支出マイナス税収）の操作であるから，それは租税政策を包含する財政政策であるということができる.

本稿で考察された極めて単純な最適成長モデルが，設定された諸仮定のわく内においてであれ，価格安定化政策としての金融政策（$=m$ の操作）と厚生最大化政策としての財政政策（$=g$ の操作）を適切に運用するならば，価格安定下の最適経済成長を実現できる可能性があるということを例示しているとするならば，われわれの当初の意図はすべて達成されたことになる.

参考文献

1. Arrow, K. J.-Kurz, M., Optimal Growth with Irreversible Investment in a Ramsey Model, *Econometrica* **38** (1970), 331–344.
2. Foley, D.-Shell, K.-Sidrauski, M., Optimal Fiscal and Monetary Policy and Economic Growth, *J. Pol. Econ.* **77** (1969), 698–719.
3. 福尾洋一，社会的厚生最大化のための貨幣的政策，経済学論究 **27** (**2**) (1973), 91–110.
4. Shell, K.-Sidrauski, M.-Stiglitz, J. E., Capital Gains, Income, and Saving, *Rev. Econ. Stud.* **36** (1969), 15–26.