

数学基礎論論争の中のカヴァイエス

——ブラウアーの直観主義とフレーゲの論理主義に対して——

中 村 大 介

序 論

フランスの数理哲学者ジャン・カヴァイエス（1903–1944）は博士主論文『公理的方法と形式主義』（1938）において、自身の数学基礎論上の立場を「修正された形式主義」と規定している。その表現から分かる通り、これはいわゆる「ヒルベルト・プログラム」として結実したヒルベルトの形式主義を継承しつつ、それを批判的に乗り越える立場に他ならないが、実のところ、この立場はブラウアーの直観主義及びフレーゲの論理主義の見解を部分的に含む、折衷的なものでもある。そこで本稿は、形式主義を主に受け継ぐ「修正された形式主義」の立場を明確にするための予備的作業として、博士主論文における彼の直観主義と論理主義に対する態度を検討することを目標とする。

本稿の構成を述べる前に、まずは論全体の理解を助けるために、カヴァイエスが終生変わらず持ち続けたと思われる数理哲学の基本テーゼを二つ、述べておこう。第一に、数学とは論理に還元されえず、記号と共に概念的に自己展開する科学である。第二に、数学において認識することとはある「振る舞い」をなすことに他ならないが、その振る舞いを可能とするのは意識や主観ではなく、むしろ記号体系である。

本稿は次のような構成をとる。まず第1節で、ブラウアーに先行するフランスの前直観主義者たち、とりわけボレルとルバークに対するカヴァイエスの批判を検討した上で、続く第2節で、ブラウアーの直観主義の概略とそれ

に対するカヴァイエスの議論を扱う。第3節では、フレーゲの論理主義とカヴァイエスの着想の類似点と差異を考察し、さらにラッセル=ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』に関する彼の議論を簡単に見る。そして最後に結論において、ブラウアーとフレーゲに対するカヴァイエスの態度が相補的なものであることを指摘し、ヒルベルトに関する彼の省察へと議論を開く。

1. 対前直観主義（ボレルとルベーク）

集合論の危機においてこそ数学基礎論論争は重要性を持つと考えるカヴァイエスは、集合論の重要問題、選択公理を巡る問題から『公理的方法と形式主義』の序論を開始する。アダマール、ベール、ルベーク、ボレルの間で取り交わされた有名な「集合論に関する五つの手紙」では、プラトニズムの立場を採り、選択公理を認めるアダマール以外の三人は、無限に関する1906年以降のポアンカレに近い見解から、選択公理を否定する「経験主義」に属する⁽¹⁾。そしてカヴァイエスが特に議論するのはボレルとルベークの経験論的着想である。

一方でボレルは、集合論においてリシャールのパラドックス⁽²⁾に代表される多くの逆説的帰結が生じてしまったその原因を、集合の正しい定義の欠落に求め、「実効的に枚挙可能な」集合という概念を新たに導入した。その集合は、「有限数の語を用いて、集合の各要素に特定の位置を曖昧さなしに割り当てるための確実な手続き⁽³⁾」を指示することによって定義される。ポイント

(1) もっとも、ポアンカレ自身は選択公理を「ア・プリオリな総合判断」の一つとして容認しようとしていた。例えば Poincaré [1906], p.315 を参照せよ。

(2) リシャールは次のようなパラドックスをつくった。日本語の有限の組み合わせを辞書式順序に並べ、ここから数を表現しているものだけを取り出すと、この文字列の表とそれによって定義される数の表（これを集合 E とせよ）ができる。すると、例えば、「数の表の n 番目の数の小数点 n 桁目を p とするとき、整数部分が 0 でその少数部分の n 桁目を $p=9$ 以外のとき $p+1$, $p=9$ のとき 0 とする数」を考えると、この数は日本語の有限の組み合わせで定義されているにも関わらず、集合 E には入っていない、という逆説が生じることになる。

(3) Borel [1928], p. 165.

は、ある集合の定義がたとえ無限の語を含むことになったとしても、その語が有限数の語の手続きや法則で明確に与えられていればよい、という点にある。そしてリシャールの構成した集合 E はこれを満たしていないが故に、退けることができる。このように可算集合の中にも枚挙可能でない集合があることから、可算集合と非可算集合の区別に代えて、実効的に枚挙可能な集合とそうでない集合の区別のほうが数学の実践にはより適っているとされる。しかもこの実効的に枚挙可能な集合という概念は、「観察可能な実在⁽⁴⁾」のみを基礎とするという利点をも有している。こうした立場のボレルが、非可算個の非可算集合に対する選択関数の存在さえ許す選択公理に疑義を差し挟むのは当然と言える。ゆえに連続体もまた、「幾何学的直観によって獲得される⁽⁵⁾」ことになるのである。

加えてボレルはこの自分の考えに基づいて、数学を改善しようとする。彼はまず「計算可能」であることを次のように定義する。「ある数 α が計算可能であるのは、任意の整数 n に対し、少なくとも $1/n$ だけ α から異なる有理数が得られるときである⁽⁶⁾」。ここから計算可能な関数に対応する集合として「正しく定義された」集合が導入され、可測集合あるいはボレル集合がそれに一致することになる。そしてこのボレル集合は帰納法によって定義されるため、「一つの開かれた体」である。しかし問題がここで現れる。ボレル集合の集合について推論する必要がすぐに生じ、したがってボレル集合を一つの与えられた全体性として、つまり閉ざされた体として考えなければならなくなるのである。

こうしたボレルの数学再建計画に対して、カヴァイエスは二つの異論を唱える。第一に、幾何学的直観の役割が不明瞭である。数的連続体が「汲み尽くされない」という「消極的な用語」に過ぎないために消去されねばならないとしたら、計算可能な数の連続体の測度はゼロであるが、「実効的な計算を用い

(4) Borel [1928], p. 166.

(5) Borel [1928], p. 161.

(6) Borel [1928], p. 219.

て、整数という素材からその結果を作り出すことができないにしても、その連鎖が意味を有するような具体的な操作が、彼が用いる幾何学的な推論の中には存在しないだろうか⁽⁷⁾」。しかし幾何学的直観がこうした操作を引き起こす可能性についてボレルは何も語っていない。第二に、ボレル集合は、彼が望んだようには数学を制御できない。数学それ自身の発展が、その制御を超え出してしまうのである。

他方でルベークが要求するのは、ボレルのように定義において対象が構成されることではなく、ただその対象の特性が特徴づけられることだけである。選択公理も、選択関数が選び出す対象を特徴づけていないという点で批判されることになる。そこで、彼の代替案は「選択する」という言葉を「命名する」という意味で使うということである。「ある対象が定義されるあるいは与えられるのは、この対象にそしてこの対象にのみ適用されうる有限数の語が発せられたとき、つまりこの対象を特徴付ける特性を命名したときである⁽⁸⁾」。

しかしながらこの概念は、その柔軟さゆえに多くの曖昧さと懐疑を残してしまう。命名可能な対象は十分な仕方で定義されえず、例えば後年カヴァイエスが疑問視しているように、「[発せられた有限数の] 語の中に、もし『…であるような全ての対象、…であるような対象が存在する』が姿を現す場合、有限性はどこにあるのか⁽⁹⁾」。実際、ルベークがそれ自身命名可能であるとみなすクラス II（濃度が \aleph_0 であるような順序数の集まり）の全体を推論に用いる場合、カヴァイエスが言うように、「少なくとも、そのような推論と選択公理に訴えなければならない推論との間の安全性の […] 違いは明白ではない⁽¹⁰⁾」であろう。

かくして、ポアンカレのように「精神の力」を十全に認めることなく、ボレ

(7) Cavallès [1938], p. 14.

(8) Lebesgue [1905], p. 205. また、この概念を用いて彼がブラウアーに先んじて排中律に対する留保を示しているのは、注目に値する。「有限でもなく無限でもない集合がいつか命名されるということを私は強く疑問に思うが、このような集合の不可能性が証明されるようには私には見えない」(Borel [1928], p. 156)。

(9) Cavallès [1947 a], p. 461.

(10) Cavallès [1938], p. 20 f.

ルの述べる「観察可能な実在」に沿って実効性を考慮するような、そうした「観念論と経験論の間の中間的立場」は保持しがたいものとなる。一方でボレルは数学にあまりに強い制限を課し、他方でルベーグの課す制限は緩すぎるのである。そしてカヴァイエスの洞察によれば、これら「前直観主義⁽¹¹⁾」学派の困難の核心は、ある特定の数学領域から引き出された数学全体に対する制限が、数学それ自身の予見不可能な展開によって棄却されざるを得ない、というところにある。「純粹に数学的な考察から引き出された数学的な場の何らかの制限は […] 不可能であることが明らかになる。すなわち、問題が予見不可能であること、適用のための回り道こそが、安全のための規則を無駄なものにし、あるいはその規則が捨て去られることを強いるのである⁽¹²⁾」。ある特定の数学領域の操作に対してではなく、むしろ数学的作業の本質そのものに対して、批判的反省が最初になされなければならない。そこでカヴァイエスは序論の続く箇所では、デカルト、ライプニッツ、カントの数理哲学の検討を行う。そして、この検討はブラウアーの直観主義を考察するよう彼を導くのである。

2. 対ブラウアー直観主義

ブラウアーの直観主義に関する議論は、博士主論文の序論の最後でなされる。数学基礎論についての現代の議論では論理主義、形式主義と並んで直観主義が論じられるのが通例であるが、カヴァイエスは、ブラウアーもまた数学的作業そのものに対して批判的反省を加えた数学者として取り扱うのである。彼は1930年の「連続体の構造」までのブラウアーの仕事、特にこの論文と「数学・科学・言語」(1928)に主に則って直観主義の議論を説明している。そこで本稿でも、基本的にこの二つの論文に依拠しながら、しかし必要に応じて後年の論文も参照しつつ、ブラウアー直観主義の全体像を概説することにする。

(11) ここではブラウアーの呼称にしたがった (Brouwer [1952], p. 509)。他には、ハイティングらによる「半直観主義」という呼び方も存在する。Hesseling [2003], p. 8 を参照せよ。

(12) Cavailles [1938], p. 21.

まず、ブラウアー自身の診断による、前節で論じた前直観主義との差異から始めよう。彼によれば、前直観主義が確立したのは、特にポアンカレに典型的である論理学の数学からの分離、そして数学の一部と論理学の自律性の二点である⁽¹³⁾。しかし他の数学の分野はそれら自律的な数学と論理学に依存しており、特にボレルにおいては上で見たように連続体の考察が不十分であった。したがって結局のところ、前直観主義は数学に制限をかけるに留まらざるをえなかった。これに対してブラウアーは、後でカヴァイエスも述べるように、数学を再建するための確固とした別の選択肢を用意するのである。

ブラウアーは至る所で、しかし特に1928年の「数学・科学・言語」において、人間の生きようとする意志の結果として現れる、数学・科学・言語それぞれの発生的記述を行っている。そしてそれぞれの発生には、文明の成熟に連れて生じる、数学的反省・数学的抽象化・意志伝達の三つのレベルが対応するとされる。順繰りに述べよう。最初の数学的反省のレベルは二つの段階からなる。第一段階は「時間的態度」と呼ばれる。そこにあるのは原初的な時間直観である「二性」による「時間の一撃」である。それは、生ける瞬間的現在を質的に異なる過去と現在という二つのものへと二分化する意識の行為であって、この二分化が繰り返されることで雑多な多数性の系列が産み出されることになる。なお、ブラウアーは初期のある論文で、カントを直観主義の祖としつつも、非ユークリッド幾何学の登場故に彼の空間直観に対する考えを棄却して、時間直観のア・プリオリ性の着想のみを保持する必要があると述べていた⁽¹⁴⁾。しかも彼においては、時間直観はカントのように感性的なものではなく、知的なものである。こうしたカント由来の「二性」の時間直観こそが数学的認識の原初的な姿である。第二段階は「因果的態度」と呼ばれる。そこでは

(13) Brouwer [1952], p. 509 を参照せよ。

(14) Brouwer [1912], pp. 125–127 を参照せよ。なお、カヴァイエスはカントの時間直観とブラウアーの原初的直観の関係を、次のように巧く表現している。「構成は時間の内で展開するとしても、時間はほとんどある順序しか、すなわち触発される我思うによって感じられる時間ではなく、統一化を行なう我思うの能動的時間しか表象しない。実際の数学的活動はそれ独自の展開においてそれ自身で感じ取られる」(Cavaillès [1938], p. 33)。

第一段階において産み出された別個の諸系列が同一視され、「因果列」という基体が見れる。その結果、低い文明水準にして既に、人間は秩序を己の周りに創り出そうとするのである。

文明の水準が上がると、次の数学的抽象化のレベルに至る。そこでは、二性から様々な質が「数学的抽象化」によって剥奪されて、あらゆる二性に共通の基体である空虚な形式だけが残る。この基体こそ、「数学固有の直観」である数を形成する。そしてこの直観の自己展開が自然数の全体、実数の全体を導入し、かくして純粋数学の全体が産み出されるに至る。さらに、このように拡大された数学の内部へと多数の因果列が投射されることで、秩序の領域が拡大し、その結果自然科学が登場することになる。しかし、ここまでは数学も自然科学も言語を必要としないものと捉えられていることには注意が必要である。言語が産み出されるのは、次なる文明の段階においてである。そこでは人間集団の作業の多様性から意志を伝達する必要が生じ、要求や秩序を翻訳する音によって仕事を規則的に行うために、数学的行為の中で役割を演じる一群の対象・理論がそれ自身数学的反省に付されることになる。かくして純粋数学体系の諸要素に、「言語的な信号」が結びつけられるに至る。言語は、文明社会において必要な意思伝達の大部分を行うのである⁽¹⁵⁾。

以上のことから、直観主義がなすべき仕事は明らかになってくるはずである。第一の仕事は、言語から数学を切り離すことである。ブラウアーにとって、社会的産物に過ぎない言語は記憶の補助に過ぎず、その場合でも誤りから守ってくれる訳ではない。「[意思伝達の場合と同様、] 純粋数学にとつても確実な言語は存在しない⁽¹⁶⁾」。しかし現在の形式主義は言語の「魔術的力」を信頼しているように思える。この信頼の根は、古典論理に対する軽率な信頼に求められる。彼によれば、古代に成立した有限の物を扱う言語において、同一律

(15) ここまでの発生的記述は主に Brouwer [1928], pp. 417–421. 引用の際強調を省略した。

(16) Brouwer [1928], p. 421. ブラウアーの言語への不信はまた、ボレルの言語への信頼と鋭い対照をなしている。この対照を含む前直観主義とブラウアー直観主義の比較に関しては、Largeault [1993], pp. 56–65 を参照せよ。

・矛盾律・排中律・三段論法は、真なる命題から別の真なる命題を導く形式であった。これらの形式は有限体系に留まっている限りにおいて、確かにその内容を考えることなしに真なる命題を導く演繹を可能にするが、しかしひとたび無限体系を相手にするや否や、問題が生じる。例えば排中律の使用を認めることは、ある数学的命題は真であるかその否定が真であるかのどちらかであるということを認めることであり、したがって数学の全命題の可解性を認めることである。しかし無限体系においてその保証はないため、結果、排中律の使用は制限されることになる。直観主義の立場では「構成」された命題のみが意味を持つのである。ゆえに、ある命題の否定から矛盾を導くことでその命題の真理性を証明する背理法もまた、具体的にその命題を構成していないことから退けられる（二重否定の除去の制限）。古典論理の幾つかの規則の無際限の使用がかくして禁じられるのである。ブラウアー自身先鞭をつけたこの直観主義論理学は、弟子のハイティングによって確立されることになる。

論理学の再建は、古典論理を基本的にベースとする古典数学の再考をも引き連れる。特に、ヒルベルトによって「無限のシンフォニー」と呼ばれた古典解析学を、実無限と、ある対象をその対象を含む無限領域に言及することで定義するという非可述的定義を拒否しつつ再建することが不可欠である。1950年代において「直観主義の第一の行為」と呼ばれるようになる上の第一の仕事に続いて直観主義がなすべき第二の仕事、「直観主義の第二の行為」は、したがって連続体と実数の構成である。論理学からの数学の独立は、既に前直観主義によっても主張されていたが、上で見たように例えばボレルの連続体の構成は不十分なものであった。ブラウアーはこれを補わなければならない。彼の実数と連続体に対する考えは時期により変化しているが⁽¹⁷⁾、1930年の「連続体の構造」におけるその最終的な姿は概ね次のようなものである。古典数学では実数の定義の一つとしてコーシー列の同値類を用いるものが採用されている。当初、ブラウアーはコーシー列の中でも、構成されうるもの、つまりある規則に従ったものしか認めなかった。しかしこれだけでは連続体を構成することがで

(17) この変化に関しては、van Stigt [1990], pp. 318–385 を参照せよ。

きず、その内に穴が生じてしまう。この穴を埋めるために、ブラウアーが導入した考えこそ、「選択列」である。例えば区間 $[0, 1]$ を考えよう。最初に数 0 を置き、続いて小数点以下の数字を自由に選択していく。確かに、実無限を拒否する直観主義の観点からはこの選択を無限に行うことはできないが、この選択を無際限に開かれたものとみることは可能である。そして、こうした時間的に生成するプロセスとしての選択列が、規則づけられたコーシー列の同値類によって定められる実数の有する諸性質（加法、乗法など）を満たすことは、容易に確認されうる。このようにして連続体は、選択列による「自由な生成の場⁽¹⁸⁾」として産み出されることになる。

ではこのようなブラウアーの直観主義に対して、カヴァイエスは博士主論文の序論でどのような態度をとるのか。それは一見したところ、冷淡なものである。「与えられた建築物を基礎づける代わりに、ブラウアーはその傍らに別の建築物を建てる。しかし企ての大胆さと興味がいかなるものであれ、多数の数学者の嫌悪は理解される。伝統的数学の『堂々とし調和した全体』の内には、その豊かさが何度も試練にかけられてきた方法や、その意味が [...] 諸誤解の偶然の収束から帰結しているようには思われない基礎概念が存在するのである⁽¹⁹⁾」。カヴァイエスによれば、まずは古典数学の保護手段が試みられるべきなのであって、しかもその保護手段としては、公理的方法と、そこから展開して論理学と数学の間の関係を再検討する証明論が存在する。そしてブラウアーはこの公理的方法を正当化することもできていない。また、証明論において用いられる式の連鎖はそもそも論理主義の功績である。かくして論理主義と形式主義の検討へとカヴァイエスは導かれてゆく。

しかしこれがブラウアーに対する彼の最終的な診断ではない。実際、序論に続く第一章で論理主義をヒルベルトの証明論に吸収させた後、残る章でヒルベルト・プログラムの展開を描く彼は、ゲーデルの不完全性定理によってヒルベ

(18) ヘルマン・ワイルの表現である (Weyl[1921], S. 50)。なおこの段落は主に Brouwer [1930] に拠る。

(19) Cavailles [1938], p. 43.

ルトの立場が「否定なく却下⁽²⁰⁾」されたとみる。そして結論において、彼は直観主義・論理主義・形式主義の三つの見解の中で、「直観主義だけが残るだろう⁽²¹⁾」と述べるに至るのである。勿論彼は、「真正な数学」である直観主義に対し、ヒルベルト・プログラムからは独立な「ヒルベルトの二つの省察」を発展させることで古典数学を擁護する「修正された形式主義」の立場を提案するだろう。にもかかわらず、彼はブラウアーの直観主義と自身の立場との一致点を、博士主論文を提出した年（1937）に「数学の基礎についての省察」において述べている。その一致点とは「数学的活動を他のものへの還元によって特徴づけることの不可能性⁽²²⁾」である。つまり、論理学に還元されない数学の自己生成という点で、カヴァイエスはブラウアーと一致する。但し、本稿冒頭の第一テーゼでも述べた通り、その生成はブラウアーのように直観的行為によるものではなく、概念の自己展開でなければならない。そこからさらに、「任意のもの」という概念の導入による実無限の肯定というブラウアーと異なる側面が出てくるのである。

さらに、カヴァイエス自身は言及していないが、もう一つ、カヴァイエスとブラウアーには一致点が存在する。本稿冒頭の第二テーゼで見た通り、彼によれば、数学の認識とは何よりもある「振る舞い」である。命題や式を理解するとは、実際にその命題や式を構成する操作や振る舞いができるということに他ならない。そしてこれは、ワイルによればブラウアーが時折述べていたという文言「数学とは学説というよりも行為である⁽²³⁾」を思い起こさせる。カヴァイエスとブラウアーの第二の一致点、それは数学の認識をある具体的な行為に見る点にある。もっとも、ここでもすぐ付言しておかねばならないが、ブラウアーの行為が意識の直観によるものであり、非可述的定義の否認も意識の有限性に基づいていたのに対し、カヴァイエスにとっては、記号体系こそが振る舞

⁽²⁰⁾ Cavailles [1937], p. 577.

⁽²¹⁾ Cavailles [1938], p. 169.

⁽²²⁾ Cavailles [1937], p. 577.

⁽²³⁾ Weyl [1921], S. 55.

いを可能しており、振る舞いの実効性から非可述的定義さえ認められる点に両者の差異が存する⁽²⁴⁾。

3. 対論理主義

直観主義の検討の末尾で、公理的方法と論理主義の重要性を説いたカヴァイエスは、序論に続く「19世紀における公理化と形式化」と題された第一章で、ボルツァーノを一つの分水嶺として、一方でグラスマンからデデキントを経てフレーゲ、ラッセルに至る解析学における「形式化」の流れを、他方で非ユークリッド幾何学の誕生からヒルベルトの『幾何学の基礎』へ至る「公理化」の流れを描き出している。そしてこの二つの流れはヒルベルトの「証明論」で合流する、というダイナミックな数学史が描出される。このように、確かに『公理的方法と形式主義』は、集合論の危機によってのみ数学基礎論論争は重要性を持つ、という今ではやや古くなってしまった感のある「危機の神話」から始まっていたが⁽²⁵⁾、むしろこの本の主眼の一つは、この論争は単に集合論の危機からだけではなく、一世紀に渡る数学史の蓄積の結果生じたものであることを論証する点にあると言えよう。

さてカヴァイエスは、数学的操作の「形式化」の流れの中に、フレーゲとラッセルの論理主義を置いている。フレーゲに関しては、残念なことに彼はどの著作においても多くの頁を割いていないし、その扱いも常識的なものに留まっている。しかしその沈黙にもかかわらず、カヴァイエスの思考の核心部にフレーゲとの多くの共通点が存在することから、本節ではフレーゲを取って議論の俎上に乗せることにする。もっとも、ここではフレーゲの良く知られた、数学の論理学への還元という彼の論理主義のプログラムに関しては踏み込むのを避け、あくまでもカヴァイエスとの共通点が見出されると思われる、『概念記

⁽²⁴⁾ Cavailles [1937], p. 580.

⁽²⁵⁾ 「危機の神話」の棄却に関しては、例えば Grattan-Guinness [2000], p. 558 を参照せよ。

法』(1879)におけるフレーゲの言語に関する基本的着想を抑えるに留める。

フレーゲは自身の「概念記法」を、ライプニッツに倣って「推論計算」を伴った「記号言語」として呈示している⁽²⁶⁾。もっとも、ライプニッツ自身は「記号言語」とは言わず、代わりに「普遍言語」という表現を用いている。ライプニッツの有名な普遍言語計画を確認しておけば、まず「人間思想のアルファベット」たる原始的な全基礎概念に記号を対応させた上で(普遍言語の作成)、次にこの言語の中での計算によってあらゆる真なる思想を導出する(推論計算)、というものである。フレーゲの「概念記法」は確かにこれと類似した構造を有しているものの、少なくとも以下の二つの差異を持つ。第一に、フレーゲの記号言語計画はライプニッツの普遍言語計画に比べて控えめなものである。彼はあらゆる基礎概念を数え上げることの困難を自覚しており、「ある問題が完全に一般的な形では解決できそうにないと思われるときは、差し当たりそれを制限すべきである」と述べ、まずは算術から始めて徐々に適用領域を拡大していくという方針を採る⁽²⁷⁾。第二に、方程式よりもむしろ式の形で推論計算を考えたライプニッツの考えを継承しつつも⁽²⁸⁾、フレーゲにとって重要なのは式から式の導出ではなく、「判断可能な内容」から概念を導出することである。真偽の判断が下される対象である「判断可能な内容」は、草稿「論理学」によれば、人間精神の産物ではなく、把握されるもの、つまり「何か客観的なもの、[...] 全ての理性的存在者、それを把握する能力を持つ全ての者に対して正確に同じもの」である⁽²⁹⁾。そして判断可能な内容から導出される概念もまた、主観的ではなく「客観的」である⁽³⁰⁾。

(26) 例えば Frege [1882 b], S. 98. 論文「ブールの論理計算と概念記法」にも同じ表現がある。

(27) Frege [1879], S. VI. もっとも、算術における概念記法が「他の隣接する全ての分野の中心に位置する」とはされる。

(28) Couturat [1901], p. 288 f に従う。

(29) Frege [1879–91], S. 7. 周知のことだが、『算術の基本法則 I』(1893)において、「判断可能な内容」は、記号の意義と意味の区別に対応して、「思想」と「真理値」に二分される。

(30) Frege [1884], S. 60–61.

ではこうしたフレーゲの言語観とカヴァイエスのそれとの共通点はどのようなものか。第一に、記号と概念的思考の結びつきである。概念の自己展開としての数学は記号と共にあるという本稿冒頭の第一テーゼは、「記号がなければ、我々が概念的思考に達することもほとんどないだろう⁽³¹⁾」と述べるフレーゲの記号観と通底する。第二に、思考や概念の客観性である。一方でフレーゲにおいては、世界からも意識主体からも独立した「第三の領域」たる思想や概念が、上で見たように一挙に全て獲得されることはないが、しかし創り出されるのではなく、把握され、いわば発見されるものとされる。他方でカヴァイエスは、「内容はその運動において本質的なものであって、[...] 内容が明らかにする自律的ダイナミズムを前にして意識の原初的な疑似経験は消え去る⁽³²⁾」と述べているように、思想や概念の客観性の主張をフレーゲと共有するが、しかし、他から独立して存在する思想を人間が把握するのだとは考えず、むしろ概念を要とする思想の自己創造を主張する。

両者の根本的差異をなすものはしたがって、概念に対する見解の相違に求められよう。つまりフレーゲであれば、概念は判断可能な内容から得られるのであって、例えば、一階の概念は平叙文から名前を削除することによって得られるが、カヴァイエスにおいては、ある概念を理解するとはその概念の含む振る舞いをなすことができるということであったのだから、概念とはある振る舞いの遂行可能性と切り離せないものである。

本節の最後に、ラッセル=ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』(1910–1913)に関するカヴァイエスの議論を簡単に見ておこう。『プリンキピア』は、第1節で見たリシャールのパラドックスに代表される20世紀冒頭以来発見された幾つかのパラドックスを、論理的と意味論的の二つに分け、前者の解決のためにタイプの階層を、後者を解消するためにオーダーの区別を導入して分岐タイプ理論をつくることで、フレーゲの論理主義プログラム

(31) Frege [1882 a], S. 7.

(32) Cavailles [1948 b], p. 4. 但し、思考と概念の客観性に関するカヴァイエスの着想は、フレーゲではなくボルツァーノ由来であることを付言しておく。

の完遂を企てたものである。この企てに対するカヴァイエスの第一の批判は、トートロジーに関するラッセルの当時の見解に向けられる。『数理哲学入門』(1919)において、トートロジーとは「それが矛盾律からの演繹可能性に存すると述べた人によって、定義されたように感じられ、また意図された論理的命題の特徴⁽³³⁾」とされているが、これでは「問題なのは客観的な特性ではなく、心理的印象である⁽³⁴⁾」。第二の批判は標準的なもので、数学の実践にとっては必要であるというだけで、選択公理・無限公理・還元公理という三つの論理的命題とは言えない公理が要求されているという点に向けられている。

結 論

本稿の歩みを振り返っておこう。特定の数学理論から引き出された制限は数学それ自身の進展によって乗り越えられざるを得ないという前直観主義批判から出発したカヴァイエスは、最初になすべきはむしろ数学的作業そのものに対する反省であるとして、ブラウアーの直観主義の検討に向かった。直観主義からは、数学の論理学への還元不可能性、及び数学的認識を行為に置く観点を継承しつつ、従来の数学的建築物の展開を放棄するブラウアーに対して証明や連鎖の重要性を訴え、論理主義を考察する。そしてフレーゲとは、記号と概念の紐帯、概念・思想の客観性という二つの主張で通底するのであった。この歩みからは、カヴァイエスにとってブラウアーの直観主義とフレーゲの論理主義は相補的な関係であることが見て取れる。すなわち、ブラウアーからは数学の自律的展開と行為の重視という観点を受け継ぐ一方で、それらを意識直観に拠るとする彼の見解と記号の軽視を棄却し、逆にフレーゲとは、記号に基づいた概念や思考の客観性という着想を共有しつつも、思想はそれ自身で存在し人間はそれを把握するだけであるという彼のプラトニズムを否定して⁽³⁵⁾、思想と概

⁽³³⁾ Russell [1919], p. 203.

⁽³⁴⁾ Cavailles [1938], p. 59.

⁽³⁵⁾ 勿論、数学の概念的自己進展の主張だけから、プラトニズムの拒否を導くこと／

念の創造性を強調するのである。ゆえにカヴァイエスが数学の本体とするのは、こういう表現が許されるならば、フレーゲ的な客観的思想のブラウアー的な自律的展開とでも言うべきものである。

では、ブラウアー的な振る舞いと、フレーゲ的な記号や概念との関係はより具体的にはどのようなになっているのだろうか。ここではカヴァイエスによる数学進展プロセスの分析を一例として考えてみよう。自然数論における加法や乗法という操作から開始する。そこからまず「範型」というプロセスによって、例えば結合律 $a*(b*c)=(a*b)*c$ やゼロ元 $0*a=a*0=a$ といった「操作の一般形式」が抽出される。そしてさらに「主題化」というプロセスによって、これらの操作の一般形式がある統一性を有したのものとして対象化されるとき、例えば結合律とゼロ元と逆元の操作を含む構造である「群」という概念が登場する。無論、「結合律」や「群」といった概念を理解しているとは、この抽象化の進んだ段階においても、証明や計算においてこれらの記号と共に振る舞いをなせることである。かくして記号こそが、一方で概念理解の徴としての振る舞いを可能にし、他方で従来の操作をいわば己に結晶化させることで通覧を容易にさせ、新たな概念の登場を促すのである。

そして、カヴァイエスのこうした着想を支えているものこそ、「理念的なものの添加」と記号に関するヒルベルトの見解と、ゲーデルの不完全性定理によって明確になった「数学の無尽蔵性」のアイディアに他ならない。そこで本稿は、ヒルベルトの形式主義と不完全性定理に対するカヴァイエスの省察へとさらに導かれることになる。

文献（邦訳のあるものは参照したが、訳は適宜変えてある。）

Borel, E. [1928], *Leçons sur la théorie des fonctions*, 3^e édition, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

ㄨ はできない。実のところ、カヴァイエスはフレーゲのように思考や概念が世界から独立したものとはせず、むしろ世界を「変形」と考える点で、プラトニスムとは異なるのである。しかしこの考えを検討するためには、彼のヒルベルトに対する見解を経由する必要がある。

- Brouwer, L. E. J. [1912], «Intuitionism and formalism» in Brouwer, *Collected Works I*, Heyting, A. (ed.), Amsterdam-NewYork, North-Holland, 1975, pp. 123–138.
- [1928], «Mathematik, Wissenschaft und Sprache», *ibid.*, pp. 417–428.
- [1930], «Die Struktur des Kontinuums», *ibid.*, pp. 429–440.
- [1952], «Historical background, principles and methods of intuitionism», *ibid.*, pp. 508–515.
- Cavaillès, J. [1937], «Réflexions sur le fondement des mathématiques» dans Cavaillès, *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris, Hermann, 1994, pp. 577–580.
- [1938], *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, 2^e édition, Paris, Hermann, 1981.
- [1947 a], «Transfini et continu» dans *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, pp. 451–472.
- [1947 b], *Sur la logique et la théorie de la science*, 4^e édition, Paris, Vrin, 1987.
- Couturat, L. [1901], *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris, Félix Alcan, 1901.
- Frege, G. [1879], *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache der reinen Denkens*, Halle a. S., Louis Nebert, 1879.
- [1879–91], «Logik» in Frege, *Nachgelassene Schriften*, Hamburg, Felix Miner, 1969, S. 1–8.
- [1882 a], «Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift» in Frege, *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Hildesheim, Olms, 1988, S. 106–114.
- [1882 b], «Über Zweck der Begriffsschrift», *ibid.*, S. 97–106.
- [1884], *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Hamburg, Felix Miner, 1986.
- Grattan-Guinness, I. [2000], *The search for mathematical roots, 1870–1940*, Princeton, Princeton University Press, 2000.
- Hesseling, D. E. [2003], *Gnomes in the fog: the Reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*, Basel, Birkhäuser, 2003.
- Largeault, J. [1993], *Intuition et intuitionisme*, Paris, Vrin, 1993.
- Lebesgue, H. [1905], «Sur les fonctions représentables analytiquement», *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 6^e série, tome I, 1905, pp. 139–216.
- Poincaré, H. [1906], «Les mathématiques et la logique», *Revue de métaphysique*

et de morale, 14, mai 1906, pp. 294–317.

Russell, B. [1919], *Introduction to Mathematical Philosophy*, London, Routledge, 1993.

van Stigt, W. P. [1990], *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam, North-Holland, 1990.

Weyl, H. [1921], «Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik», *Mathematische Zeitschrift*, vol. 10, 1921, S. 39–79.

——大学院文学研究科研究員——

Cavaillès face à l'intuitionnisme et au logicisme

Daisuke NAKAMURA

Jean Cavaillès, philosophe des mathématiques (1903–1944), détermine sa position dans le problème du fondement des mathématiques comme «formalisme modifié», qui développe quelques conceptions du formalisme hilbertien. Néanmoins, cette position comporte aussi des aspects de l'intuitionnisme de Brouwer et du logicisme de Frege. Notre objectif est alors de délimiter combien Brouwer et Frege contribuent à l'épistémologie de Cavaillès. Nous examinerons d'abord les critiques des pré-intuitionnistes (Borel et Lebesgue) lancées par Cavaillès, ce qui nous amènera à analyser l'attitude de celui-ci par rapport à l'intuitionnisme de Brouwer qui hérite partiellement du pré-intuitionnisme. Puis nous étudierons l'identité ainsi que la différence entre la philosophie de Cavaillès et le logicisme de Frege. Ces études révéleront enfin la complémentarité de Brouwer et de Frege dans la pensée cavaillèsienne : d'une part, Cavaillès retient, de l'intuitionnisme, l'*autonomie* des mathématiques et la primauté des *actes* mathématiques, tout en refusant la conception brouwerienne sur la conscience ; d'autre part, il partage, avec Frege, la conception de l'*objectivité* de la pensée et du concept fondés non sur la conscience mais sur le *signe*, en écartant le platonisme du logicien.